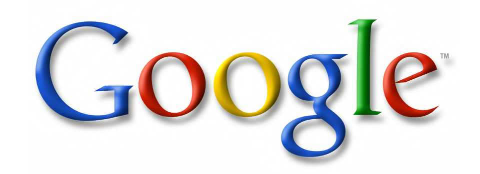
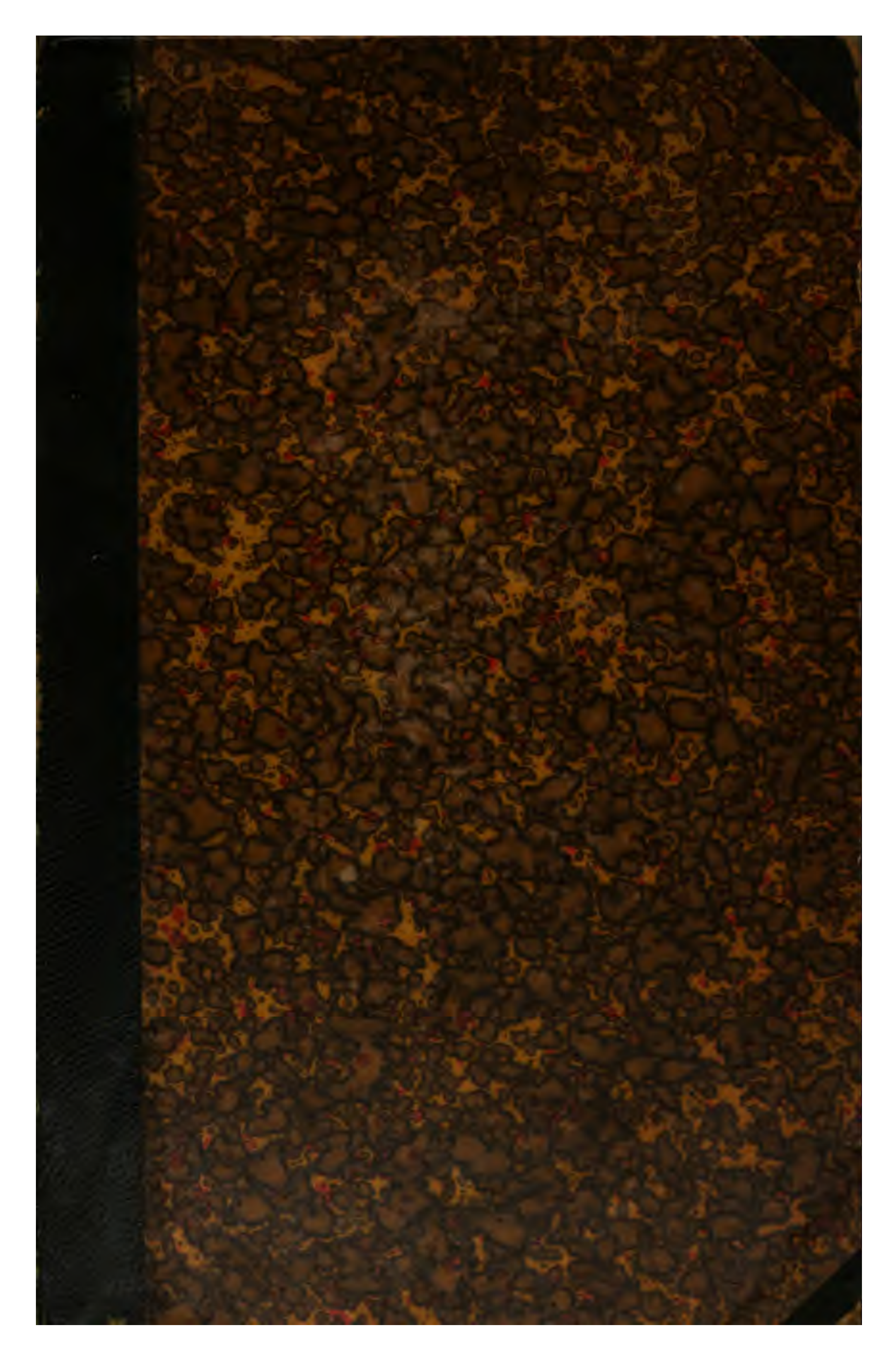
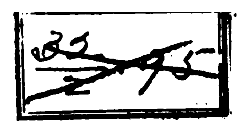
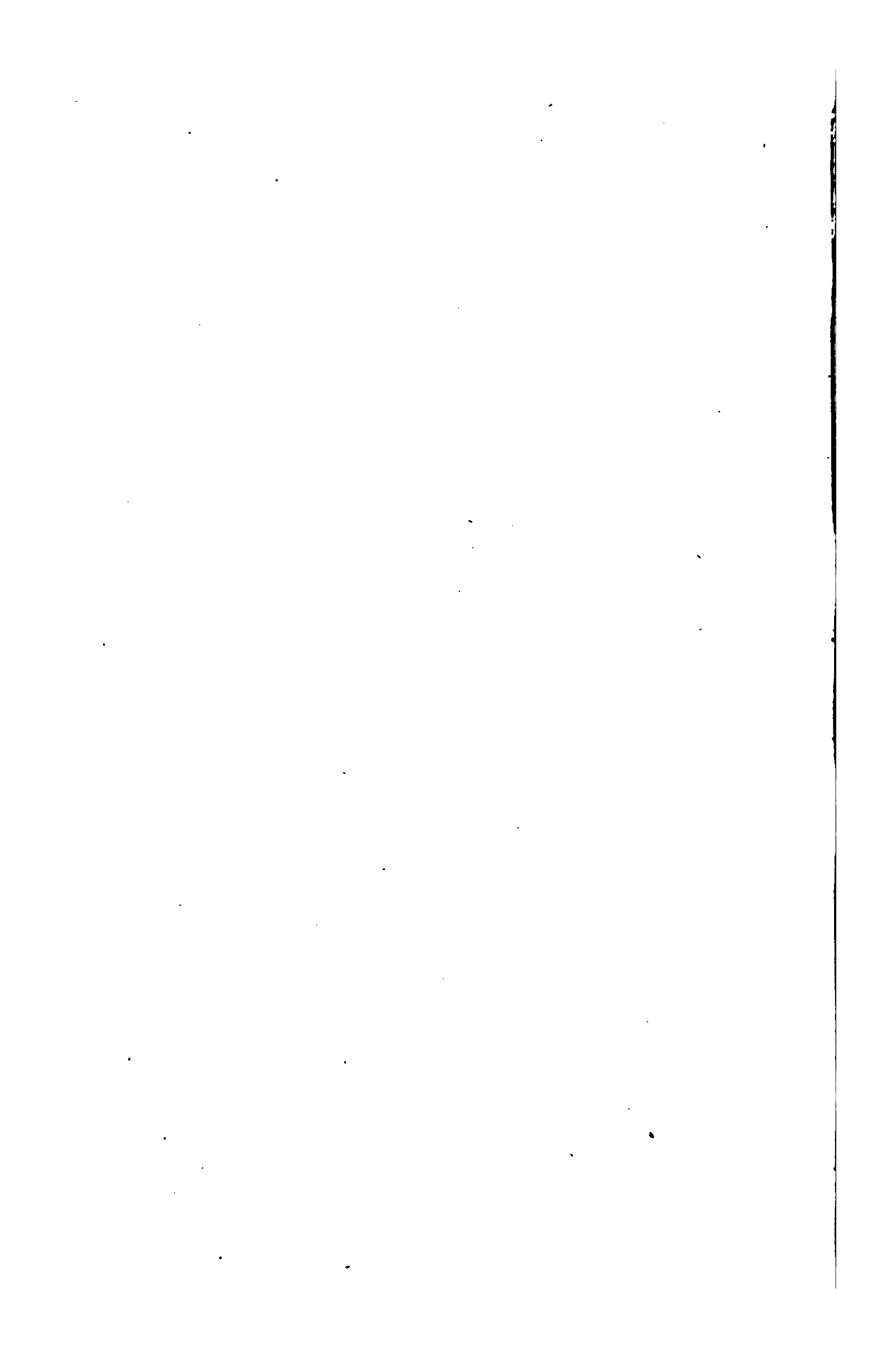








DIE

# DARSTELLENDE GEOMETRIE.

## EIN GRUNDRISS

FÜR

VORLESUNGEN AN TECHNISCHEN HOCHSCHULEN

UND ZUM SELBSTSTUDIUM

VON

DR. WILHELM FIEDLER,

PROFESSOR AM EIDGENÖSSISCHEN POLYTECHNIKUM ZU ZÜRICH.



MIT 228 HOLZSCHNITTEN UND 12 LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1871.

# VORREDE.

Das vorliegende Buch schliesst sich im Wesentlichen den Vorlesungen an, die ich seit einer Reihe von Jahren an den technischen Hochschulen zu Prag und Zürich gehalten habe und ist in erster Linie meinen Zuhörern bestimmt; aber ich hoffe, dass es auch in weiteren Kreisen nützlich sein kann.

Seine Form ist die eines Grundrisses; in den grundlegenden Hauptsachen wollte ich deutlich und klar, möglichst kurz zumeist sogar auf Andeutungen mich beschränkend in den Folgerungen sein, doch aber reich genug in diesen, um den Vorträgen schon innerhalb des Gegebenen die Freiheit einer auswählenden Bewegung zu lassen und um auch dem liebevolleren Selbststudium noch dauernd Stoff zu bieten; ich suche demselben durch Quellen- und Literatur-Nachweisungen noch weiter zu dienen.

Das Buch ist eine darstellende Geometrie ohne Atlas; aber dass die Figur dem Texte, der sich auf sie bezieht, unmittelbar zur Seite stehe, erschien mir so werthvoll, dass ich mich entschloss, auf alle die grösseren Ausführungen zu verzichten, welche eine reichliche Beigabe gestochener Tafeln in Quart ermöglicht hätte, und dass ich selbst die Gefahr nicht scheute, zuweilen auch eine unentbehrliche Figur durch die nöthige Kleinheit dem Verständniss etwas weniger bequem werden zu sehen. Die ausgeführten Beispiele sollen ja nur die selbstständige Wiederdurchführung erleichtern und damit zur Durchführung der grossen Menge anderer Probleme anleiten und anregen, welche nur in Worten gegeben sind. Dem sorgfältigen Leser, welcher mit den Elementen der darstellenden Geometrie in dem Maasse vertraut ist, wie solches heutzutage an den technischen Hochschulen vorausgesetzt werden darf, wird diese Anleitung ausreichend sein; die Selbstausführung zu ersparen ist in keinem Falle meine Absicht gewesen.

*

Eigentlich technische Beispiele und Anwendungen sind ausgeschlossen, theils um Raum und Figuren zu ersparen, namentlich aber, weil sie zeitlich und örtlich vielfach bedingt und darum nicht von allgemeingültigem Werthe für den Zweck der Wissenschaft sind

Der Entwickelungsgang, welchen ich befolge, ist in der Aufgabe der darstellenden Geometrie an der technischen Hochschule der Gegenwart und in ihrer Stellung im Unterrichts-Organismus derselben begründet. Natürlich sind beide durch die Herausbildung der technischen Schulen zu Hochschulen der Mathematik und der Naturwissenschaften, die sie jetzt sein müssen um ihre Aufgabe ganz zu erfüllen, wesentlich beeinflusst worden und weil jene Entwickelung erst im letzten Jahrzehnt mehr und mehr vollzogen respective angestrebt oder doch für nothwendig erkannt worden ist, so mag es nicht überflüssig sein, in Kürze von dem zu sprechen, was dabei die darstellende Geometrie betrifft.

Die Stellung derselben im Unterrichts-Organismus ist insofern dieselbe geblieben, als sie ihrer technischen Anwendungen wegen nach wie vor zu den Studien des ersten Jahres gehört; aber sie ist wesentlich dadurch verändert, dass sie mathematische Kenntnisse überhaupt und ihre Elemente selbst in gegen früher nicht unbeträchtlich erweitertem Umfange voraussetzen darf, nur nicht die analytische Geometrie des Raumes; und dass streng wissenschaftliche mathematische Vorlesungen, insbesondere ein umfassender Curs der höhern Analysis, ihr parallel gehen. Was die Aufgabe der darstellenden Geometrie an der technischen Hochschule betrifft, so ist das zu bewältigende Material im Wesentlichen gleichfalls das Alte geblieben; für Kegel und Cylinder, für die Flächen zweiten Grades, für windschiefe Regelflächen und Rotationsflächen als die technisch vorzugsweise zur Verwendung kommenden Typen hat sie die Darstellung und die constructive Behandlung der Berührungs- und Durchdringungsprobleme zu lehren. Dagegen hat man im Fortschritt jener Entwickelung immer mehr erkennen müssen, dass die eigentliche Aufgabe dieses Unterrichts die w i s s e n s c h a f t l i c h e  E n t w i c k e l u n g  u n d  D u r c h b i l-

dung des Vermögens der Raumanschauung sei und dass diese Aufgabe nicht wohl durch die Ueberlieferung einer blossen Methode der Darstellung und einer Anzahl technisch nothwendiger oder brauchbarer Constructionen erfüllt werden kann.

Und wenn von Monge und seinen Nachfolgern die darstellende Geometrie hingestellt werden konnte als die Anwendung von Lehrsätzen, die anderwärts und zwar analytisch bewiesen wurden, zur Begründung der Constructionen, die in den verschiedenen Zweigen des Ingenieurwesens gebraucht werden, so hat sich mit der fortschreitenden Arbeitstheilung im Gebiete des höhern Unterrichts eine dem entsprechende Behandlung — schon an sich von sehr zweifelhaftem Werthe in der gewöhnlichen Form — immer mehr als unwissenschaftlich und als ganz unverträglich mit dem Character einer Hochschule herausstellen müssen; man hat daher selbst mit einem Schein von Consequenz bis zu einer vollständigen Verweisung dieser Disciplin an die Vorbereitungsschulen vorgehen können; aber es ist diess gewiss mit Unrecht und zum grossen Schaden der Sache geschehen, denn die Durchbildung des Raumanschauungsvermögens ist für den Techniker ebenso wichtig und nothwendig als im erforderlichen Umfange auf früheren Stufen des Unterrichts unerreichbar und nicht so gut oder doch nicht so natürlich durch andere Disciplinen zu erzielen. Vielmehr nur Eins bleibt übrig, die darstellende Geometrie an der technischen Hochschule muss durch die Behandlung ihres Materials das geistige Interesse tief und nachhaltig genug anzuregen wissen, um den Schülern neben gediegenen rein mathematischen Collegien doch soviel Arbeitslust und Liebe abzugewinnen, dass die mühsame constructive Durchführung einer grössern Reihe von Problemen nicht zu lästig wird — denn nur durch solche ideelle Anregung und Durchdringung kann das in der freien Luft der Hochschule gelingen; und anderseits, nur durch solche vielseitige geistige und graphische Arbeit kann jenes eigentliche zugleich im höchsten Sinne practische Ziel der Wissenschaft, die Durchbildung der Raumauffassung, erreicht werden; es ist eine Durchbildung an der Hand

der zeichnenden Darstellung, aber mit dem Endziele, die ideelle Anschauung so lebendig und so sicher zu machen, dass jene, die Zeichnung, ganz oder doch auf weite Strecken erspart werden kann. Und die Geschichte der Geometrie in der jüngsten Epoche selbst durch die Rolle, die wir darin die Schule von Monge spielen sehen, predigt ja die Wahrheit und zwar nicht für die Kreise der technischen Hochschulen allein, dass die Geometrie so lange practisch construieren muss bis gelernt ist, ohne äussere Anschauung räumlich zu denken.

Die Lösung der Aufgabe, die ich hier darbiete, habe ich vor einer Reihe von Jahren (1863 in der „Zeitschrift f. Mathem. u. Physik") in kurzem Ueberblick skizziert und seitdem vielfach erprobt. Ich entwickele an der Betrachtung der Raumelemente: Gerade Linie, Punkt und Ebene, und an ihren gegenseitigen Beziehungen und einfachsten Zusammensetzungen in Polygonen und Polyedern, wie an den als Projectionen des Kreises entstehenden Kegelschnitten die Methoden der darstellenden Geometrie; ausgehend von der Centralprojection, dann aufsteigend zur centrischen Collineation der Räume als der Theorie der Modellierungs-Methoden und zurückgehend zu dem Specialfall der Parallelprojection gewinne ich alle die Hilfsmittel, welche für die constructive Theorie der krummen Linien und Flächen nöthig sind. Es sind die Untersuchungsmittel der neueren synthetischen oder der Geometrie der Lage; vor allem wichtig für das Ziel der darstellenden Geometrie die klare Einsicht in den Zusammenhang und den Formenwandel der collinearverwandten Figuren und die Erkenntniss, dass die involutorischen Systeme in der Ebene und im Raum die Quelle bilden, aus der alle Arten von Symmetrie entspringen.

Eine solche Entwickelung ist unter der Voraussetzung wohl möglich, dass ein elementarer Cursus der darstellenden Geometrie vorausgegangen ist; in Folge dessen genügt es dann, in dem Abschnitt von der Parallelprojection, ihren Transformationen und der Axonometrie nur recapitulierend und ergänzend zu verfahren, um namentlich die Vortheile zu

entwickeln, welche von den gewonnenen allgemeinen Gesichtspunkten und Methoden für diese elementaren Gebiete zu ziehen sind. Vollständigkeit ist daher weder im Text noch in den Aufgaben dieses Abschnittes angestrebt, vielmehr sind ganze Richtungen der Untersuchung und Entwickelung nur flüchtig berührt worden. Ich habe die Gefahr nicht unterschätzt, die darin liegt, und muss es der billigen Beurtheilung der Leser überlassen, festzustellen ob ich sie vermieden habe; jedenfalls ist dieser Abschnitt aus zahlreichen Lehrbüchern leicht zu ergänzen.

Diese Durchführung einer Methodik durch die ganze Reihe der wesentlichen Projections- und Modellierungs-Methoden hat obwohl in ganz anderer Folge der Materien und in geringerer Allgemeinheit zuerst H. K. Pohlke's „Darstellende Geometrie." Erste Abth. (Berlin 1860; 2. Aufl. 1866.) gegeben, eine Schrift, welcher leider trotz guter Aufnahme eine Fortsetzung nicht gefolgt ist. Früher schon zog H. G. Schreiber in seinem Werke „Geometrisches Portfolio" (Karlsruhe 1839) wenigstens die Centralprojection in den Bereich der darstellenden Geometrie. Ich selbst hatte von 1859 ab in veröffentlichten Arbeiten für mein Programm gewirkt und 1867 eine Darstellung meiner Methodik in den Hauptzügen gegeben („Sitzungsberichte der K. K. Akad. d. Wissensch." 55. Bd.); diese Letztere hat H. Schlesinger Anlass geboten, sein Buch „Die darstellende Geometrie im Sinne der neueren Geometrie" (Wien 1870) zu verfassen, in welchem die grössere erste Hälfte ebenfalls der Methodik gewidmet ist. Ich will dazu bei diesem Anlass nur das Eine bemerken, dass ich die dogmatische nicht aus der Anschauung der Projection im Raum begründete Einführung des Begriffs der „Projection in der Ebene" vom Standpunkte der darstellenden Geometrie aus für einen Rückschritt und gerade auch für elementare Zwecke für ganz unpädagogisch halte; denn gerade diess hat leider bereits Nachahmung gefunden.

Ich habe eine Reform des Unterrichts in den Elementen nicht im Auge und halte sie für entbehrlich, glaube aber, dass man sie in keinem Falle wird vollziehen können ohne

eine Reform des gesammten geometrischen Unterrichts damit zu verbinden. Aber ich sehe auch in den gegenwärtigen Programmen keine Nöthigung, die hergebrachte unsymmetrische Behandlungsweise der dreiseitigen Ecke beizubehalten; die viel mehr anschauliche, die Beziehungen zum sphärischen Dreieck so viel besser aufschliessende, die ich vor langem gegeben habe, (Quellen- u. Literatur-Nachweisungen“ p. 584.), wäre wohl geeignet, mit Vortheil sie zu ersetzen.

In der Anordnung der Lehre von den Curven und Flächen ist von fast allen Schriftstellern das aus ganz andern Verhältnissen entsprungene Schema von Monge beibehalten worden: Erzeugungsweise der krummen Flächen, Tangentialebenen und Normalen derselben, Durchschnitte der krummen Flächen mit Ebenen und unter einander — oft mit Hinweglassung seines Schlusstheils, in welchem Monge von den Raumcurven und developpabeln Flächen und von den Krümmungsverhältnissen der Flächen handelt. Die Lehre von der Perspective und die Construction der Schatten, welche doch im gewöhnlichen Sinne ihrem geometrischen Kerne nach ganz aufgeht in der Construction der Berührungskegel von gegebener Spitze und ihrer Durchschnitte mit den auffangenden Flächen, bleibt dann wie bei Monge noch ausserhalb des Rahmens, um mit so ganz heterogenen Dingen wie Steinschnitt etc., Gnomonik, Zahnräderconstructionen unter dem Titel „Anwendungen“ verbunden zu werden.

Meine Entwickelung zeigt, dass die einfache und organische Gliederung nach den Titeln: „Curven und developpable Flächen, krumme Flächen im Allgemeinen und Flächen zweiten Grades insbesondere, windschiefe Regelflächen, Rotationsflächen ohne alle Schwierigkeit durchführbar ist; so dass die darstellende Geometrie mit der reinen nach dem gleichen Plane vorgeht und ganz natürlich da in dieselbe mündet, wo sie ihre Aufgabe beendet. Mit den einfach unendlichen Reihen ebener Elemente, den die Kegelflächen als Specialfall einschliessenden developpabeln Flächen als Tangentenflächen räumlicher Curven, muss begonnen werden, weil es unerlaubt ist, auch nur den einfachsten Fall einer

Durchdringung zu behandeln, ohne die wesentlichen Charactere einer Raumcurve und die Art untersucht zu haben, wie sich dieselben in den Projectionen manifestieren; die aus der Betrachtung des geraden Kreiscylinders hervorgehende Schraubenlinie bietet ein erstes vortreffliches Beispiel für diese Lehren, die dann am Studium der Durchdringungscurven von zwei Kegeln zweiten Grades ihren weiteren Ausbau finden. Damit ist die Untersuchung der krummen Flächen vorbereitet, da die beiderlei Mittel zu ihrer constructiven Behandlung, die aufgeschriebenen Curven und die umschriebenen Developpabeln, verfügbar sind; für die Flächen zweiten Grades wird ihre erste Anwendung gemacht, alle die besten Methoden ihrer constructiven Behandlung werden begründet und entwickelt, die Durchdringungscurven derselben werden als gleichartig und identisch mit den Durchdringungscurven der Kegel zweiten Grades erkannt und das dualistisch entsprechende Problem der gemeinsam umschriebenen Developpabeln, das allgemeine Problem der Schatten bei solchen Flächen, gelöst. Die Theorie der windschiefen Regelflächen schliesst sich ganz naturgemäss an, die technisch vorkommenden Typen derselben geben vortreffliche Gelegenheit zu ihrer Entwickelung und Erläuterung, mit einer kurzen Behandlung der Regelflächen dritten Grades schliesse ich sie, weil letztere geeignet sind, gewisse allgemeine Anschauungen zu illustrieren. Endlich erhalten die Rotationsflächen ihrer technischen Bedeutung wegen eine eigne eingehende Behandlung; ich nehme dabei Anlass, die sogenannten Beleuchtungs-Constructionen als Constructionen umschriebener Developpabeln, deren Richtungskegel coaxiale Rotationskegel sind, zu erledigen und für alle die betrachteten Flächen zu erklären. Ueberall dringt die Behandlung vor bis zu den Elementen der Lehre von der Krümmung der Flächen, deren weitere Ausführung jedoch über den Plan meines Buches hinausgeht.

Diese Anordnung fördert mit mehr Sicherheit als die dem Schema von Monge entsprechende die wissenschaftliche Durchbildung der Raumanschauung, weil sie eine bestimmte wichtige Raumform oder eine Gruppe solcher Formen von wesentlich gleichen Characteren im Zu-

sammenhange nach allen Richtungen zu studieren erlaubt, statt die verschiedensten Formen: Kegel, Rotationsflächen, windschiefe Regelflächen etc. im Fluge nach einander vorüberzuführen, um nur z. B. die eine Frage nach der Tangentialebene bei gegebenem Berührungspunkte zu erörtern. Ich wähle diess Beispiel, weil es nebenbei sehr geeignet ist zu zeigen, dass das Princip dieser Zusammenordnung lediglich ein formal analytisches der Geometrie selbst vollkommen fremdes ist, dass es also unmöglich sein muss, mit solcher Anordnung eine auf sich selbst oder doch auf die Mittel der Geometrie gestellte Entwickelung zu vereinigen. Sicher ist das sorgfältige und zusammenhängende Studium des einen Beispiels der Schraubenlinie und ihrer developpabeln Fläche für die Entwickelung der Raumanschauung werthvoller und erfolgreicher als die flüchtige Berührung vieler verschiedener Beispiele sein würde. Wie bei dieser das Naheliegendste übersehen werden kann, zeigt der Umstand, dass der Selbstdurchdringung oder Doppelcurve der developpabeln Schraubenfläche nirgends Erwähnung gethan ist. Noch werthvoller womöglich ist die Behandlung der Raumcurve vierter Ordnung erster Art und der nach dem Gesetz der Dualität ihr entsprechenden Developpabeln mit ihren involutorischen Symmetrien; denn sie umfasst eine grosse Reihe der häufigst vorkommenden Durchdringungsformen, und es ist nicht nur im allgemeinen Falle fast unmöglich, sondern auch im speciellen Falle unvortheilhaft, solche ohne die Kenntniss jener Symmetriegesetze construieren zu wollen. Gleichwohl ist eine derartige Behandlung nirgends auch nur versucht worden; die Untersuchung der developpabeln Fläche, welche zwei Kegelschnitten gemeinsam umschrieben ist, unter dem Gesichtspunkt der Schattenbestimmung in dem grossen an trefflichen Einzelheiten so reichen Werke von H. de la Gournerie „Traité de géométrie descriptive“ 3 part. Paris 1860—64 (4°. 72 Bogen und 150 Tafeln), das einzige Beispiel einer Inangriffnahme dieser Probleme in einem Werke über darstellende Geometrie, das ich kenne, ruht durchaus auf analytischer Basis und bleibt für den Unterricht unfruchtbar, so lange man nicht die ana-

lytische Geometrie des Raumes in weit grösserem Umfange voraussetzen und unbeschränkt benutzen darf.

Aber wichtiger noch als der pädagogische erscheint mir der wissenschaftliche Gewinn, den diese Behandlungsweise möglich macht. Es schiene mir schon von Werth, wenn durch die Untersuchungen der darstellenden Geometrie das Verständniss bezüglicher Parthien in v. Staudt's Hauptwerk erleichtert würde, das wirklich solcher Erleichterung bedarf; aber es ist wichtiger, dass nun die darstellende Geometrie die natürliche Einführung in die Geometrie der Lage ist. Sie hat alle die Grundanschauungen und Untersuchungsmittel derselben auf dem directesten Wege entwickelt und ihre Fruchtbarkeit im Gebiete des Darstellbaren bewährt; bei gereifter und durchbildeter Raumanschauung darf sie nun der reinen Geometrie die Weiterführung derselben Betrachtungsweise zu systematischem Ausbau und über die Grenzen des Darstellbaren hinaus überlassen. Das Studium der projectivischen Eigenschaften, das der darstellenden Geometrie unumgänglich ist, weil nur durch diess aus dem Abbild die Eigenschaften des Originals sich erkennen lassen, führt nun zum Studium der Raumformen durch Vergleichung der Originale mit Abbildern nach einfachen Gesetzen des Entsprechens in allgemeinster Lage und Auffassung. In der Systematik schliessen sich an die perspectivische Collineation und Involution und an die Polarreciprocität der ebenen Systeme und der Räume die allgemeine Collineation und Reciprocität der Gebilde zweiter und dritter Stufe. In der Lehre von den aus der Verbindung projectivischer Gebilde hervorgehenden Erzeugnissen kann nun von der allgemeinen Behandlung der Kegelschnitt-Büschel und Schaaren aus die Untersuchung der Beziehungen zweier Kegelschnitte abschliessend geführt werden. Und welche schönen Einblicke in das Wesen geometrischer Verallgemeinerung gewährt dann die Vergleichung der Ergebnisse derselben mit den involutorischen Symmetrien der Durchdringungscurve und der gemeinsam umschriebenen Developpabeln von zwei Flächen zweiten Grades, die nun schon bekannt sind und die so vollständig an dem gemeinsamen

Quadrupel harmonischer Pole und Polarebenen das wiederholen, und so viel reicher entwickeln, was für die Schnittpunkte und die gemeinsamen Tangenten von zwei Kegelschnitten stattfindet in Bezug auf das ihnen gemeinsame Tripel harmonischer Pole und Polaren. Es kann zur Generation von Curven und Kegelflächen höherer Ordnungen und Classen, zur Theorie der Netze und Systeme vorgegangen werden; ebenso von der Behandlung der Büschel und Schaaren von Flächen zweiten Grades zu Flächenbündeln und Systemen und ihren Erzeugnissen. In den Materialien der neuern Untersuchungen also, wie sie z. B. der zweite Theil von H. Reye's Vorträgen „Die Geometrie der Lage“ (Hannover 1868) behandelt, in einem Gebiete, bis zu welchem sie sonst im Rahmen einer Vorlesung kaum vorzudringen vermag, beginnt nun die specielle Entwickelung der Geometrie der Lage und man kann sie sicher so weit führen, dass das volle und unverwischbare Interesse erweckt wird, welches sie darbietet.

Und jene Einführung ist besonders auch deshalb so glücklich, weil sie von vornherein zur räumlichen Betrachtung führt und die Einschränkung auf die Ebene, den Krebsschaden dieser Disciplin, ganz unmöglich macht; ich halte aber auch das für einen Vorzug dieser Verbindung der Geometrie der Lage mit der darstellenden Geometrie, dass dadurch die metrischen und projectivischen Eigenschaften in ihrem Zusammenhange gezeigt und die Uebergänge zwischen ihnen gerade besonders beleuchtet werden. Die Geometrie der Lage enthält ja die Geometrie des Maasses als einen Theil; die Theorie der Involution führt von jener zu dieser.

Es ist endlich ein wesentliches Glied in meinem Plane, dass in dem Abschnitte von den projectivischen Coordinaten aus den Grundanschauungen der Geometrie, zu denen die Darstellung geführt hat, die analytische Bestimmungs- und Ausdrucksweise sich ergiebt; denn allerdings ohne die Benutzung gewisser analytischer Begriffe und Wahrheiten, wie der Begriffe von Ordnung und Classe, und der Sätze von der Zahl der gemeinsamen Wurzeln von zwei oder drei Gleichungen, ohne die Mitinbetrachtnahme imaginärer Elemente wäre der

Vorschritt des Ganzen sehr erschwert; wenn aber die wesentliche Einheit der allgemeinen analytischen und der rein geometrischen Untersuchungsmethode erkannt ist, so kann von Eigenschaften der Curven oder Flächen $n^{ter}$ Ordnung oder Classe gesprochen werden und man wird sich selbst den Gebrauch z. B. der Formeln von Plücker, welche zwischen den Zahlen der Singularitäten algebraischer Curven bestehen, oder den Begriff des Geschlechts etc. nicht zu versagen brauchen.

Die Vereinigung der analytischen und der geometrischen Methoden ist aber überhaupt nicht leicht hoch genug zu schätzen; selbst die Analysis entnimmt für verwandte Fragen in den allgemeinen Regionen, für die sie sich die Anschauung eines Raumes von $n$ Dimensionen oder den Begriff einer $n$-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit schuf, ihre besten und zielsichersten Methoden aus der Verallgemeinerung der im Raume von drei Dimensionen bewährten, die ihrerseits die analytischen Formen der Methoden der reinen Geometrie sind. Das volle Verständniss solcher Vereinigung darf daher als eins der wichtigsten Ziele des höhern Unterrichts angesehen werden; es sichert der modernen Behandlungsweise der analytischen Geometrie erst ihren ganzen Erfolg und für eine Darstellung der Geometrie, wie sie gegeben ist in H. Cremona's „Preliminari di una teoria geometrica delle superficie“ (Bologna 1866—68) und in seinem preisgekrönten „Mémoire de géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre“ (Berl. 1868) — von welchen Arbeiten uns eine deutsche Uebersetzung unter seiner Mithülfe in Aussicht steht —, einer Behandlungsweise, die so fruchtbar ist an Resultaten, weil sie sich auf die Benutzung aller Hilfsmittel gründet, können so tüchtig vorbereitete Jünger gewonnen werden.

Diese Hoffnung auf eine Förderung der Wissenschaft und ihrer Verbreitung ist es gewesen, die mich in der mühevollen Arbeit der Vorbereitung dieses Buches ermuntert hat. Wenn gewiss ist, dass die darstellende Geometrie für die technische Hochschule der beste und natürlichste Weg zur Aneignung der geometrischen Wissenschaft bleiben wird, so hat sie schon damit eine für Pflege und

Fortschritt der Mathematik wichtige Mission; vielleicht aber muss man sie als ein wichtiges und werthvolles Stück der mathematischen Studien überhaupt anerkennen und ihre Pflege überall da aufnehmen, wo man solche wahrhaft erfolgreich fördern will. Jedenfalls sind die modernen Theorien noch in weitem Umfange zu praktischer Verwerthung geeignet und bestimmt und gewiss werden sie selbst am sichersten gefördert durch die Ausbreitung ihrer Kenntniss in weiteren Kreisen der studierenden Jugend. Möge mein Buch in diesem Sinne nützlich sein!

Hirslanden bei Zürich, im Juli 1870.

**Dr. Wilh. Fiedler.**

---

April 1871.

Seit ich das Vorige schrieb, ist der grosse Krieg vorübergebrausst und wir Deutschen allerwärts haben mit sorgenvollem Antheil, mit Dank und Jubel, mit stolzer Erhebung ob der wiedergewonnenen Einheit des Vaterlandes, den gewaltigen Gang der Ereignisse begleitet. Nun widmet sich das deutsche Volk mit freudigem Vertrauen in seine Kraft der Pflege der Werke des Friedens, der Früchte seiner Arbeit sicher, wie nie zuvor. Glücklich, wem es vergönnt ist, daran mit zu wirken in seinem Kreise!

Ich habe dem Vorigen nichts hinzuzufügen. Nur bemerken will ich, dass die Literaturnotizen bis zu Anfang dieses Jahres fortgeführt sind, und mit Dank erwähnen, dass ich für die Correctur des Buches meinen gegenwärtigen Assistenten, den Herren Beck und Hemming, und für einige Figuren der älteren Mitarbeit früherer Assistenten, der Herren Morstadt in Prag (Tafel VII und XII) und Fliegner in Zürich (Tafel III und XI) verpflichtet bin. Auch muss ich dankbar anerkennen, dass der Herr Verleger in sorgfältiger Ausstattung Alles gethan hat, was ich wünschen konnte.

---

# Darstellende Geometrie.

## Zweiter Theil. **Die constructive Theorie der krummen Linien und Flächen.**

### A. Von den Curven und den developpablen Flächen.
§§ 62—86; pag. 195—309. Fig. 121—165. Taf. I—IV.

C. Von den windschiefen Regelflächen.
§§ 104—114; pag. 400—446. Fig. 183—197.

§ pag.

E. Von den projectivischen Coordinaten.
§§ 131—145; pag. 505—580. Fig. 216—228.

## Uebersicht der Figuren und Tafeln.

### Erster Theil.

Zweiter Theil.

# Darstellende Geometrie.

## Einleitung.

Zweck und Bedeutung. Der nächste Zweck der darstellenden Geometrie ist die Bestimmung räumlicher Formen nach Lage, Grösse und Gestalt durch andere räumliche Formen; zumeist geschieht sie durch die graphische Darstellung in einer Fläche, in manchen Fällen durch das räumliche Abbild oder Modell. Die Untersuchung der gegenseitigen Beziehungen der so bestimmten Raumformen mittelst ihrer Darstellung wird daran angeschlossen.

Beides macht die darstellende Geometrie zu einer wichtigen Hilfswissenschaft des Technikers; sie dient ihm bei der Nachahmung schon vorhandener Erzeugnisse seines Faches, wie bei der Erfindung neuer gleichmässig. In der Regel ersetzen die nach ihren Methoden hergestellten Zeichnungen die so viel kostbareren Modelle. Die erste systematische Anleitung zur Befriedigung dieser Bedürfnisse boten J. H. Lambert's Freie Perspective — Zürich 1759 und G. Monge's Géométrie descriptive — Paris 1795.

In zwei Richtungen erweitert sich diese Bedeutung noch. Zuerst insofern der angestrebte nächste Zweck gefördert wird durch die Bildlichkeit der Darstellung, d. h. durch ihre Aehnlichkeit mit dem Gesichtseindrucke, den das dargestellte Object selbst hervorbringen würde; man ist dadurch veranlasst, diese Bildlichkeit zu gewinnen und man sucht dieselbe für die ebenen Darstellungen zu erhöhen durch die Aufnahme der Beleuchtungsverhältnisse in die Darstellung. Damit erweitert sich die darstellende Geometrie nach der practischen Seite, der Seite der Darstellung, zur wissenschaftlichen Grundlage der Zeichenkunst; sie nimmt für ihre Ausführungen neben der Genauigkeit die Schönheit zum Ziel.

Sodann aber, insofern der bezeichnete Zweck recht verstanden die Darlegung aller Constructionen der Raumgeometrie und die Lösung ihrer Aufgaben verlangt, hat die darstellende Geometrie sich als geeignet zur naturgemässen Entwickelung hiervon zu erweisen; und es ergiebt sich, dass sie allerdings vermag, in den Besitz gerade der Elemente zu setzen, aus denen die Eigenschaften der Figuren gleichzeitig mit der Erzeugung derselben in der einfachsten Weise entspringen — mit andern Worten, dass sie durch ihr Verfahren den Organismus der Raumformen erkennen lässt. Daher die historische Stellung der darstellenden Geometrie am Anfang der neuesten Entwickelungs-Epoche der Geometrie; nach Lambert und Monge kommen Poncelet (1822), Möbius (1827), Steiner (1832), Chasles (1837), v. Staudt (1847) in stetiger Folge, indess vorher Desargues (1630) ganz vereinzelt erscheint. Insofern erweitert sie sich nach der geometrischen oder theoretischen Seite, ihr Studium wird zum ersten Hauptstück der höheren geometrischen Studien. Die Geometrie der Lage ist als die Fortsetzung und Erweiterung der darstellenden Geometrie anzusehen, bei welcher die systematische wissenschaftliche Entwickelung alleiniger Zweck ist, also die Rücksicht auf die Darstellbarkeit und die Darstellung wegfällt.

Methode. Zum Zwecke der graphischen Darstellung wird die Raumform auf die Bildebene bezogen und diese durch die Zeichnungsebene repräsentirt — allgemeiner Bildfläche und Zeichnungsfläche. Die Vereinigung der in der Bildebene vorhandenen Bestimmungselemente heisst das Bild oder die Projection der Raumform; die Methode der Beziehung, durch welche aus der Letzteren die Erste hervorgeht, heisst die Abbildungs- oder Projections-Methode.

Die nächste und natürlichste Quelle aller Abbildungsmethoden ist das mathematische Abstractum des Sehprozesses: von einem Centrum der Projection aus gehen nach allen Punkten des darzustellenden Objects gerade Linien — wir bezeichnen ihre Gesammtheit als das Bündel der projicierenden Strahlen oder als den Schein des Objects — deren Durchschnittspunkte mit der Bildebene die Bilder oder Projectionen dieser Punkte sind.

Von der gegenseitigen Lage im Moment der Abbildung abgesehen, also noch nach der Aufhebung derselben sind daher Original und Bild durch die beiden Gesetze verbunden: Jedem Punkte des Originals entspricht ein Punkt des Bildes und jeder geraden Linie des Originals entspricht eine gerade Linie im Bilde. Ist das Original sowie das Bild eine ebene Figur, so gelten beide Gesetze auch umgekehrt; man sagt: Original und Bild sind projectivisch oder stehen in der Verwandtschaft der Projectivität. Die specielle gegenseitige Lage, die beide im Momente der Abbildung haben, kann man immer als die perspectivische Lage derselben bezeichnen.

Die Theorie der ebenen Abbildung nach diesen Grundsätzen nennen wir die Lehre von der Centralprojection; sie enthält als einen Theil die Theorie der Perspective; als ein Specialfall geht aus ihr die Lehre von der orthogonalen oder schiefen Parallelprojection hervor.

Der Verfolg zeigt sodann, dass man auch den Raum d. i. die nicht ebenen Formen nach Anleitung derselben Gesetze der Projectivität von einem Centrum aus und für dasselbe abbilden, nämlich räumlich abbilden oder modellieren kann; daraus entspringen die in der Kunst wie die in der Technik verwendeten Modellierungs-Methoden.

Entwickelungsgang. Die Entwickelung hat nothwendig mit der Darstellung und Bestimmung der projicierenden Strahlen zu beginnen, als durch welche alles Andere dargestellt und bestimmt werden muss; sie hat sodann eben diese Verwendung auf allen Stufen durchzuführen. Die Objecte der Darstellung sind die geometrischen Gebilde, welche durch Reihung oder durch Bewegung aus den geometrischen Elementarformen: Gerade Linie, Punkt und Ebene erzeugt werden. Die Berücksichtigung des raumerfüllenden Inhaltes bleibt den Anwendungen überlassen — dem Architectur- und Maschinenzeichnen, dem topographischen Zeichnen etc. Für die Darstellung der Beleuchtungsverhältnisse und sonst zur Erhöhung der Bildlichkeit der Zeichnungen wird den geometrischen Flächen die Eigenschaft der Undurchsichtigkeit beigelegt.

Wir entwickeln zuerst an der Behandlung der geome-

trischen Elementarformen die Methoden der darstellenden Geometrie und schliessen daran ihre Anwendung auf das Studium und die Darstellung der zusammengesetzten Formen, d. i. der Polyeder, und insbesondere der Curven und der Flächen. Dadurch ermöglichen wir die Anwendung aller Methoden und die Wahl der für die specielle Absicht zweckgemässesten unter denselben in jedem Falle und sichern so ein tieferes und rascheres Eindringen.

# Erster Theil.

## Die Methodenlehre, entwickelt an der Untersuchung der geometrischen Elementarformen und ihrer einfachen Verbindungen.

### A. Die Centralprojection als Darstellungsmethode und nach ihren allgemeinen Gesetzen.

1. Das Centrum $C$ der Projection, der Scheitel oder Träger des Strahlenbündels der projicierenden Geraden wird auf die Bildebene, die zugleich Zeichnungsebene oder Tafel sein mag, durch die Normale von ihm auf sie bezogen; ihr Fusspunkt $C_1$ heisst der Hauptpunkt, ihre Länge $CC_1$ die Distanz $d$ und der mit dieser aus dem Hauptpunkt in der Bildebene beschriebene Kreis $D$ der Distanzkreis.

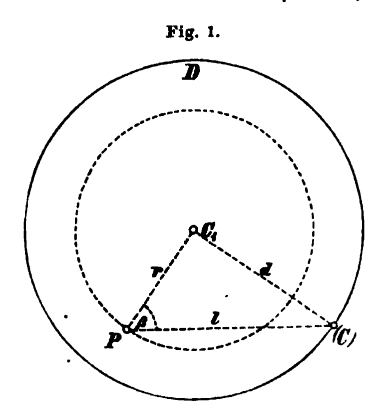
Diess vorausgesetzt bestimmt jeder Punkt $P$ der Bildebene den projicierenden Strahl $CP$, der nach ihm geht; alle die unendlich vielen Punkte, die in dem letzteren liegen, werden in jenem Punkte der Bildebene abgebildet, also dass kein Einzelner unter ihnen bestimmt wird. Hiervon machen nur zwei Punkte des projicierenden Strahls Ausnahme, nämlich der Durchstosspunkt $P$ des Strahls mit der Bildebene selbst, welcher mit seinem Bilde $P'$ zusammenfällt, und die Richtung des Strahles oder der unendlich ferne Punkt $Q$ desselben, der Punkt, den er mit allen anderen ihm parallelen Geraden gemein hat.

Betrachten wir an einem projicierenden Strahl seine Länge $l$ oder $CP$ vom Centrum bis zur Tafel und seine Tafelneigung oder den Neigungswinkel $\beta = \angle CPC_1$, den er mit der letztern bildet, so sind beide in dem bei $C_1$ rechtwinkligen Dreieck $CC_1P$ enthalten, welches die Distanz $CC_1$ und die

Linie $C_1 P$ vom Hauptpunkte nach dem Punkte $P$ der Bildebene zu Katheten hat. Es ist also für $C_1 P = r$ und $CP = l$

$$r \cdot tan\beta = d, \qquad l \sin\beta = d.$$

Fig. 1.




Alle projicierenden Strahlen, deren Durchstosspunkte für einerlei Hauptpunkt und Distanz in einem Kreise liegen, welcher den Hauptpunkt zum Mittelpunkt hat, haben gleiche Tafelneigung $\beta$ und gleiche Länge $l$ und umgekehrt. Wir nennen daher solche Kreise **Neigungskreise** und haben $\beta \gtrless 45^0$, je nachdem $r \lessgtr d$ ist; insbesondere $\beta = 90^0$ für $r = 0$ und $\beta = 0$ für $r = \infty$. Der Distanzkreis ist also der Neigungskreis für $45^0$, der Hauptpunkt der für $90^0$ und die unendlich ferne Linie der Bildebene entspricht der Neigung 0. Insofern die zur Tafel parallelen projicierenden Strahlen eine Ebene bilden, deren Schnittlinie mit der Tafel als eine Gerade angesehen werden kann, nennen wir diesen letztern Ort die unendlich ferne Gerade oder die Stellung der Bildebene.

1) Man bestimme $r$ aus $\beta$ und dem Distanzkreis $D$.

2) Construiere $l$ aus $D$ und $r$.

3) Construiere $\beta$ und $d$ aus $C_1$, $l$ und $r$.

2. Jede Gerade $p$ der Bildebene bestimmt alle die projicierenden Strahlen, die vom Centrum nach ihren Punkten gehen und damit die **projicierende Ebene**, die von ihm nach ihr selbst gelegt wird. Auf dieser projicierenden Ebene lassen sich unendlich viele das Centrum nicht enthaltende Gerade $g$ ziehen, deren Bilder $g'$ alle mit $p$ zusammen fallen, von denen die Gerade $p$ also im Allgemeinen keine bestimmt. Ausgenommen hiervon sind nur die **Spur** der projicierenden Ebene in der Tafel, d. i. $p$ selbst, welche mit ihrem Bilde $p'$ zusammenfällt und die unendlich ferne Gerade $q$ der projicierenden Ebene, oder die Stellung derselben, ihre Schnittlinie mit allen zu ihr parallelen Ebenen, die Linie der Richtungen aller in ihr enthaltenen Geraden.

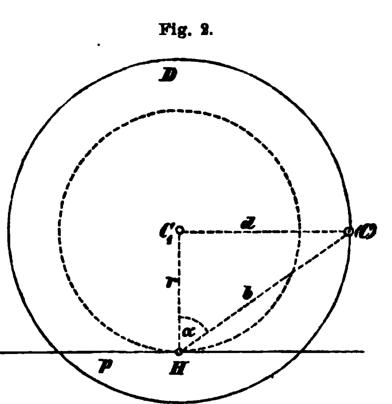
An einer projicierenden Ebene betrachten wir ihre **Breite** $b$ zwischen ihrer Spur und der durch das Centrum gehenden Parallelen derselben, d. i. den normalen Abstand ihrer Schnittlinie mit der Bildebene und der Parallelen zu ihr durch das Centrum und sodann ihre **Tafelneigung**, d. i. den spitzen Neigungswinkel $\alpha$, den sie mit der Bildebene macht. Fällen wir vom Hauptpunkte $C_1$ die Normale auf $p$, die sie in $H$ treffe, so ist im rechtwinkligen Dreieck $CC_1H$

$$\angle CHC_1 = \alpha$$

und $CH = b$; für $C_1H = r$ ist also

$$r \tan\alpha = d, \qquad b \sin\alpha = d.$$

Fig. 2.



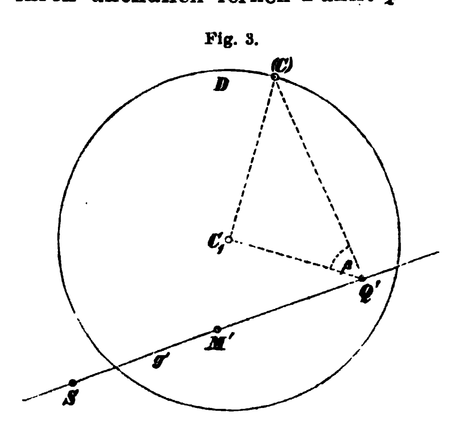

Alle projicierenden Ebenen, deren Spuren für einerlei Hauptpunkt und Distanz einen Kreis berühren, welcher den Hauptpunkt zum Mittelpunkt hat, haben gleiche Neigung $\alpha$ und gleiche Breite $b$ und umgekehrt. Solche Kreise sind gleichzeitig **Neigungskreise** für die projicierenden Linien nach ihren Punkten und für die projicierenden Ebenen nach ihren Tangenten. Die Spuren der zur Bildebene normalen projicierenden Ebenen gehen durch den Hauptpunkt. Die zur Tafel parallele projicierende Ebene, deren Spur die unendlich ferne Gerade der Bildebene ist, so dass die Bilder aller in ihr gelegenen Punkte und Linien unendlich fern sind, soll die **Verschwindungsebene oder die vordere (erste) Parallelebene** heissen.

Polygone oder Curven in der Bildebene bestimmen projicierende Pyramiden oder Kegel als die Vereinigungen der entsprechenden projicierenden Geraden und Ebenen.

1) Man construiere $b$ und $r$ aus $D$ und $\alpha$.
2) In der projicierenden Ebene $Cp$ bestimme man die projicierenden Geraden von der Länge $l$ oder der Neigung $\beta$.
3) Durch die projicierende Gerade $CP$ lege man die projicierenden Ebenen von der Neigung $\alpha \gtreqless \beta$; oder von der Breite $b \geqq l$.

3. Wir wenden uns zur Bestimmung von geraden Linien und Ebenen, die nicht durch das Centrum gehen. Jede Gerade $g$, die das Centrum $C$ nicht enthält, bestimmt mit diesem eine projicierende Ebene als den Inbegriff der projicierenden Strahlen ihrer Punkte oder den Ort des ihr entsprechenden projicierenden Strahlenbüschels (Schein der Geraden); die Spur dieser projicierenden Ebene in der Tafel ist das Bild $g'$ der Geraden. Unter allen geraden Linien in dieser projicierenden Ebene ist $g$ ausgezeichnet durch ihren Schnitt- oder Durchstoss-Punkt $S$ mit der Tafel — diesen theilt sie mit allen andern Strahlen eines durch $S$ gehenden Strahlenbüschels in der Ebene $Cg$ — und durch ihre Richtung oder ihren unendlich fernen Punkt $Q$ — diesen theilt sie mit allen Strahlen des Büschels der Parallelen zu $g$ in derselben projicierenden Ebene. Durch beide Bestimmungen ist die Gerade $g$ als Verbindungslinie von zwei Punkten oder als der gemeinsame Strahl von zwei Strahlenbüscheln bestimmt, und nach § 2. sind die Punkte $S$ und $Q$ ihrerseits durch ihre projicierenden Strahlen allein völlig bestimmt; d. h. die gerade Linie $g$ wird bestimmt durch den Durchstosspunkt $S$, den sie mit der Bildebene erzeugt, und durch den Durchstosspunkt des zu ihr parallelen projicierenden Strahls, d. i. das Bild $Q'$ ihres unendlich fernen Punktes $Q$ oder ihrer Richtung. Der letztere Punkt soll der Fluchtpunkt der Geraden heissen. Die gerade Verbindungslinie ihres Durchstosspunktes $S$ mit ihrem Fluchtpunkte $Q'$ ist das Bild $g'$ der Geraden $g$. Die Gerade selbst bestimmt sich aus $S$, $Q'$ und $D$ als die Parallele zu $CQ'$, welche durch $S$ geht. (Fig. 3. und 4.)

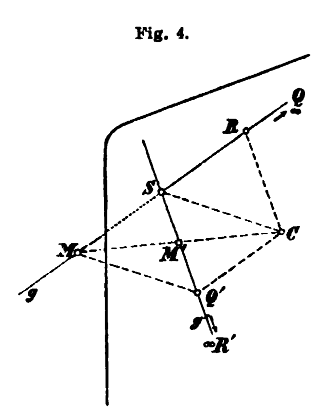
Fig. 3.




Die Gerade hat daher dieselbe Tafelneigung $\beta$, wie der projicierende Strahl ihrer Richtung $Q$; wenn wir den Durchschnittspunkt der Verschwindungsebene mit ihr durch $R$ be-

zeichnen, dessen Bild $R'$ die Richtung von $g'$ ist, so ist $SR \# Q'C$, d. h. die Strecke der Geraden $g$ zwischen Bildebene und Verschwindungsebene ist gleich lang mit der Strecke des ihr parallelen projicierenden Strahls von der Bildebene bis zum Centrum. Macht man in der Geraden $g$ die Strecke $SM$ gleich und entgegengesetzt $SR$, so ist $MS \# Q'C$, d. h. $M$ liegt auf der Geraden $g$ ebensoweit hinter der Bildebene wie $R$ oder $C$ vor derselben und das Bild $M'$ dieses Punktes ist die Mitte der Strecke zwischen $S$ und $Q'$; denn die Diagonalen eines Parallelogramms halbieren einander. Die Punkte $M$ auf allen denkbaren Geraden erfüllen die zweite oder hintere Parallelebene, eine der Bildebene parallele Ebene in der Entfernung $d$ auf der dem Centrum entgegengesetzten Seite.

Fig. 4.




1) Parallele Gerade haben denselben Fluchtpunkt für das nämliche $D$; alle Normalen zur Tafel haben ihren Fluchtpunkt im Hauptpunkt $C_1$.
2) Demselben Fluchtpunkt und Durchstosspunkt entsprechen bei Unbestimmtheit des Centrums alle Strahlen eines Bündels; wann nur die eines Strahlenbüschels?
3) Alle Geraden von derselben Länge $l$ zwischen Bild- und Verschwindungsebene haben für dasselbe $D$ gleiche Tafelneigung $\beta$ und ihre Fluchtpunkte liegen in einem Neigungskreis.
4) Bei gegebenem $D$ bestimme man $l$ und $\beta$ aus $S$ und $Q'$.
5) Bei gegebenem $D$ bestimme man aus $g'$, $S$ in demselben und $\beta$ den Fluchtpunkt $Q'$.
6) Bei gegebenem $D$ construiere aus $g'$, $l$ und $S$ oder $Q'$ in $g'$ — $Q'$ oder $S$ und $\beta$.
7) Man bestimme bei gegebenem $D$ unter den projicierenden Linien der Punkte von $g$ oder $SQ'$ diejenige von der grössten Tafelneigung und die, welche eine gegebene Tafelneigung $\beta$ haben.
8) Alle Geraden, für welche bei gegebenem $D$ die

Strecke $SQ'$ gleiche Länge $n$ hat, schneiden die Verschwindungsebene in Punkten $R$ auf einem aus $C$ mit $n$ als Halbmesser beschriebenen Kreise.

9) Man characterisiere nach ihrer Lage alle Geraden vom gegebenen Schnittpunkt $M$ mit der zweiten Parallelebene und gegebener Bildlänge $SQ'$ bei gegebenem $D$ und construiere ihre Bilder.

10) Bei gegebenem $D$ construiere man alle Geraden von gegebenem $S$ für gegebenes $l$; und unter ihnen die für gegebenes $n$.

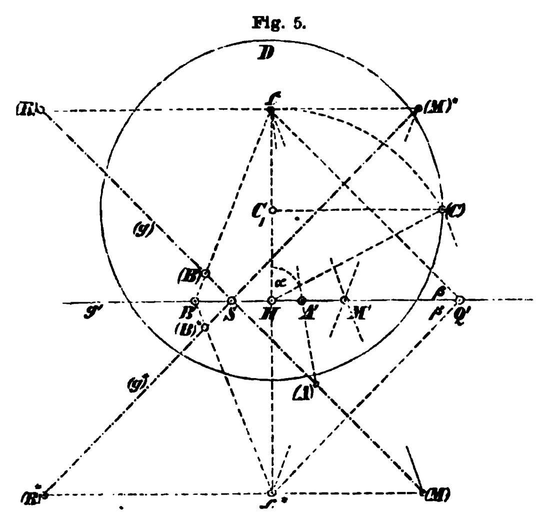
11) Man bestimme eine Gerade bei gegebenem $D$ aus ihrem Bilde $g'$ und den Längen $l$ und $n$.

4. Bei einer vollen Umdrehung des projicierenden Strahles in der projicierenden Ebene $Cg$ werden alle Punkte von $g$ projiciert und umgekehrt zu allen Punkten des Bildes $g'$ die entsprechenden Punkte des Originals $g$ bestimmt. Wir lassen ihn von $S$ über $M$ nach $Q$ und in demselben Drehungssinne weiter gehen und bemerken die vier Hauptlagen $CR$, $CS$, $CM$, $CQ$. Dann entsprechen den in demselben Sinne auf einander folgenden Strecken des Originals $g$ : $SM$, $MQ$ oder $M\infty$, $QR$ oder $\infty R$, $RS$ Punkt für Punkt die Strecken $S'M'$ oder $SM'$, $M'Q'$, $Q'R'$ oder $Q'\infty'$ und $\infty' S$ des Bildes $g'$. Jenen Strecken des Originals, welche durch die Bildebene, die zweite Parallelebene, das Unendliche — die unendlich ferne Ebene — und die Verschwindungsebene von einander getrennt werden, entsprechen die Strecken des Bildes, welche der Durchstosspunkt, die Bildmitte, der Fluchtpunkt und der unendlich ferne Punkt desselben von einander scheiden. Ein Punkt des Originals und der entsprechende Punkt des Bildes liegen in entsprechenden Strecken; aus der Lage des einen kann auf die des andern geschlossen werden.

Man erlangt die wirkliche Bestimmung dieser Abhängigkeit durch die Umlegung der Geraden $g$ mit ihrer projicierenden Ebene $Cg$ in die Bildebene. Sind der Distanzkreis $D$ und die Gerade $g$ durch $S$ und $Q'$ also $g'$ (Fig. 5.) gegeben, so bestimmt man zuerst die Lage $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{C}^*$ des mit der projicierenden Ebene $Cg$ in die Bildebene umgelegten Centrums $C$, indem man auf das Perpendikel $C_1H$, welches vom Hauptpunkt auf die Gerade $g'$ gefällt ist, von $H$ aus die

Breite $b$ der projicierenden Ebene $Cg$ abträgt (§ 3.). Die Umlegungen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$ entsprechen den Drehungen der projicierenden Ebene um die Winkel $\alpha$ und $(180^0-\alpha)$ respective. Dann ist $\mathfrak{C}Q'$ $(\mathfrak{C}^*Q')$ der zur Geraden $g$ parallele projicierende Strahl in der Umlegung — zugleich die Länge $l$ der Geraden $g$ — und diese selbst $(g)$, respective $(g)^*$ geht durch $S$ parallel $\mathfrak{C}Q'$ respective

Fig. 5.



$\mathfrak{C}^*Q'$. Die von $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}^*)$ nach $M'$ und parallel zu $g'$ gehenden Strahlen bestimmen die Punkte $(M)$ und $(R)$ der Umlegung.

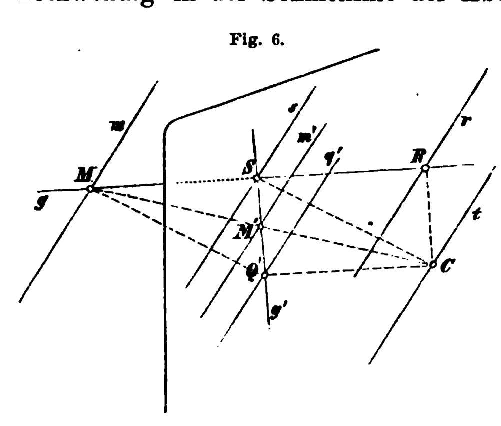
Die wahren Längen der in $A'B'$ projicierten Strecke und die Projectionen der in $(A)$, $(B)$ gelegenen Punkte ergeben sich daraus.

1) Bei gegebenem $D$, $S$ und $Q'$ bestimme man die Projectionen der Endpunkte der von $S$ aus in $g$ abgetragenen $k$ fachen Distanz.
2) Aus denselben Daten bestimme man die wahre Länge der in $A'B'$ projicierten Strecke von $g$.
3) Man theile ebenso die Strecke $A'B'$ von $g$ in $k$ gleiche Theile.
4) Man projiciere ebenso eine der Distanz gleiche Strecke in der Geraden $g$, welche den Verschwindungspunkt $R$ zum Mittelpunkt hat.
5) Man löse Aufgabe 11. in § 3. durch Umlegung und erläutere die gegenseitige Lage der entsprechenden Geraden.

6) Man bestimme den normalen Abstand der Geraden $SQ'$ vom Centrum bei gegebenem $D$.

5. Eine das Centrum $C$ nicht enthaltende Ebene E enthält unendlich viele Gerade $g_i$, von denen keine durch das Centrum geht; die Durchstosspunkte $S_i$ derselben liegen nothwendig in der Schnittlinie der Ebene mit der Bildebene oder in ihrer Spur $s$; die Fluchtpunkte $Q_i'$ derselben liegen in der Schnittlinie der zur Ebene E parallelen projicierenden Ebene $qt$ mit der Bildebene, die wir die Fluchtlinie $q'$ der Ebene E nennen wollen und die also zur Spur $s$ parallel geht. Eine Ebene wird durch ihre Spur $s$ und ihre Fluchtlinie $q'$ bestimmt (§ 3.). Man erhält sie aus diesen, indem man durch die Spur $s$ eine Parallelebene zur projicierenden Ebene $Cq'$ der Fluchtlinie legt. Darnach hat die Ebene E dieselbe Tafelneigung $\alpha$ und dieselbe Breite zwischen Bildebene und Verschwindungsebene wie diese Ebene $Cq'$. (Fig. 6.)

Fig. 6.




Die Punkte $R_i$ aller in der Ebene gelegenen Geraden $g_i$ liegen in der zur Spur $s$ parallelen Geraden $r$, in welcher die Ebene die Verschwindungsebene schneidet; der Abstand derselben vom Centrum $C$ oder der Geraden $t$ ist ebenso gross als die Breite des Parallelstreifens zwischen Spur und Fluchtlinie oder ist die Bildbreite der Ebene (§ 7.). Die zweite Parallelebene schneidet die Ebene E in einer zur Spur parallelen Geraden $m$, welche die Punkte $M$ aller Geraden der Ebene enthält; $r$ und $m$ sind zwei zu $s$ parallele und davon gleich entfernte Gerade.

1) Ebenen von derselben Stellung haben bei gegebenem $D$ dieselbe Fluchtlinie.
2) Ebenen von gleicher Breite zwischen Bild- und Verschwindungsebene haben bei gegebenem $D$ dieselbe

Tafelneigung $\alpha$ und ihre Fluchtlinien berühren somit denselben Neigungskreis.

3) Die Geraden $r$ in der Verschwindungsebene für alle die Ebenen, welche bei gegebenem $D$ dieselbe Breite des Parallelstreifens $s\ q'$ besitzen, berühren einen aus $C$ mit dieser Grösse als Radius beschriebenen Kreis.

4) Ebenen von parallelen Spuren und gleicher Breite zwischen $s$ und $q'$ haben für gegebenes $D$ dasselbe $r$, wenn für beide $s$ und $q'$ in gleichem Sinne einander folgen. Wie liegen ihre $r$ bei entgegengesetztem Sinn dieser Folge?

5) Wodurch sind Ebenen characterisiert, die dasselbe $m$ haben?

6) Wie insbesondere die mit einerlei $m$ und gleicher Tafelneigung $\alpha$?

7) Ist eine Ebene durch Spur und Tafelneigung oder Spur und Bildbreite $s\ q'$ bei gegebenem $D$ bestimmt?

8) Der normale Abstand der Ebene vom Centrum ist die dem Winkel $\alpha$ derselben gegenüberliegende Kathete in einem rechtwinkligen Dreieck, welches die Breite ihres Bildes zur Hypothenuse hat.

9) Wie bestimmt man eine Ebene durch ihre Fluchtlinie $q'$ und ihren Abstand $e$ vom Centrum und wie aus der Spur $s$ und demselben Abstand bei gegebenem $D$? Man erkläre die Figur 7, welche die erste Aufgabe löst.

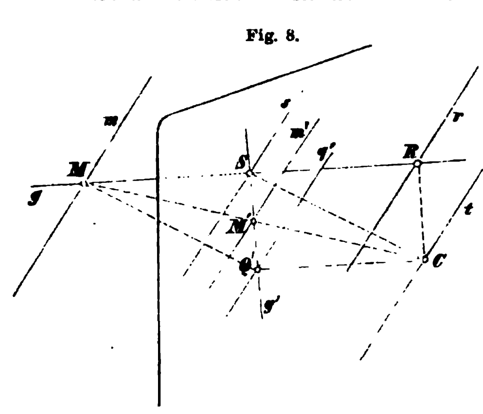
Fig. 7.

10) Derselben Fluchtlinie und Spur entsprechen bei Unbestimmtheit des Centrums alle Ebenen eines Büschels.

6. Das Bild der unbegrenzten Ebene E bedeckt die ganze Bildebene; jede Gerade $g'$ in der Letztern bildet eine Gerade $g$ der Ebene E ab, deren Durchstosspunkt $S$ in der Spur $s$

und deren Fluchtpunkt $Q'$ in der Fluchtlinie $q'$ der Ebene liegt. Jeder Punkt $A'$ der Bildebene ist Bild eines Punktes $A$ der Ebene E, der der Schnitt des projicierenden Strahles $CA'$ mit dieser Ebene ist und der in allen den Geraden der Ebene gelegen ist, deren Bilder durch sein Bild $A'$ gezogen werden können; alle diese Geraden bilden ein Strahlenbüschel vom Scheitel $A$ und der Ebene E, ihre projicierenden Ebenen bilden ein Ebenenbüshel von der Scheitelkante $CA$ und ihre Bilder d. i. die Spuren der Ebenen dieses letzteren Büschels ein Strahlenbüschel in der Bildebene vom Scheitel $A'$.

Fig. 8.



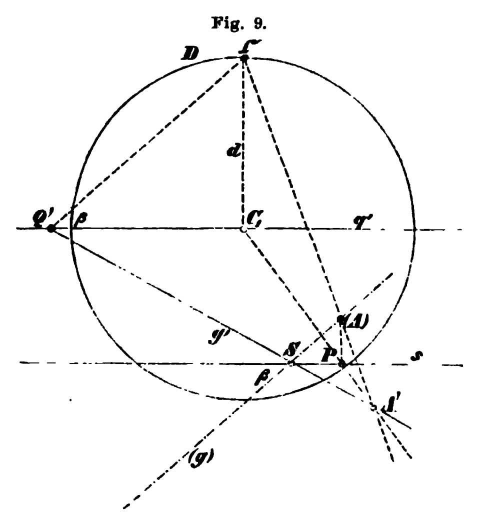
Durch die geraden Linien $r$, $s$, $m$ (Fig. 8.) und die unendlich ferne Gerade $q$ der Ebene E wird dieselbe in vier Regionen getheilt, $rs$, $sm$, $mq$ oder $m\,\infty$ und $qr$ oder $\infty\, r$, wie sie im Sinne von der Bildebene nach der Verschwindungsebene einander folgen; denselben entsprechen die Regionen der Bildebene, welche die Linien $r'$ oder $\infty'$, $s$, $m'$ und $q'$ begrenzen, also $\infty' s$, $s\, m'$, $m' q'$ und $q'\infty'$. Dieses erlaubt, die Schlüsse des § 5. von einer in der Ebene gelegenen Geraden $g$ auf diese Ebene selbst zu übertragen, weil jede zur Tafel parallele Gerade in der Ebene ein zu $s$ und $q'$ paralleles Bild hat. Die directe Bestimmung dieser Abhängigkeit liefert die Umlegung der Ebene in die Tafel (§ 11.).

1) Man verzeichne die Strahlen eines Büschels in der Ebene $sq'$, dessen Scheitel zwischen $s$ und $r$ liegt.
2) Gerade Linien in einer Ebene, deren Bilder einander parallel sind, bilden ein Strahlenbüschel, dessen Scheitel ein Punkt der Geraden $r$ ist.
3) Man ziehe auf der Ebene $sq'$ bei gegebenem $D$ durch den Punkt vom Bilde $A'$ die Geraden von der Tafelneigung $\beta$ und durch den Punkt vom Bilde $B'$ in derselben Ebene die zu ihnen parallelen.

4) Man lege bei gegebenem $D$ durch eine bestimmte Gerade $SQ'$. die Ebenen von vorgeschriebener Tafelneigung $\alpha$, insbesondere die Ebene von der kleinsten Tafelneigung.
5) Für Gerade, welche sich schneiden, d. i. in derselben Ebene liegen, ist die Verbindungslinie ihrer Durchstosspunkte zu derjenigen ihrer Fluchtpunkte parallel.
6) Durch Punkte $A_1, A_2, \cdots$, welche auf Geraden $S_1Q_1', S_2Q_2', \cdots$ respective liegen und durch ihre Bilder $A_1', A_2', \cdots$ in ihnen bestimmt sind, lege man die parallelen Geraden vom Fluchtpunkt $Q'$ oder insbesondere die Normalen zur Tafel.

7. Durch jede gerade Linie $g$ oder $SQ'$, die nicht selbst normal zur Tafel ist, geht eine zur Tafel normale Ebene, die Ebene aller der Perpendikel die von den Punkten der Geraden auf die Bildebene gefällt werden; man erhält ihre Fluchtlinie $q'$ somit (Fig. 9.) durch Verbindung des Fluchtpunktes $Q'$ mit dem Hauptpunkte $C_1$ und ihre Spur $s$ als die Parallele dazu durch $S$. Bestimmt man dann die Tafelneigung $\beta$ der Geraden mit Hilfe der Distanz $d$ und trägt sie in $S$ an $s$ an, so erhält

Fig. 9.




man in dem neuen Schenkel die Lage $(g)$ der Geraden, welche sie annimmt, wenn man die durch sie gelegte Normalebene zur Tafel mittelst Drehung um ihre Spur $s$ in diese überführt; und es ist $(g)$ parallel zu $\mathfrak{C}Q'$. Ist dann $A'$ das Bild eines beliebigen Punktes der Geraden, so ist $C_1A'$ die durch denselben gehende Normale zur Tafel und $P$ ihr Durchstosspunkt; trägt man in $P$ einen rechten Winkel an $s$ an, so erhält man in $(g)$ die Lage des Punktes $(A)$ und in $P(A)$ die normale Entfernung desselben von der Bildebene

oder die Länge der entsprechenden Tafelnormale oder Tafelordinate $y$. Weil

$$\varDelta\,(A)PS \sim \varDelta\,\mathfrak{C}C_1Q' \text{ und } \varDelta\,SPA' \sim \varDelta\,Q'C_1A', \text{ so folgt}$$

$$(A)P : \mathfrak{C}C_1 = y : d = PS : C_1Q' = SA' : Q'A';$$

d. h. die Tafelordinate eines Punktes verhält sich zur Distanz wie der Abstand vom Durchstosspunkt einer ihn enthaltenden Geraden bis zu seinem Bilde zu dem Abstand vom Fluchtpunkt derselben bis zu seinem Bilde. Und überdiess, wenn $y$ und $d$ von der Bildebene aus in demselben Sinne gezählt sind, d. h. wenn der betrachtete Punkt mit dem Centrum auf derselben Seite der Bildebene liegt, so verlaufen auch $SA'$ und $Q'A'$ in demselben Sinne, d. h. $A'$ theilt die Strecke $SQ'$ als ein äusserer Theilpunkt in dem Verhältniss $y : d$; wenn dagegen $y$ und $d$ von der Bildebene aus in entgegengesetztem Sinne gehen, oder wenn der betrachtete Punkt auf der dem Centrum entgegengesetzten Seite der Bildebene liegt, so verlaufen $SA'$ und $Q'A'$ in entgegengesetztem Sinne, und $A'$ theilt die Strecke $SQ'$ als ein innerer Theilpunkt nach dem Verhältniss $y : d$. (Vergl. § 4.). Legen wir dem Theilverhältniss des Punktes $A'$ in der Strecke $SQ'$ das Vorzeichen bei, welches ihm als Quotienten zweier im gleichen oder im entgegengesetzten Sinne gezählter Strecken zukommt, also dem des äussern Theilpunktes das positive, dem des innern das negative Zeichen, so entspricht diess der Auffassung der Tafelordinaten als im einen und im andern Sinne gezählt, als positiv oder negativ, oder umgekehrt — wir wollen das Erste festsetzen — je nachdem sie zu Punkten auf der Seite des Centrums oder auf der entgegengesetzten Seite der Bildebene gehören.

1) Man erläutere Aufgabe 5. des vorigen § von dem entwickelten Gesetze aus.
2) Man construiere bei gegebenem $D$ die Bilder der Punkte einer gegebenen Geraden $SQ'$ aus den gegebenen Tafelordinaten $y_i$ derselben; ebenso die zur Tafel parallelen Geraden, in welchen die Punkte einer gegebenen Ebene von vorgeschriebenem Tafelabstand liegen.

3) Man erläutere die unendlich ferne Lage der Bilder der in der Verschwindungsebene gelegenen Punkte mittelst desselben Gesetzes. (Theilverhältniss + 1).

4) Man verzeichne die Bilder von Punkten, welche durch die Fusspunkte, die Längen und den Sinn ihrer Tafelordinaten bestimmt sind.

5) Man ziehe durch den Punkt von der Tafelordinate $y$ in der Geraden $SQ'$ eine Gerade von gegebenem Durchstoss- oder Fluchtpunkt.

6) Man zeige, dass in der Figur dieses § die Punkte $\mathfrak{C}$, $A'$ und $(A)$ in einer geraden Linie liegen müssen und gebe die Lage an, in welche die Gerade $r$ der Normalebene in der Umlegung gelangt. (Vergl. § 9.).

8. Nur scheinbar unzugänglich den vorigen Bestimmungsweisen sind die Geraden und Ebenen, welche der Bildebene parallel liegen, weil ihre Durchstoss- und Fluchtpunkte, Spuren und Fluchtlinien unendlich entfernt liegen. Denn eine zur Bildebene parallele Gerade ist durch ihr Bild und einen in ihr gelegenen Punkt oder eine durch sie gehende Ebene bestimmt; diese beiden Bestimmungsarten kommen überdiess auf einander zurück. Eine zur Bildebene parallele Ebene ist durch einen ihrer Punkte und ein solcher durch eine ihn enthaltende Gerade bestimmt, welche die Bildebene schneidet. Endlich sind insbesondere die Punkte $R$ und Geraden $r$ der Verschwindungsebene als Punkte bekannter Geraden und als Linien in bekannten Ebenen schon bestimmt worden; die Angabe ihrer Lage in der Verschwindungsebene gegen das Centrum genügt, um solche sie enthaltende Gerade, respective Ebenen zu verzeichnen. Damit schliessen sich dann auch diese speciellen Fälle der Verwendung in den jetzt lösbaren Aufgaben über die gegenseitige Lage von Punkten, Ebenen und Geraden an.

1) Man ziehe und bestimme die gerade Linie $SQ'$ zwischen zwei Punkten $A$ und $B$, die durch ihre Bilder $A'$, $B'$ in den Geraden $S_1Q_1'$, $S_2Q_2'$ gegeben sind; speciell die Parallele durch $A$ auf $S_1Q_1'$ zu $S_2Q_2'$.

2) Durch zwei auf verschiedenen Geraden gegebene Punkte ziehe man die geraden Linien, welche mit

einer dritten gegebenen Geraden sich in der Verschwindungsebene schneiden.

3) Man bestimme die Spur und Fluchtlinie der Ebene durch drei Punkte $A$, $B$, $C$, welche durch ihre Bilder auf den Geraden $S_1Q_1'$, $S_2Q_2'$, $S_3Q_3'$ gegeben sind.

4) Man verzeichne die durch zwei Punkte parallel einer geraden Linie und die durch einen Punkt parallel zu zwei geraden Linien gehende Ebene; oder die Ebene durch eine Gerade parallel einer andern Geraden und die durch einen Punkt parallel einer gegebenen Ebene.

5) Man construiere die Schnittlinie von zwei Ebenen und den Schnittpunkt von drei Ebenen; insbesondere die Schnittlinie von zwei Ebenen mit parallelen Spuren.

6) Man bestimme den Schnittpunkt von zwei geraden Linien $S_1Q_1'$, $S_2Q_2'$ mit sich deckenden Bildern.

7) Man bestimme den Durchschnittspunkt einer Geraden $SQ'$ mit einer Ebene $sq'$.

8) Man construiere die durch den Punkt $A'$ auf $S_1Q_1'$ gehende Gerade $SQ'$, welche zwei andere gegebene Gerade $S_2Q_2'$, $S_3Q_3'$ schneidet, die nicht in einer Ebene liegen; insbesondere die Transversale von zwei Geraden in vorgeschriebener Richtung.

9) Man ziehe die möglichen parallelen Geraden durch gegebene Punkte in zwei gegebenen nicht parallelen Ebenen.

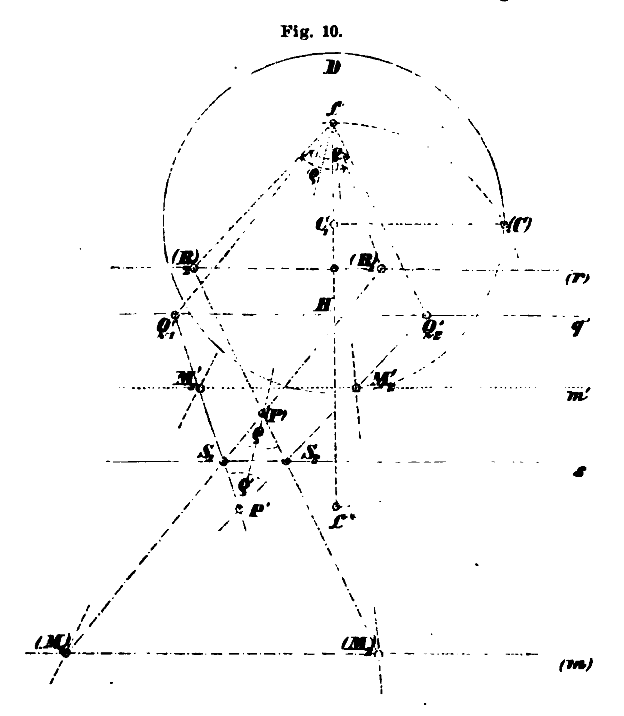
Die speciellen Lagen von Punkten und Geraden in der Verschwindungsebene oder von Geraden und Ebenen parallel zur Tafel sind hier überall einzuführen.

9. Wenn $S_1Q_1'$ und $S_2Q_2'$ in Fig. 10. zwei gerade Linien sind, die sich im Punkte $P$ vom Bilde $P'$ schneiden und also $sq'$ ihre Ebene ist, so ist der von ihnen gebildete Winkel bei $P$ dem Winkel der ihnen respective parallelen projicierenden Strahlen $CQ_1'$, $CQ_2'$ am Centrum $C$ gleich. Dieser aber kann bei gegebenem $D$ durch die Umlegung der projicierenden Ebene $Cq'$ in wahrer Grösse gefunden werden; nach § 4. ist $\mathfrak{C}$ das umgelegte Centrum und damit $Q_1'\mathfrak{C}Q_2'$ der gesuchte

Winkel. Die zweite Lage des umgelegten Centrums $\mathfrak{C}^*$ giebt den nämlichen Winkel.

Wir bemerken sodann, dass die Winkel der parallelen Projicierenden $\mathfrak{C}Q_1'$, $\mathfrak{C}Q_2'$ mit der Fluchtlinie $q'$ den Winkeln der Geraden $g_1$, $g_2$ selbst mit der Spur $s$ gleich sind und dass die Punkte $S_1$, $S_2$ bei der Umlegung der Ebene in die Tafel an ihrem Orte bleiben und schliessen, dass die Parallelen zu $\mathfrak{C}Q_1'$ aus $S_1$, und zu $\mathfrak{C}Q_2'$ aus $S_2$ respective die mit

Fig. 10.



der Ebene $sq'$ in die Tafel umgelegten Geraden $g_1$ und $g_2$ d. i. $(g_1)$ und $(g_2)$ sind und dass ihr Schnittpunkt $(P)$ die Umlegung des Punktes $P$ repräsentiert. Denken wir endlich unter den Geraden der Ebene $sq'$, welche durch $P$ gehen, diejenige, deren Bild das umgelegte Centrum $\mathfrak{C}$ enthält, so folgt aus der Lage ihres Durchstoss- und Fluchtpunktes, dass ihre Umlegung mit ihr selbst zusammenfällt und dass somit die Punkte $P'$ und $(P)$ immer in einer geraden Linie aus dem umgelegten Centrum $\mathfrak{C}$ liegen müssen.

Zieht man weiter durch das umgelegte Centrum 𝔈 Parallelen zu den Projectionen $g_1'$, $g_2'$ respective bis zum Durchschnitt mit den Umlegungen $(g_1)$, $(g_2)$, so erhält man in $(R_1)$, $(R_2)$ die Umlegungen der Punkte dieser Geraden in der Verschwindungsebene (Fig. 4, 5. § 3., 4.), welche in der zu $s$ parallelen Geraden $r$ der Ebene $g_1 g_2$ d. i. in ihrer Umlegung liegen müssen.

Da die Entfernung von 𝔈 bis $r$ dem Abstand der Parallelen $q'$ und $s$ gleich ist, so ist $(r)$ bestimmt, wenn das umgelegte Centrum 𝔈 bestimmt ist.

Auf der andern Seite von $s$ ebensoweit entfernt davon wie $(r)$ liegt $(m)$, die Umlegung der Schnittlinie der Ebene mit der hinteren Parallelebene.

1) Der Winkel von zwei Geraden, die nicht in einer Ebene liegen, wird durch ihre projicierenden Parallelstrahlen ebenso bestimmt wie der ebene Winkel.
2) Welchen Winkel bildet eine beliebig gegebene Gerade mit der Normale zur Bildebene? Welchen mit einer beliebigen Geraden in der Bildebene?
3) Man verzeichne in der Ebene $sq'$ um einen gegebenen Punkt derselben als Mittelpunkt einen Rhombus, von welchem zwei Gegenseiten die Tafelneigung $30^0$ haben und theile die ganze Ebene von ihm aus in gleiche Rhomben — mit oder ohne Bestimmung der wahren Gestalt derselben.

10. Die Bestimmung der Winkel zwischen geraden Linien und Ebenen, sowie derjenigen zwischen je zwei Ebenen wird nach bekannten Definitionen auf die der Winkel zwischen Linien zurückgeführt. Dieselben fordern die Construction der Normalen zu einer Ebene oder die der Normalebenen zu einer Geraden. Da alle Normalen derselben Ebene von gleicher Richtung und alle Normalebenen derselben Geraden von gleicher Stellung sind, so kommt diese Construction auf die Kenntniss der Beziehung zurück, welche zwischen dem Durchstosspunkt $Q'$ einer projicierenden Geraden $CQ'$ und der Spur $q'$ der zu ihr normalen projicierenden Ebene $Cq'$ stattfindet. Diese besteht aber darin, dass die zu $q'$ normale projicierende Ebene, welche auch $CQ'$ enthält, mit dieser, der Bildebene und der projicierenden Ebene

$Cq'$ ein bei $C$ rechtwinkliges Dreieck $CQ'H$ (Fig. 11.) erzeugt, in welchem die zur Hypotenuse $Q'H$ gehörige Höhe die Distanz $d$ ist, indess die spitzen Winkel bei $H$ und $Q'$ die Tafelneigungen $\alpha$ und $\beta$ der projicierenden Ebene und Geraden und die Abschnitte der Hypotenuse $C_1Q'$, $C_1H$ die Abstände der $Q'$ und $q'$ vom Hauptpunkt sind. Man hat also

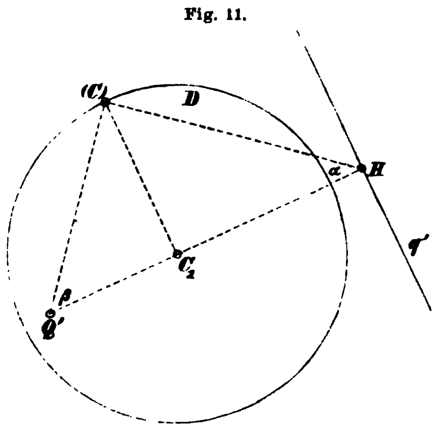


Fig. 11.

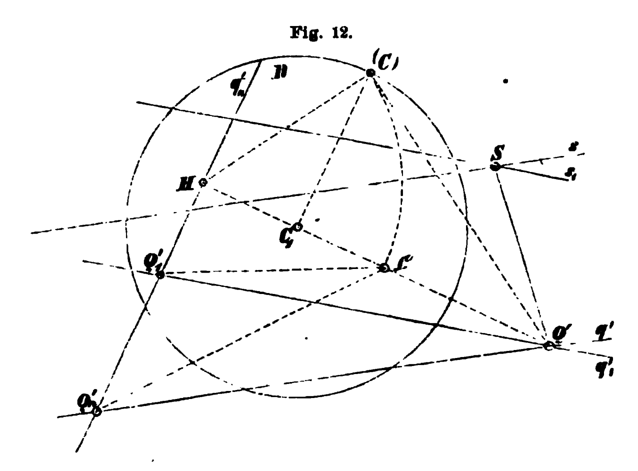
$$C_1H : d = d : C_1Q'.$$

Die nämliche Relation besteht zwischen dem Fluchtpunkt einer geraden Linie oder einer Schaar von Parallelen und der Fluchtlinie aller zu ihr oder ihnen normalen Ebenen oder zwischen der Fluchtlinie einer Ebene oder einer Schaar von parallelen Ebenen und dem Fluchtpunkt der dazu normalen Geraden.

1) Man construiere bei gegebenem $D$ — der Distanzkreis wird auch für alle folgenden Aufgaben dieses § als gegeben gedacht — die Normale $SQ'$ einer Ebene $sq'$, die von dem Punkte $A'$ in der geraden Linie $S_1Q_1'$ ausgeht; speciell ihren Fusspunkt $B$ in der Ebene und die wahre Länge $AB$. Die Normalebene der Ebene $sq'$ durch $S_1Q_1'$ dient am besten.
2) Man construiere die Normalebene $sq'$ der Geraden $SQ'$ durch den Punkt $A'$ in der Geraden $S_1Q_1'$ und das Perpendikel von diesem Punkte auf jene Gerade — mittelst ihres Fusspunktes in der Normalebene.
3) Man bestimme die wahre Grösse des Winkels der geraden Linie $SQ'$ mit der Ebene $sq'$ nach beiden geometrischen Definitionen. Welche giebt die bessere Construction?
4) Man lege durch eine gegebene Parallel-Linie zur Tafel die Normalebene zu einer gegebenen Ebene.

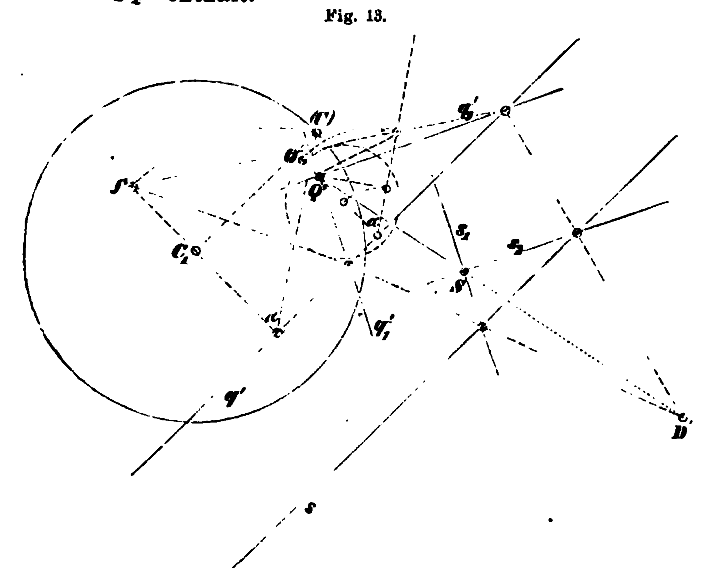
5) Man bestimme die wahre Grösse der Winkel, welche die Ebenen $s_1 q_1'$, $s_2 q_2'$ mit einander einschliessen und die Halbierungsebenen dieser Winkel.

Fig. 12.



6) Eine Ebene zu construieren, welche zur Ebene $sq'$ normal ist, die Tafelneigung $\alpha = 40^0$ hat und den Verschwindungspunkt $R$ einer gegebenen Geraden $SQ'$ enthält.

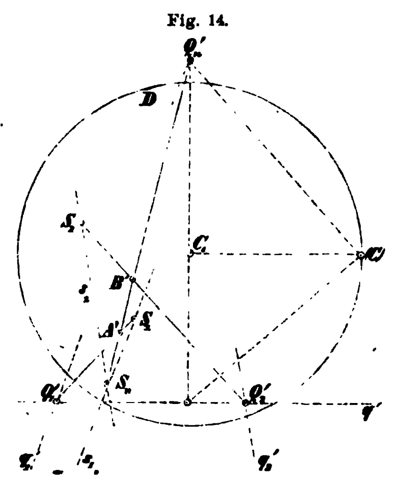
Fig. 13.



7) Man lege durch die in der Ebene $sq'$ enthaltene Gerade $SQ'$ die beiden Ebenen, welche mit jener den Winkel von 25° bilden. Man erkläre die in Figur 12. enthaltene Lösung und füge die zweite hinzu.

8) Man soll diejenigen durch eine Gerade $SQ'$ gehenden Ebenen bestimmen, welche mit einer dieselbe schneidenden Ebene $sq'$ Winkel $\alpha = 54^0$ einschliessen — indem man mit den Fluchtelementen construiert. Die Figur 13. enthält die Lösung, sie ist zu erläutern.

Fig. 14.



9) Man projiciere und bestimme die kürzeste Entfernung $AB$ von zwei nicht in einerlei Ebene gelegenen Geraden $S_1Q_1'$, $S_2Q_2'$ — als Durchschnittslinie $SQ'$ der die beiden Geraden enthaltenden Normalebenen $s_1q_1'$, $s_2q_2'$ zu der projicierenden Ebene $CQ_1'Q_2'$, die zu beiden parallel ist; was bleibt der Figur 14. hinzu zu fügen?

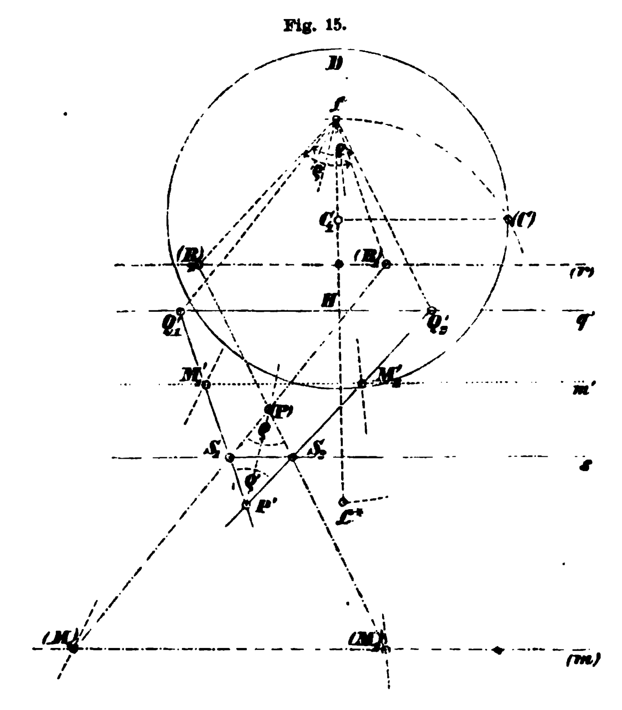
Dasselbe insbesondere für zwei Gerade, von denen die eine parallel, die andere normal zur Tafel ist.

10) Wenn drei projicierende Linien oder Ebenen eine trirectanguläre Ecke bilden, so sind ihre Spuren in der Bildebene die Ecken oder Seiten eines Dreiecks, welches den Hauptpunkt zum Höhen-

schnittpunkt hat und das Rechteck der Höhenabschnitte gleich dem Quadrate der Distanz.

11. Im Vorhergehenden ist offenbar zugleich die Umlegung einer Ebene in die Bildebene d. i. die Darstellung der wahren Grösse und Gestalt ebener Figuren und Systeme aus ihren Projectionen enthalten. Denn jede gerade Linie der Ebene $sq'$ wird so umgelegt wie $g_1$ in $(g_1)$ (§ 9.)

Fig. 15.

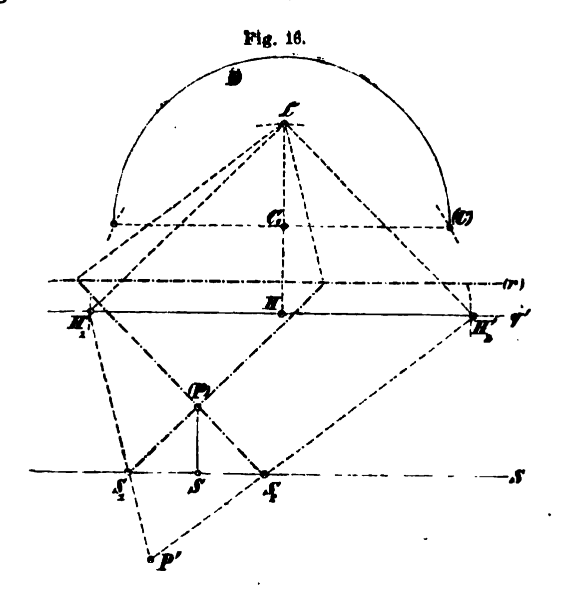


und jeder Punkt derselben somit als der Durchschnitt von zwei Geraden in der Ebene sowie $P$ durch $g_1$ und $g_2$ (Fig. 15.). Sind diese Geraden nicht gegeben, so kann man als eine solche die Falllinie der Ebene $sq'$ d. i. die in $HP'$ projicierte Gerade benutzen, welche zur Spur $s$ rechtwinklig ist und sich daher in der Umlegung in eine Normale zu derselben aus ihrem Durchstosspunkt $S$ verwandelt; ebenso können die Geraden benutzt werden, welche in $H_1'P'$, $H_2'P'$ projiciert sind, wo $HH_1' = HC = HH_2'$ ist (Fig. 16.), Gerade, die sich in der Umlegung in solche verwandeln, die unter $45^0$ gegen die Spur geneigt

von ihren respectiven Durchstosspunkten $S_1$, $S_2$ ausgehen und sich daher in $(P)$ rechtwinklig durchschneiden, indess auch $S(P) = SS_1 = SS_2$ ist. Hat man die Linie $(r)$ der Ebene, so liefern die Parallelen aus $C$ zu den Projectionen $g_i'$ auf ihr die $(R_i)$ derselben und die Verbindung mit dem entsprechenden $S_i$ giebt die umgelegte Gerade $(g_i)$. Endlich dient auch der Strahl $\mathfrak{C}P'$ zur Bestimmung von $(P)$.

Umgekehrt vollzieht man durch die nämliche Construction

Fig. 16.




den Uebergang von der Umlegung zur Projection, den wir als die **Aufrichtung** oder **Aufstellung** der Ebene bezeichnen wollen. Ist $(P)$ ein Punkt der Ebene $sq'$ in der Umlegung, so wird das umgelegte Centrum $\mathfrak{C}$ bestimmt und $(r)$ aufgetragen; zieht man dann durch $(P)$ eine Gerade $(g)$, so liegt in $s$ ihr Durchstosspunkt $S$, in $(r)$ die Umlegung $(R)$ ihres Verschwindungspunktes und in dem zu ihr parallelen Strahl aus dem umgelegten Centrum $\mathfrak{C}$ auf $q'$ ihr Fluchtpunkt $Q'$. Nun ist das Bild $g'$ die Linie $SQ'$ und zugleich parallel mit $\mathfrak{C}(R)$. Die Linien unter $45^0$ und unter $90^0$ durch $P$ zu $s$ führen auf die Punkte $H_1$, $H_2$, $H$ in $q'$ und auf analoge in $(r)$; endlich liefert die Gerade $\mathfrak{C}(P)$ ein weiteres Hilfsmittel der Bestimmung.

Von einem regulären $n$ Eck sind zwei Nachbar- oder Gegenecken durch die Fusspunkte und Längen ihrer Tafelnormalen gegeben und seine Ebene hat die Tafelneigung $\alpha = 60^0$; man bestimme seine Projection aus seiner Umlegung in die Tafel.

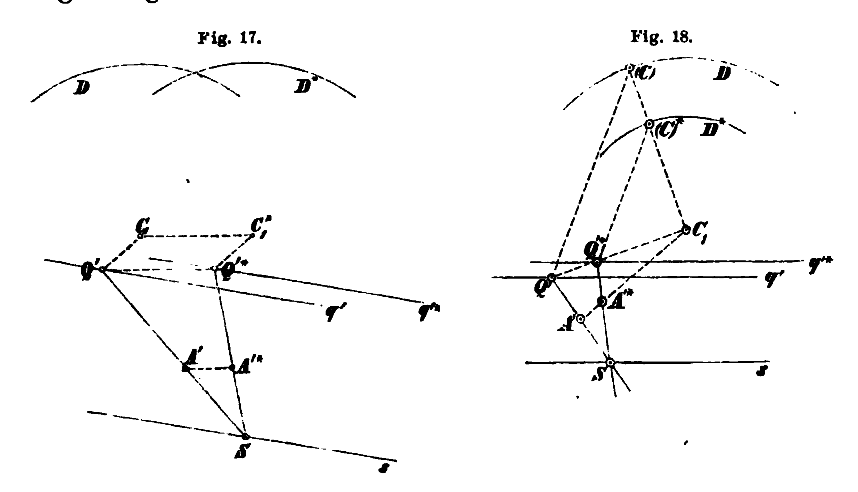
12. Nach dem Vorhergehenden sind alle Aufgaben der darstellenden Geometrie über die Elementarformen theoretisch lösbar, nämlich unter Voraussetzung einer unbegrenzten Zeichnungsebene, unter Voraussetzung geometrischer Genauigkeit auch bei schleifenden Schnitten, etc. und überdiess abgesehen von den in der Kleinheit der Constructionstheile, etc. auftretenden Hindernissen der graphischen Durchführung. Für die wirkliche Ausführung, wo weder jene Voraussetzungen gelten, noch sich von diesen Hindernissen absehen lässt, wird die Möglichkeit der constructiven Lösungen durch Transformation gesichert, d. h. durch zweckentsprechende Lagenveränderungen des Centrums, der Bildebene oder des Objects — denn durch solche lassen sich alle jene Schwierigkeiten heben.

Man kann das Centrum der Projection nach jedem Punkte des Raumes verlegen und die Bildebene oder eine beliebige Ebene des Objects mit einer bestimmten Ebene zusammenfallen machen, indem man gleichzeitig über einen Punkt und eine ihn enthaltende Gerade in derselben verfügt. Jede Verlegung des Centrums lässt sich aus einer Verrückung desselben in der Verschwindungsebene und einer solchen in der Normale zur Tafel zusammensetzen; in analoge Componenten zerlegen sich auch alle Parallelverschiebungen der Bildebene und des Objects. Die Drehungen der Bildebene und des Objects kommen im Wesentlichen auf den im vorigen § erörterten Vorgang der Umlegung hinaus und erfordern keine weitere Erörterung.

Bei den Transformationen des Centrums bleiben alle Durchgangs-Elemente ungeändert, während das neue System der Flucht-Elemente dem ursprünglichen congruent und gleichgelegen ist im Falle der Verschiebung in der Verschwindungsebene oder bei unveränderter Distanz; ähnlich und ähnlich gelegen aber im Falle der Verschiebung des Centrums in der Tafelnormale. Im ersteren Falle (Fig. 17.) wiederholen der Hauptpunkt $C_1$ und alle Fluchtpunkte nach Grösse und Rich-

tung einfach die Verschiebung des Centrums von $C$ nach $C^*$. Das Bild $A'$ eines Punktes in einer gegebenen Geraden $g'$ verschiebt sich in der gleichen Richtung in das transformierte Bild $g'^*$ der Geraden. Projicierende Gerade verwandeln sich in solche, deren Bildlänge der Verschiebungsgrösse gleich ist.

Fig. 17. Fig. 18.



Im zweiten Falle (Fig. 18.) verschiebt sich jeder Fluchtpunkt in der Geraden, die ihn mit dem Hauptpunkt verbindet und zwar um einen Betrag, der in einem rechtwinkligen Dreieck als zweite Kathete erhalten wird, welches die Tafelneigung $\beta$ des zugehörigen projicierenden Strahls zum anliegenden Winkel und die Grösse der Verschiebung $\delta$ des Centrums zur andern Kathete hat; endlich nach dem Hauptpunkt hin oder von demselben weg, je nachdem das Centrum sich der Bildebene nähert oder von derselben wegrückt. Das Bild eines Punktes rückt in der Geraden fort, welche von ihm nach dem Hauptpunkte geht.

1) Man macht eine Gerade $SQ'$ zur projicierenden Linie, indem man das Centrum $C$ nach ihrem Verschwindungspunkte $R$ verlegt; die Grösse $Q'S$ giebt Grösse und Sinn der Verschiebung.
2) Man ziehe zu einer Geraden in gegebener Ebene, deren Fluchtpunkt unzugänglich ist, Parallelen von gegebenen Durchstosspunkten oder allgemeiner durch

gegebene Punkte der Ebene — mittelst Verlegung ihres Fluchtpunktes in einen andern Punkt ihrer Fluchtlinie.

3) Man vergrössere die Entfernung einer Ebene vom Centrum durch Verschiebung desselben in der Verschwindungsebene auf das dreifache, um das Bild einer in ihr gelegenen Figur deutlicher zu erhalten.

4) Man leite aus dem Bilde einer Raumfigur, welches dem Centrum im rechten Auge entspricht, das Bild derselben für das im linken Auge gedachte Centrum ab, bei unveränderter Distanz. Diess enthält die Construction stereoskopischer Bilder.

5) Bei der Transformation durch reducierte Distanz d. i. Verschiebung des Centrums in der Tafelnormale, bleiben die Bestimmungen von Normalen und Normalebenen zur Tafel unverändert.

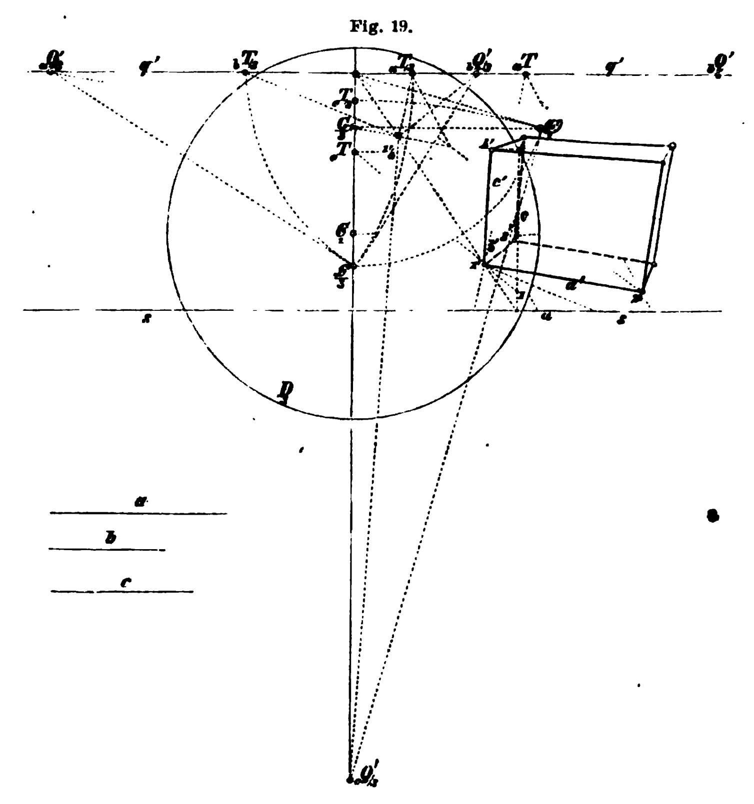
6) Welche Hilfsmittel giebt die Transformation durch reducierte Distanz für das Umlegen und Aufrichten ebener Systeme, a) bei zur Bildebene normaler, b) bei schräger Ebene? Man zeichne mit Benutzung derselben ein Quadrat über gegebener Seite in schräger Ebene und den entsprechenden Würfel. Die Figur 19. giebt für Benutzung von einem Drittel der Distanz das Bild eines rechtwinkligen Parallelepipeds von den Kantenlängen $a$, $b$, $c$ bei gegebener Ebene der Fläche $ab$, gegebener Ecke 1 und Richtung der Kante $b$ in derselben. Die reducierten Fluchtpunkte der Kanten $a$, $b$, $c$ sind durch ${}_aQ'/_3$, ${}_bQ'/_3$, ${}_cQ'/_3$ bezeichnet; ebenso die entsprechenden Theilungspunkte durch ${}_aT/_3$, etc.; für $a$ und $c$ konnten die Theilungspunkte ${}_aT$, ${}_cT$ selbst benutzt werden.

Die Kante $c$ ist in 14 angetragen. Im Falle des Würfels lassen sich die Eigenschaften des Quadrats betreffs seiner Diagonalen mit verwenden.

Man füge den Schlagschatten für paralleles Licht von gegebenem Fluchtpunkte auf die Ebene der Basis hinzu.

13. Bei den Verschiebungen des Objects parallel zur Tafel und in Normalen zur Tafel d. i. wenn alle Punkte desselben Parallelen oder Normalen zur Tafel beschreiben, bleiben alle Fluchtelemente ungeändert, und die Durchgangselemente ändern sich nach den Gesetzen, welche vorher für beide Fälle für die Aenderung der Fluchtelemente gegeben wurden; insbesondere rückt bei der Normalverschiebung der Durchstoss-

Fig. 19.



punkt $S$ der Geraden in der Spur der durch sie gelegten Normalebene zur Tafel um den Betrag fort, der in dem rechtwinkligen Dreiecke aus der Grösse der Verschiebung $\delta$ als Kathete mit der Tafelneigung $\beta$ als Gegenwinkel als zweite Kathete erhalten wird.

Die Verschiebung der Bildebene in Normalen zu ihr ändert sowohl die Durchgangs- als die Flucht-Elemente und

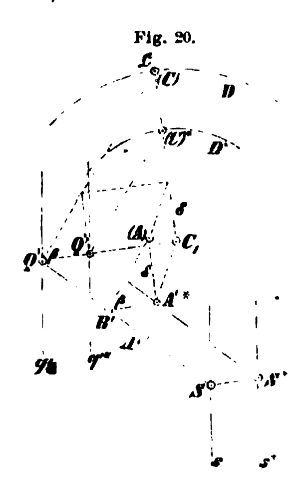
zwar beide um den nämlichen wie vorher aus der Grösse der Verschiebung $\delta$ und der Tafelneigung $\beta$ abzuleitenden Betrag in gleichem Sinn in der Spur und der Fluchtlinie der durch die Gerade gehenden Normalebene zur Tafel. (Fig. 20.) Die Bilder der Punkte rücken in den Geraden fort, die sie mit dem Hauptpunkt verbinden. Man hat für einen beliebigen Punkt $A'$ der Geraden $SQ'$ und seine Transformation $A'^*$

$$\delta : d = Q'Q'^* : Q'C_1 = A'A'^* : A'C_1 .$$

Die Ebene $sq'$ geht über in $s^*q'^*$.

Und wenn $A'$ in $A'^*$ übergeht, $A'^*B'$ aber $Q'C_1$ parallel ist, so enthält das über diesem mit der zweiten Kathete $\delta$ construierte rechtwinklige Dreieck die Umlegung $(A)$ von $A'$ und den Winkel $\beta$ der Geraden. Diess giebt eine Umlegung von Ebenen, welche normal sind zur Tafel und damit besondere Vortheile für die constructive Behandlung der zur Tafel normalen Ebenen. Da die Ausmessung der zu projicierenden Raumformen, die der Darstellung derselben voran gehen muss, practisch mit Vortheil nach der Methode der rechtwinkligen Coordinaten geschieht, so ist es bequem, die als Verticalebene gedachte Tafel und eine, etwa die tiefste am Object vorkommende, Horizontalebene als natürliche Coordinatenebenen zu betrachten und dazu normal durch das Centrum die dritte zu fügen. Das System der der Tafel selbst angehörigen Ordinatenfusspunkte erfordert dann nur die Auftragung der entsprechenden Abstände als Tafelnormalen.

Fig. 20.



1) Wenn ein rechtwinkliges Coordinatensystem durch die eine der Axen, den Anfangspunkt und die Bildrichtung der zweiten Axe gegeben ist, wie sind die in ihm gemessenen Coordinaten aufzutragen?

2) Wie insbesondere, wenn mit dem vierten Theile der Distanz gearbeitet wird, weil die Grösse der-

selben die Dimensionen des Zeichenblattes überschreitet?

14. Im Vorhergehenden ist die Centralprojection als eine selbständige Darstellungsmethode entwickelt und im Wesentlichen ausgebildet. Damit sie zugleich die wissenschaftliche Grundlage aller übrigen Darstellungsmethoden — und zwar sowohl Methoden der graphischen Darstellung als der modellierenden — liefern könne, ist es nöthig, die fundamentale Beziehung eingehender zu untersuchen, welche zwischen dem Bilde eines ebenen Systems und diesem selbst besteht.

Das Bild des ebenen Systems und die Umlegung desselben in die Bildebene sind zwei geometrisch verwandte, d. i. in gesetzmässiger Abhängigkeit von einander stehende ebene Systeme in der Tafel. Diese Verwandtschaft hat zu ihrem Hauptgesetz, dass jedem Punkt und jeder Geraden des einen Systems immer ein und nur ein Punkt und eine Gerade des andern Systems entspricht. Man nennt die Systeme als diesem Gesetz unterworfen projectivisch und insbesondere collinear, und die bezügliche geometrische Verwandtschaft Projectivität, insbesondere Collineation. Die Systeme erscheinen überdiess in einer besondern gegenseitigen Lage, die man als die perspectivische oder centrale Lage zu bezeichnen pflegt: Jedes Paar entsprechender Punkte liegt auf einerlei Strahl eines Strahlenbüschels, in welchem jeder Strahl sich selbst entspricht, d. i. als Theil des Originalsystems betrachtet mit seinem Bilde zusammenfällt und umgekehrt, so dass dieses Strahlenbüschel beiden Systemen entsprechend gemein ist. Und jedes Paar entsprechender Geraden geht durch einerlei Punkt einer geradlinigen Punkt-Reihe, in welcher jeder Punkt sich selbst entspricht oder die beide Systeme entsprechend gemein haben. Den Scheitelpunkt jenes Büschels $\mathfrak{C}$ nennen wir das Collineationscentrum der Systeme, die gerade Linie dieser Reihe $s$ die Collineationsaxe derselben.

Ferner entsprechen den Punkten in unendlicher Ferne im einen System die Punkte einer zur Collineationsaxe parallelen Geraden im andern System — die Allgemeingültigkeit des Grundgesetzes, dass jeder Geraden des einen Systems eine Gerade des andern entspreche, fordert damit die einge-

führte Anschauung, wonach die unendlich fernen Punkte jeder Ebene eine Gerade bilden. Den Punkten im Unendlichen des Originalsystems entsprechen die von $q'$, den Punkten in unendlicher Ferne des Bildsystems die von $(r)$. Wir nennen diese beiden Geraden die Gegenaxen der Systeme und ihre Punkte die Gegenpunkte derjenigen Geraden der ebenen Systeme, welche durch sie hindurchgehen. Die Gegenaxen können als Orte der Scheitel derjenigen Strahlenbüschel beider Systeme bezeichnet werden, denen Parallelenschaaren im jedesmaligen andern System entsprechen.

In alledem recapitulieren wir nur die Ergebnisse der Centralprojection des ebenen Systems mit zweckgemässen Modificationen der Ausdrucksweise. Es entspricht dem ebenfalls, dass zwei collineare Systeme in centraler Lage bestimmt sind durch das Centrum und die Axe der Collineation nebst einer der Gegenaxen; die allgemeinen Abhängigkeitsgesetze zeigen, dass ein beliebiges Paar $A'$, $(A)$ entsprechender Punkte der Systeme die Angabe der Gegenaxe für die Bestimmung ersetzt.

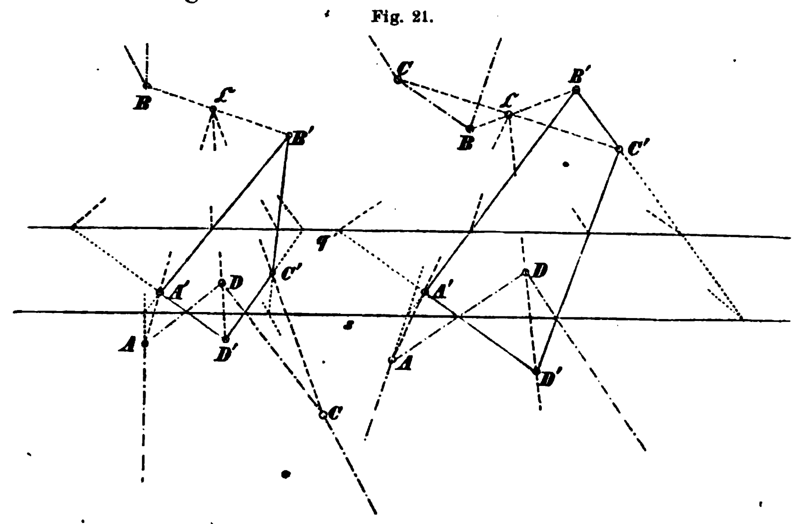
Nach diesen Gesetzen entsprechen einer gegebenen Figur in der Ebene unendlich viele ihr collinearverwandte Figuren, die alle nach beliebiger Festsetzung des Collineationscentrums und der Collineationsaxe, so wie einer Gegenaxe mit Hilfe des Lineals allein aus ihr construiert werden. Die Lage der gegebenen Figur zur Gegenaxe ihres Systems unterscheidet die entsprechenden Figuren wesentlich von einander, wie diess an den einfachen Figuren von Dreieck und Viereck erläutert werden kann.

1) Man construiere von zwei collinearen Systemen in centraler Lage das zweite aus dem ersten, wenn gegeben sind das Centrum und die Axe der Collineation und zu einem Punkte oder einer Geraden des ersten Systems der entsprechende Punkt respective die entsprechende Gerade des zweiten; auch weise man den Parallelismus der Gegenaxen mit der Collineationsaxe als nothwendige Folge des Grundgesetzes der Projectivität nach.

2) Man zeichne und characterisiere die Collinearverwandten eines gegebenen Dreiecks $A_1 A_2 A_3$ für die

verschiedenen Lagen, die es zur Gegenaxe seines Systems haben kann; also für welche die Ecken 1, 2, 3 auf einerlei Seite der Gegenaxe, oder 1, 2 auf der einen, 3 auf der andern Seite derselben liegen, oder 3 in der Gegenaxe und 1 und 2 auf derselben Seite oder auf verschiedenen Seiten derselben, oder endlich 1 und 2 in der Gegenaxe liegen.

Fig. 21.



3) Man führe dasselbe aus für das Viereck der Punkte 1, 2, 3, 4 — in sieben Hauptfällen; welche Zahl sich noch vermehrt, wenn man auch auf die Lage der Punkte achtet, in denen die Gegenseitenpaare sich schneiden. Die Figur 21. zeigt zwei dieser Fälle für das Viereck *ABCD*.

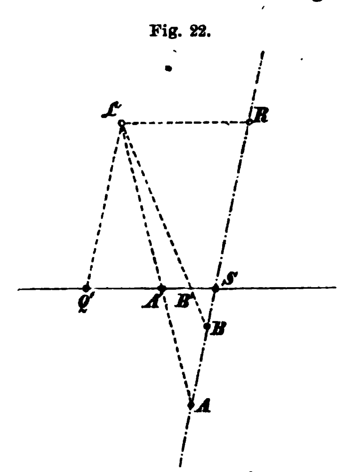
4) Die Strahlenbüschel beider Systeme, welche das Collineationscentrum zum Scheitel haben, decken sich Strahl für Strahl und werden daher als einander gleich und entsprechend bezeichnet. Man soll nun die Existenz gleicher, Strahl für Strahl einander entsprechender Strahlenbüschel in der Bildebene und einer gegebenen Originalebene für ein gegebenes Centrum der Projection direct erweisen — indem man die Büschel von projicierenden Ebenen

betrachtet, welche zu ihren Scheitelkanten die Normalen der Ebenen haben, durch die der Winkel $\alpha$ der Originalebene und sein Nebenwinkel halbiert werden. Diese Normalen liefern direct die beiden Lagen des umgelegten Centrums (§ 9.).

5) Man benutze die Relation der vorigen Aufgabe zur Construction der Halbierungsebenen des Winkels $\alpha$, den eine gegebene Ebene mit der Bildebene einschliesst.

6) Wenn man durch alle Punkte des ebenen Systems Parallelen zieht zu einer der in Aufg. 4. bezeichneten Normalen, so bestimmen dieselben in der Bildebene ein System, welches dem gegebenen congruent ist. Man erläutere die Construction der Umlegung des ebenen Systems in § 11. (§ 9.) als die Ausführung dieses Gedankens.

Fig. 22.




15. Für das Weitere ist die Untersuchung der **Abhängigkeit des Bildes der Geraden von ihrem Original** die natürliche Vorbereitung. Nach dem Vorhergehenden ist sie als Projectivität in perspectivischer Lage zu bezeichnen und durch das Zusammenfallen zweier entsprechender Punkte im Durchschnittspunkt $S$ des Bildes mit dem Original characterisiert. Ob wir die Umlegung der einzelnen Geraden mit ihrer projicierenden Ebene wie in § 4. oder die Umlegung der Geraden des ebenen Systems wie in § 11. betrachten, so zeigt sich uns das Bild und die Umlegung der Geraden in solcher Beziehung, dass beide den Durchstosspunkt $S$ gemein haben und das Collineationscentrum die vierte Ecke eines Parallelogramms ist, in welchem $S$ ihm gegenüber liegt und die Gegenpunkte $Q'$ und $R$ die andern Ecken sind. Daraus ergeben sich für zwei Punkte $A$, $B$ des Originals und ihre Bilder $A'$, $B'$ die folgenden Relationen (Fig. 22.):

$$\triangle\, AR\mathfrak{C} \sim \triangle\, \mathfrak{C}Q'A';\ \text{also}\ AR : R\mathfrak{C} = \mathfrak{C}Q' : Q'A'\ \text{oder}$$

$$AR \cdot Q'A' = R\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{C}Q' = SQ' \cdot RS = k^2;\ (= n \cdot l\ \S\ 3.)$$

d. h. das Rechteck der Abstände entsprechender Punkte von ihren Gegenpunkten ist constant. In Folge dessen ist

$$Q'A' = \frac{k^2}{AR}\ \text{und ebenso}\ Q'B' = \frac{k^2}{BR};\ \text{also}$$

$$Q'B' - Q'A' = A'Q' + Q'B' = A'B' = k^2\left(\frac{1}{BR} - \frac{1}{AR}\right)$$

$$= k^2 \frac{AR - BR}{AR \cdot BR} = k^2 \cdot \frac{AB}{AR \cdot BR},$$

für die Ableitung der Länge des Bildes, welches einer bestimmten Strecke des Originals entspricht. Man hat $A'B' = AB$ für

$$k^2 = AR \cdot BR\ \text{und weil}\ k^2 = AR \cdot Q'A' = BR \cdot Q'B'\ \text{ist},$$

so ergiebt sich als die Bedingung der Gleichheit entsprechender Strecken

$$BR = Q'A'\ \text{oder}\ AR = Q'B';$$

d. h. der Gegenpunkt $Q'$ ist vom Bilde des einen Endpunkts ebensoweit entfernt wie das Original des andern vom Gegenpunkt $R$.

Hat man also $A$ und $A'$ als Anfangspunkte entsprechend gleicher Strecken, so trägt man $Q'A'$ im Bilde rückwärts von $Q'$ nach $D'$ und im Original beiderseits von $R$ nach $B$ und $E$ ab; ebenso $RA$ im Original rückwärts von $R$ nach $D$ und im Bilde beiderseits von $Q'$ nach $B'$ und $E'$. Dann sind $BB'$, $DD'$, $EE'$ Paare entsprechender Punkte und (Fig. 23.)

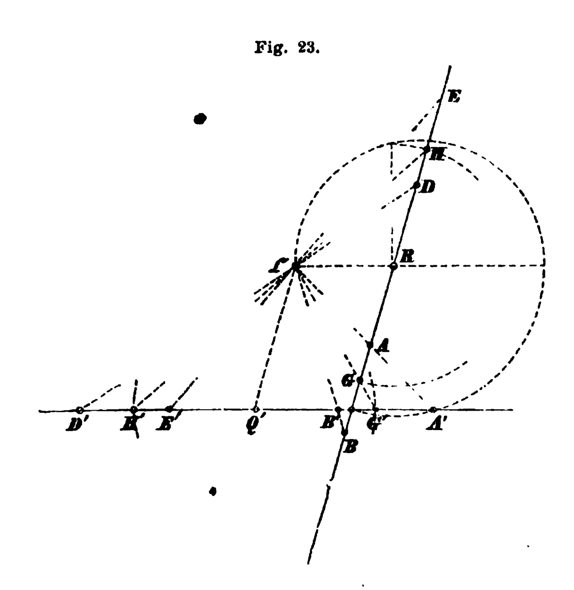
$$AB = A'B',\ DE = D'E'$$

gleiche entsprechende Strecken, die die Gegenpunkte $Q'$ und $R$ nicht einschliessen;

$$BD = B'D',\ AE = A'E'$$

dagegen gleiche entsprechende Strecken, die die Gegenpunkte $Q'$ und $R$ einschliessen. Es giebt also in zwei projectivischen Geraden zwei durch die Lage zu den Gegenpunkten unterschiedene Systeme entsprechend gleicher Strecken.

Fig. 23.




1) Für $Q'A' = BR = k = \sqrt{SQ' \cdot RS}$ wird $AB = A'B' = 0$; es giebt zwei Punktepaare $G$, $H$ in $g$ und $G'$, $H'$ in $g'$ (Fig. 23.), welche die entsprechenden Nullstrecken genannt werden sollen. Sie müssen dem ersten System der entsprechend gleichen Strecken beigezählt werden, die die Gegenpunkte nicht einschliessen.
2) Man trage die Punkte $P$ auf, für welche $SP = SP'$ ist — durch $Q'P' = SR$.
3) Da die Grösse $k^2$ nur von den Seitenlängen, nicht aber von den Winkeln des Parallelogramms $\mathfrak{C}RSQ'$ abhängt, so folgt der Satz: Wenn zwei Gerade perspectivisch sind, so bleiben sie diess auch bei einer Drehung der einen von ihnen um den gemeinschaftlichen Punkt. Das Centrum $\mathfrak{C}$ der Perspective ist immer die vierte Ecke des durch die Gegenpunkte $R'$, $Q$ mit $S$ bestimmten Parallelo-

gramms; bleibt also $g'$ fest, so durchläuft $\mathfrak{C}$ den aus $Q'$ mit dem Halbmesser $Q'\mathfrak{C}$ beschriebenen Kreis. Jeder Punkt in ihm hat den Character und erlaubt die Verwendung eines Theilungspunktes. (§ 4; 3. § 12; 6. Fig. 18.)

4) Für eine projicierende Gerade ist $R\mathfrak{C} = 0$ also $k^2 = 0$ und $A'B'$ stets gleich Null, d. h. das Bild der Geraden ist ein Punkt.

16. Gehen wir zur Betrachtung von zwei Paaren von Punkten $A$, $B$ und $C$, $D$ der Geraden $g$ und ihrer Bilder $A'$, $B'$ und $C'$, $D'$ in $g'$ über, so ergeben sich die Relationen der Abstände der Punkte des ersten Paares von denen des zweiten (Fig. 24.)

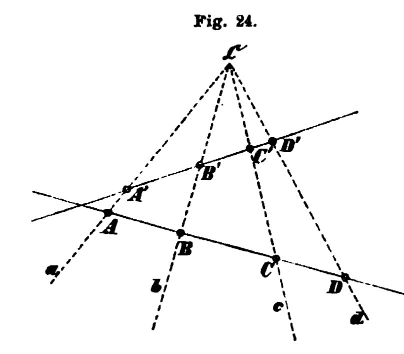
$$A'C' = k^2 \cdot \frac{AC}{AR \cdot CR}, \quad A'D' = k^2 \cdot \frac{AD}{AR \cdot DR};$$

$$B'C' = k^2 \cdot \frac{BC}{BR \cdot CR}, \quad B'D' = k^2 \cdot \frac{BD}{BR \cdot DR};$$

daraus folgen für die einfachen Theilungsverhältnisse (§ 7.), nach denen die Strecken $A'B'$ durch die Punkte $C'$, respective $D'$ getheilt sind und ihre entsprechenden im Original die Relationen

$$\frac{A'C'}{B'C'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AR}{BR}, \quad \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AD}{BD} : \frac{AR}{BR};$$

Fig. 24.




und es ergiebt sich somit das Verhältniss dieser Theilverhältnisse oder das Doppelverhältniss der Punkte $ABCD$

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'D'}{B'D'} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

d. h. das Doppelverhältniss von vier Punkten einer Geraden wird durch Centralprojection nicht geändert — ist im Bilde dasselbe wie im Original; in projectivischen Geraden haben die gleichgebildeten Doppelver-

hältnisse von Gruppen entsprechender Punkte einerlei Werth.

Wir schreiben für die vorige Gleichung abkürzend

$$(A'B'C'D') = (ABCD).$$

Ist $\mathfrak{C}$ oder $C$ das Centrum und bezeichnen wir die projicierenden Strahlen $AA'$, $BB'$, $CC'$, $DD'$ respective durch $a$, $b$, $c$, $d$ und durch $(a, b)$ den von zweien $a, b$ unter ihnen gebildeten Winkel, so hat man folgende Relationen:

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\Delta A\mathfrak{C}C}{\Delta B\mathfrak{C}C} : \frac{\Delta A\mathfrak{C}D}{\Delta B\mathfrak{C}D} = \frac{\sin(a, c)}{\sin(b, c)} : \frac{\sin(a, d)}{\sin(b, d)} = (abcd)$$

mit Anwendung der analogen Abkürzung auf den analogen Ausdruck; d. h. das Doppelverhältniss von vier Punkten in gerader Linie stimmt mit dem gleichgebildeten Doppelverhältniss der entsprechenden Strahlen eines darüber stehenden Strahlenbüschels überein. Die Gleichheit der Doppelverhältnisse entsprechender Gruppen von Punkten in perspectivischen Geraden geht daraus wieder hervor. Aber ferner die Sätze: Alle vierpunktigen Reihen, die aus demselben Strahlenbüschel durch verschiedene Transversalen geschnitten werden oder perspectivisch sind, haben gleiches Doppelverhältniss. Alle vierstrahligen Büschel, die über derselben Reihe von vier Punkten an verschiedenen Scheitelpunkten erzeugt werden oder perspectivisch sind, haben gleiches Doppelverhältniss. Also auch: Ein Strahlenbüschel in der Originalebene und sein Bild haben gleiches Doppelverhältniss — und alle die Punktreihen und Strahlenbüschel, welche durch beliebige Gerade und Ebenen aus einem Büschel von (projicierenden) Ebenen geschnitten werden, haben gleiches Doppelverhältniss; es ist dem entsprechenden Doppelverhältniss dieses Ebenenbüschels selbst gleich.

1) Wenn der Punkt $C$ der Originalgeraden die Mitte zwischen den Punkten $A$ und $B$ derselben ist, so dass $AC = -BC$, so liefern die Relationen

$$A'C' = k^2 \frac{AC}{AR \cdot CR}, \quad B'C' = k^2 \frac{BC}{BR \cdot CR}$$

$$A'C' : B'C' = \frac{k^2}{AR} : -\frac{k^2}{BR} = Q'A' : -Q'B' \text{ oder}$$

$$\frac{A'C'}{B'C'} : \frac{A'Q'}{B'Q'} = -1.$$

Ist im Original $C$ die Mitte zwischen $A$ und $B$, so haben die Gruppen $A'B'$ und $C'Q'$ im Bilde das Doppelverhältniss — 1, oder wie man sagt $C'$ und $Q'$ sind conjugiert harmonisch zu $A'B'$. Da im Original die Strecke $AB$ durch den Mittelpunkt $C$ und den unendlich fernen Punkt $Q$ in den Verhältnissen — 1 und + 1 getheilt wird, so ist das Doppelverhältniss der Gruppen $AB$, $CQ$ gleichfalls — 1 und das gewonnene Ergebniss ein Specialfall des Hauptsatzes im Texte.

Ebenso die Halbierung der Bildstrecke $SQ'$ durch das Bild $M'$ von $M$ für $S$ als die Mitte zwischen $R$ und $M$. Harmonische Theilung wird durch Projection nicht gestört.

2) Alle Strahlenbüschel über einer Gruppe harmonischer Punkte sind harmonische Büschel; ebenso alle Ebenenbüschel, welche durch dieselbe gehen.

3) Man hat für den Zusammenhang zwischen Bild und Original einer geraden Linie speciell

$$(AB \infty R) = (A'B'Q' \infty') \text{ d. h.}$$

$$BR : AR = A'Q' : B'Q' \text{ oder } AR \cdot A'Q' = BR \cdot B'Q',$$

das erste Gesetz des § 15.; ferner

$$(S'Q'A'R') = (SQAR) \text{ oder } (S'Q'A'\infty') = (S \infty AR)$$

$$\text{d. h. } \frac{S'A'}{Q'A'} : \frac{S'\infty'}{Q'\infty'} = \frac{SA}{\infty A} : \frac{SR}{\infty R} \text{ oder } \frac{S'A'}{Q'A'} = \frac{SA}{SR} = -\frac{y}{d},$$

das Grundgesetz für die Auftragung von Punkten einer Geraden aus ihren Tafelabständen. (§ 7.)

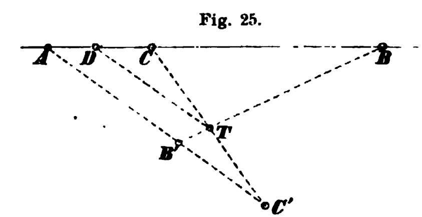
4) Jedes Doppelverhältniss kann auf ein einfaches Verhältniss reduciert und damit zu drei Elementen einer Reihe oder eines Büschels ein viertes zu gegebenem Doppelverhältniss construiert werden. Sind $A$, $B$, $C$, $D$ Punkte einer Reihe, so bilde man über ihnen ein Strahlenbüschel $a$, $b$, $c$, $d$ und schneide

dasselbe durch eine Transversale aus $A$ parallel dem Strahl $d$ in den Punkten $B'$, $C'$, $\infty'$; dann ist $(ABCD) = (AB'C'\infty')$

$$\text{d. i.} = AC' : B'C'.$$

Soll also z. B. in Fig. 25. $D$ so bestimmt werden, dass $(ABCD) = 2, 5$ sei, so trage man auf eine durch $A$ gezogene Gerade $AC' = 5$, $B'C' = 2$ in beliebiger Einheit auf; dann liefern die Geraden $BB'$, $CC'$ als ihren Schnittpunkt den Scheitel $T$ des Büschels und der zu $AB'C'$ parallele Strahl aus diesem bestimmt in der Reihe $ABC$ den Punkt $D$.

Fig. 25.



Man construiere insbesondere den vierten harmonischen Punkt $D$ zu der Gruppe $ABC$, z. B. die Centralprojection des Mittelpunktes $C'$ der in $A'B'$ projicierten Strecke der Geraden $SQ'$. (Vergl. § 22;3, die Construction mit Hilfe des Lineals allein.)

5) Sind in zwei Gruppen von gleichem Doppelverhältniss drei Paare entsprechender Elemente gegeben, z. B. in zwei Reihen von Punkten $A$, $A'$; $B$, $B'$; $C$, $C'$, so bestimmt das Gesetz der Doppelverhältnissgleichheit $(ABCX) = (A'B'C'X')$ zu jedem vierten Element $X$ der einen Reihe das entsprechende Element $X'$ der andern.

Lässt man $X$ die ganze Gerade $ABC$ durchlaufen, so durchläuft $X'$ gleichzeitig die ganze Gerade $A'B'C'$ und man erhält zwei projectivische oder speciell perspectivische Reihen von unendlich vielen Punkten, sagen wir **vollständige projectivische Reihen**. Die entsprechenden Gruppen von vier Elementen derselben haben gleiches Doppelverhältniss.

Ihr Zusammenhang werde durch die Formel ausgedrückt

$$(ABCDE\cdots) = (A'B'C'D'E'\cdots).$$

Das Analoge gilt für Strahlenbüschel und für Strahlenbüschel und Punktreihen etc., nach den Relationen

$$(abcde\cdots)=(a'b'c'd'e'\cdots),\ (ABCDE\cdots)=(a'b'c'd'e'\cdots).$$

6) Wenn zwei projectivische Reihen oder Büschel drei Elemente entsprechend gemein haben, so sind sie identisch. Also auch: Wenn von einer Reihe und einem dazu projectivischen Büschel von Strahlen oder Ebenen — überhaupt von zwei projectivischen und ungleichartigen der Gruppe von Gebilden: Reihe, Strahlenbüschel, Ebenenbüschel — drei Elemente des einen in den entsprechenden Elementen des andern liegen, so liegen alle Elemente des einen in den entsprechenden des andern.

17. Mit Hilfe der vorigen Sätze und der Characteristik der perspectivischen Lage gleichartiger projectivischer Gebilde, nach welcher die beiden Reihen oder Büschel das gemeinsame Element — bei Ebenenbüscheln ist Vorbedingung, dass sie eine gemeinsame Ebene enthalten — entsprechend gemein haben, lassen sich vollständige projectivische Reihen und Büschel in allgemeiner Lage aus drei Paaren entsprechender Elemente linear construieren.

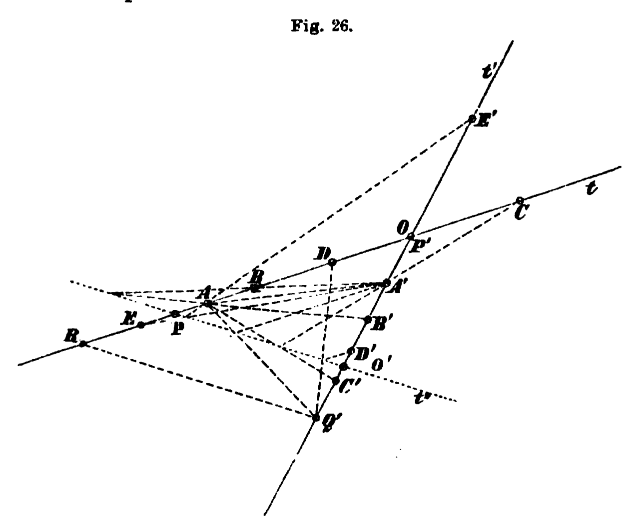
Sind $A$, $B$, $C$ in der Geraden $t$ und $A'$, $B'$, $C'$ in $t'$ die drei entsprechenden Paare von Punkten, so sollen zu den Punkten $D$, $E$, $\cdots$ die entsprechenden $D'$, $E'$, $\cdots$ nach dem Gesetze der Projectivität gefunden werden. Denken wir aus einem Paar entsprechender Punkte wie $A$, $A'$ oder $B$, $B'$ etc., die Strahlenbüschel über der jedesmaligen andern Reihe gebildet, so hat man nach leichtverständlicher Bezeichnung

$$(A\cdot A'B'C'D'\cdots) = (A'\cdot ABCD\cdots)$$

und diese Büschel sind perspectivisch, weil in ihrem gemeinsamen Strahl $AA'$ zwei entsprechende Strahlen derselben vereinigt sind; sie stehen also über derselben Reihe oder haben eine perspectivische Axe $t''$, den Ort der Schnittpunkte der Paare von Geraden $AB'$, $A'B$; $AC'$, $A'C$; $AD'$, $A'D$; etc. Dieselbe ist somit aus den Punktepaaren $AA'$, $BB'$, $CC'$ bestimmt

und dient ihrerseits zur Bestimmung aller übrigen Paare entsprechender Punkte $DD'$, etc.: Man zieht (Fig. 26.) $A'D$, verbindet den Schnittpunkt mit $t''$ mit $A$ und erhält in $t'$ den Punkt $D'$. Im Schnittpunkt der Geraden $t$, $t'$ sind zwei nicht entsprechende Punkte $O$, $P'$ vereinigt und die Construction zeigt, dass ihre entsprechenden $P$ und $O'$ in $t$ und $t'$ die Punkte

Fig. 26.




sind, welche diese mit der perspectivischen Axe $t''$ gemein haben. Daraus folgt, dass die perspectivische Axe $t''$ von der Wahl der Scheitel $(A, A')$ der Büschel unter den Paaren der Punkte unabhängig ist, dass also die Geraden $BC'$ und $B'C$ sich gleichfalls in ihr schneiden; man erhält also drei Punkte der perspectivischen Axe aus den gegebenen Elementen.

1) Man erhält die Gegenpunkte $R$, $Q'$ der beiden projectivischen Reihen durch die Construction des Textes als die entsprechenden der unendlich fernen Punkte derselben; man zeige, dass die Gerade $RQ'$ zu $t''$ parallel ist.
2) Mit Hilfe der Gegenpunkte bestimmt man die entsprechend gleichen Strecken wie in § 15. und insbesondere die entsprechenden Nullstrecken.
3) Zwei projectivische Reihen $t$, $t'$ sind vollkommen bestimmt durch die perspectivische Axe $t''$ und ein Paar entsprechender Punkte $AA'$ oder den Gegen-

punkt der einen von ihnen; oder auch durch die Gegenpunkte $Q'$ und $R$ und ein Paar entsprechender Punkte.

4) Wenn die Gegenpunkte unendlich fern sind, d. i. wenn die unendlich fernen Punkte der Reihen sich entsprechen, so findet Aehnlichkeit oder Proportionalität zwischen denselben statt, man hat

$$(ABX\infty) = (A'B'X'\infty') \text{ oder}$$
$$AX : BX = A'X' : B'X'.$$

Die Construction zeigt dasselbe; das Verjüngungs- oder Aehnlichkeitsverhältniss ist $OP : O'P'$. Diess ist das Verhalten einer zur Tafel parallelen Geraden $g$ zu ihrem centralprojectivischen Bilde $g'$ (§ 15.). Das Aehnlichkeitsverhältniss ist $p : p'$, das Verhältniss der in derselben Geraden gemessenen Abstände des Centrums $C$ von der Geraden und ihrem Bilde. Es ist auch das Verhalten jeder Geraden $g$ zu ihrer Projection $g'$ aus einem unendlich fernen Centrum; die Constante des Aehnlichkeitsverhältnisses ist von der Lage der Geraden gegen die Bildebene und die projicierenden Strahlen abhängig. (Vergl. § 21.) Aehnliche Reihen sind durch zwei Paare entsprechender Punkte bestimmt; man construiere sie.

5) Wenn die perspectivische Axe $t''$ einer der Halbierungslinien des Winkels $(t, t')$ parallel geht, so sind die projectivisch ähnlichen Reihen insbesondere projectivisch gleich; $OP : O'P' = \pm 1$. (Vergl. § 21.)

6) Verschiebt man die Reihe $t$ um die Strecke $PP'$ und im Sinne derselben in sich selbst, oder die Reihe $t'$ um die Strecke $O'O$ und im Sinne derselben, so werden beide Reihen perspectivisch.

7) Man bestimme die Distanz, den Durchstosspunkt $S$ und Fluchtpunkt $Q'$ einer Geraden, wenn für drei Punkte derselben die Bilder $A'$, $B'$, $C'$ und die Tafelabstände $y_1$, $y_2$, $y_3$ gegeben sind. (Fig. 27. a, b).

Ist $C$ das Centrum der Projection (Fig. 27. a), $g$ die Gerade mit den Punkten $A$, $B$, $C$, $D$; $S$ ihr Durch-

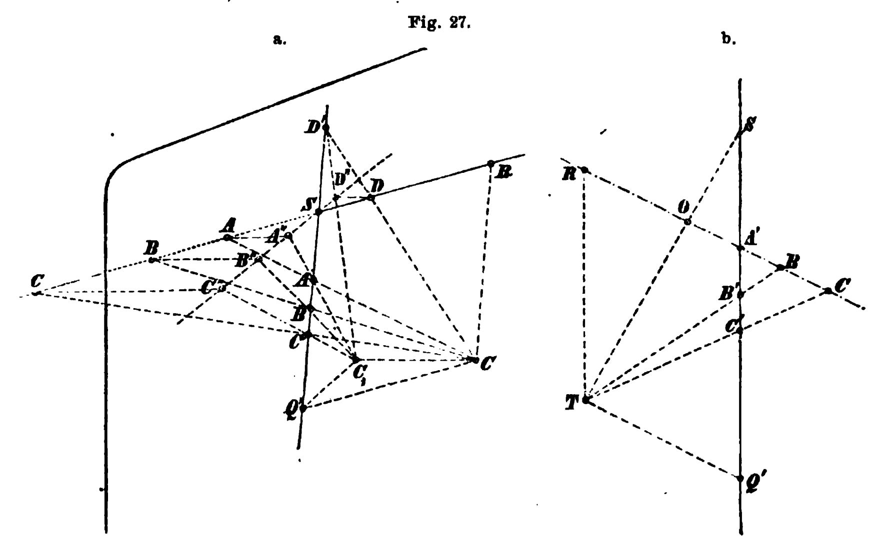
stoss-, $R$ ihr Verschwindungspunkt also $Q'$ ihr Fluchtpunkt, $g'$ ihr Bild, mit den Bildern $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ der besagten Punkte; ist $C_1$ der Hauptpunkt und somit $g''$, die durch $S$ zu $C_1 Q'$ gezogene Parallele, der Ort der Fusspunkte $A''$, $B''$, $C''$, $D''$ der Tafelnormalen von $A$, $B$, $C$, $D$, so hat man

$$(ABCD) = (A'B'C'D') = (A''B''C''D''),$$

d. h. für $y$ als die Tafelordinate von $D$

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{y_1 - y_3}{y_2 - y_3} : \frac{y_1 - y}{y_2 - y}.$$

Fig. 27.




Legt man (Fig. 27. b) also durch $A'$ eine Gerade, in der man die $y$ von einem Anfangspunkte $O$ aus mit Rücksicht auf ihren Sinn so abträgt, dass $y_1$ in $A'$ endigt, so liefern die Ordinaten $y_2$, $y_3$ Punkte $B$, $C$, die mit $B'$, $C'$ verbunden Strahlen eines Büschels vom Scheitel $T$ liefern, welches die vorige Beziehung abbildet. Der Strahl von $T$ nach dem Anfangspunkte $O$ giebt den Punkt des Bildes $S$, welchem die Tafelordinate Null entspricht; der zu $A'BC$ parallele Strahl aus $T$ giebt in $A'B'$ den Punkt $Q'$, der der unendlich grossen Ordinate entspricht;

der Strahl $TR$ parallel $A'B'$ giebt in dem Abstande $OR$ die Ordinate des Verschwindungspunktes $R$, d. h. die Distanz $d$. Man erhält dieselbe auch durch den Strahl $TM'$ nach dem Mittelpunkt $M'$ der Strecke $SQ'$, da dieser die Ordinate von $M$ giebt.

Wenn weitere Data fehlen, so kann der Hauptpunkt $C_1$ jetzt willkürlich festgesetzt werden, so dass den gegebenen Bestimmungen ein vollständiges Strahlenbündel vom Scheitel $S$ entspricht. (§ 3; 2.)

8) Es ist ein Specialfall dieser Bestimmung, wenn die Gerade durch ihren Durchstoss- und Fluchtpunkt bei gegebener Distanz bestimmt wird; es sind die Bilder der Punkte von den Tafelordinaten Null, Unendlich und $d$ gegeben. Wie modificiert sich die Construction von Aufg. 7., wenn der Durchstosspunkt $S$ oder der Fluchtpunkt $Q'$ der Geraden bekannt ist; oder der Punkt $M'$?

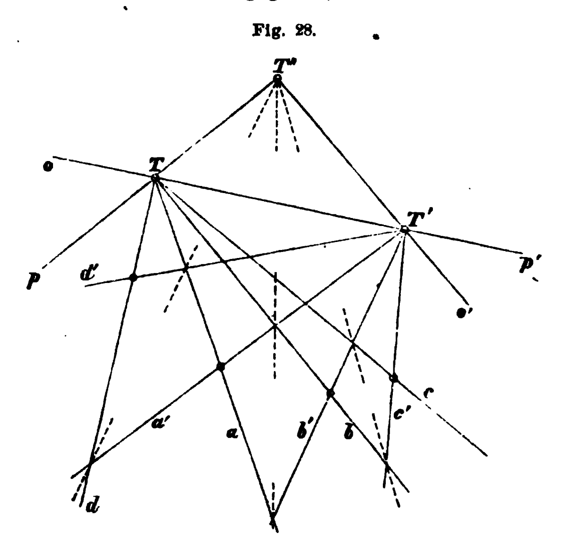
18. In zwei projectivischen Strahlenbüscheln von den Scheitelpunkten $T$, $T'$ construiert man aus drei Paaren entsprechender Strahlen $a, a'$; $b, b'$; $c, c'$ die ferneren entsprechenden Strahlenpaare $d, d'$ etc., indem man die Reihen betrachtet, welche zwei entsprechende Strahlen z. B. $a, a'$ mit dem jedesmaligen andern Büschel bestimmen; man hat in leicht verständlicher Bezeichnung

$$(a \cdot a'b'c' \cdots) = (a' \cdot abc \cdots)$$

und da diese Reihen, weil sie in $aa'$ einen Punkt entsprechend gemein haben, perspectivisch sind, so erzeugen sie durch die Verbindungslinien der Paare ihrer entsprechenden Punkte ein Strahlenbüschel oder sie haben ein perspectivisches Centrum $T''$. Dasselbe ist zunächst nach der getroffenen Wahl der Reihen durch die Geraden $ab'$, $a'b$; $ac'$, $a'c$ aus den gegebenen Elementen bestimmt und dient zur Construction aller übrigen Paare entsprechender Strahlen (Fig. 28.); es liefert zu $d$ den entsprechenden $d'$, weil $a'd$, $ad'$ eine durch $T''$ gehende Gerade sein muss. Im Verbindungsstrahl der Scheitel $TT'$ sind zwei einander nicht entsprechende Strahlen $o$, $p'$ der beiden Büschel vereinigt; die Construction zeigt, dass die ihnen entsprechenden

Strahlen $o'$, $p$ die Geraden $T'T''$, $TT''$ sind. Es folgt daraus, dass die Lage des perspectivischen Centrums $T''$ von der zufälligen Wahl des Paares entsprechender Strahlen $a$, $a'$ für die Reihenbildung unabhängig ist, dass also auch die dritte

Fig. 28.




durch die Data bestimmte Gerade $bc'$, $b'c$ durch dasselbe gehen muss. Man erhält dasselbe also als Schnittpunkt von drei Geraden.

1) Zwei projectivische Strahlenbüschel von den Scheiteln $T$, $T'$ sind vollkommen bestimmt durch das perspectivische Centrum und ein Paar entsprechende Strahlen.

2) Dreht man das Büschel $T'$ um den Winkel $(o', o)$ und im Sinne desselben um seinen Scheitel, so wird es mit dem Büschel $T$ perspectivisch; ebenso $T$ mit $T'$ durch die Drehung $(p, p')$.

3) In den projectivischen Strahlenbüscheln $T$, $T'$ existieren wie in den projectivischen Reihen zwei Paare von Elementen, die das Doppelverhältniss auf ein einfaches Verhältniss reducieren (§ 16, 4.); es sind die entsprechenden Paare der Rechtwinkelstrahlen, Strahlenpaare $qq'$, $rr'$ (diese Bezeichnung wird kaum Zweideutigkeiten veranlassen) von der

Eigenschaft, dass sowohl $(q, r)$ als $(q', r')$ ein rechter Winkel ist. Für sie hat man

$$(a b q r) = (a' b' q' r') \text{ oder}$$

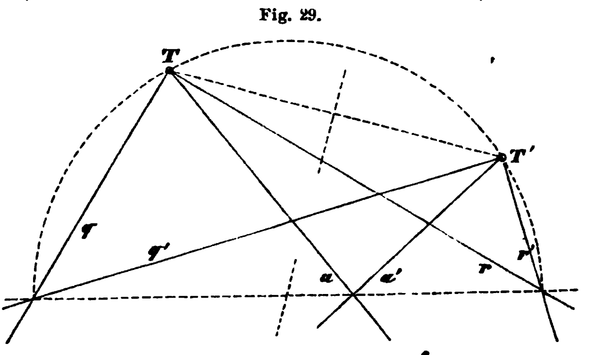
$$\frac{\sin(a,q)}{\sin(b,q)} : \frac{\sin(a,r)}{\sin(b,r)} = \frac{\sin(a',q')}{\sin(b',q')} : \frac{\sin(a',r')}{\sin(b',r')}, \text{ d. h.}$$

$\tan(a,q) : \tan(b,q) = \tan(a',q') : \tan(b',q')$ oder auch

$\tan(a',q') : \tan(a,q) = \tan(b',q') : \tan(b,q)$ und

$\tan(a',q') \cdot \tan(a,r) = \tan(b',q') \cdot \tan(b,r)$.

Fig. 29.



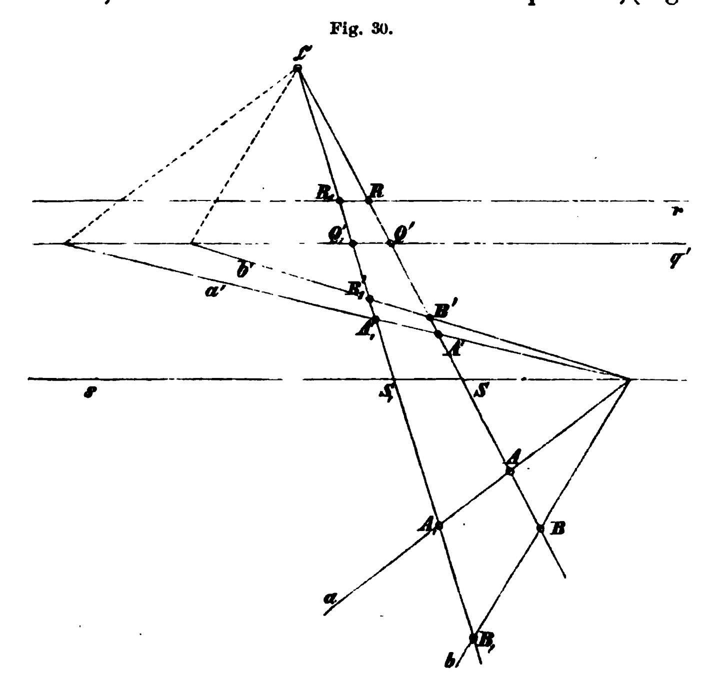

4) Um die entsprechenden Rechtwinkelpaare $qr$, $q'r'$ von zwei projectivischen Strahlenbüscheln $T$, $T'$ zu construieren, macht man dieselben durch Drehung des einen perspectivisch (2), bestimmt ihre perspectivische Axe und beschreibt den durch $T$, $T'$ gehenden Kreis, der seinen Mittelpunkt in ihr hat (Fig. 29.); derselbe schneidet die perspectivische Axe in den Fusspunkten der Strahlen $q$, $q'$ und $r$, $r'$ der entsprechenden Rechtwinkelpaare.

19. Die durch die Centralprojection gegebene **Abhängigkeit ebener Systeme** ist nun der Art, dass jeder geradlinigen Reihe $t$ der Originalebene eine zu ihr perspectivische aus demselben projicierenden Strahlen-Büschel geschnittene Reihe $t'$ der Bildebene entspricht; jedem Strahlenbüschel $T$ der Originalebene ein zu ihr perspectivisches aus demselben Büschel projicierender Ebenen steschnittenes und über derselben Reihe in der Spur $s$ stehendes Strahlenbüschel $T'$ der Bildebene. Durch die Umlegung der Originalebene in die

Bildebene (§ 11.) sind alle diese projectivischen Reihen und Büschel in perspectivischer Lage in einer Ebene vereinigt und es ist die Anwendung der allgemeinen Gesetze der Doppelverhältnissgleichheit auf die entsprechenden Reihen in den vom Collineationscentrum $\mathfrak{C}$ ausgehenden Strahlen und auf die entsprechenden Büschel aus den in der Collineationsaxe $s$ liegenden Punkten von besonderem Nutzen.

Ist $t$ ein Strahl aus dem Collineationscentrum, so dass $t'$ mit ihm zusammenfällt und den Punkten $A$, $B$ dieses Strahles andere Punkte $A'$, $B'$ desselben Strahls als Bilder entsprechen, (Fig. 30.)

Fig. 30.



und ist $S$ der zugehörige Punkt in der Collineationsaxe $s$, so gilt weil $\mathfrak{C}$ und $S$ sich selbst entsprechen — wir nennen sie die **Doppelpunkte** der vereinigten projectivischen Reihen — die Relation

$$(\mathfrak{C}SAB) = (\mathfrak{C}SA'B') \text{ d. h. } \frac{\mathfrak{C}A}{SA} : \frac{\mathfrak{C}B}{SB} = \frac{\mathfrak{C}A'}{SA'} : \frac{\mathfrak{C}B'}{SB'}$$

$$\text{oder } \frac{\mathfrak{C}A}{SA} : \frac{\mathfrak{C}A'}{SA'} = \frac{\mathfrak{C}B}{SB} : \frac{\mathfrak{C}B'}{SB'} \text{ d. h. } (\mathfrak{C}SAA') = (\mathfrak{C}SBB').$$

Bezeichnen $A_1$, $A_1'$ entsprechende Punkte für einen andern durch das Collineationscentrum $\mathfrak{C}$ gehenden Strahl $t_1$, $t_1'$ mit dem Punkt $S_1$ in der Collineationsaxe, so hat das Doppelverhältniss der Gruppe $\mathfrak{C} S_1 A_1 A_1'$ denselben Werth, wie das Vorige, weil die Geraden $AA_1$, $A'A_1'$ in einem Punkte $TT'$ der Collineationsaxe zusammentreffen und somit die Reihen $\mathfrak{C} SAA'$ und $\mathfrak{C} S_1 A_1 A_1'$ aus diesem Punkte perspectivisch sind. Also: Entsprechende Paare von Punkten einer centrischen Collineation in der Ebene bestimmen mit dem Centrum und dem Durchstosspunkt des Strahls, auf dem sie liegen, ein Doppelverhältniss, das weder von einem Paar zum andern im nämlichen Strahl, noch von einem Strahl zum andern seinen Werth verändert. Und wenn $aa'$, $bb'$ entsprechende Paare von Strahlen der Systeme sind, die von einem Punkte der Axe $s$ ausgehen und $c$ den von da nach dem Centrum gehenden Strahl bezeichnet, so hat man ebenso

$$(csaa') = (csbb') = const.$$

und die beiden Constanten sind einander gleich, weil die Reihen der erstern aus den Strahlenbüscheln der letztern geschnitten sind. Wir nennen diese constante Zahl das characteristische Doppelverhältniss der centrischen Collineation oder der Centralprojection, aus der sie entspringt und wollen sie mit $\Delta$ bezeichnen.

1) Sind $Q'$ und $R$ die Gegenpunkte des betrachteten Strahls $\mathfrak{C} S$ aus dem Centrum $\mathfrak{C}$, so ist für $A$, $A'$ als ein entsprechendes Paar (Fig. 30.)

$$(\mathfrak{C} SAA') = \Delta = (\mathfrak{C} SR\infty) = (\mathfrak{C} S\infty Q') \text{ d. h.}$$

$$\frac{\mathfrak{C} A}{SA} : \frac{\mathfrak{C} A'}{SA'} = \Delta = \frac{\mathfrak{C} R}{SR} = \frac{SQ'}{\mathfrak{C} Q'} \text{ ,}$$

oder das characteristische Doppelverhältniss der Centralcollineation ist auch das einfache Theilverhältniss, nach welchem auf jedem durch das Centrum gehenden Strahl $S\mathfrak{C}$ durch $Q'$ und $\mathfrak{C} S$ durch $R$ getheilt werden.

In Folge dessen ist $Q'$ von $S$ ebensoweit und in demselben Sinne entfernt wie $\mathfrak{C}$ von $R$, oder $q'$ von $s$ wie $\mathfrak{C}$ von $r$. (§ 9.)

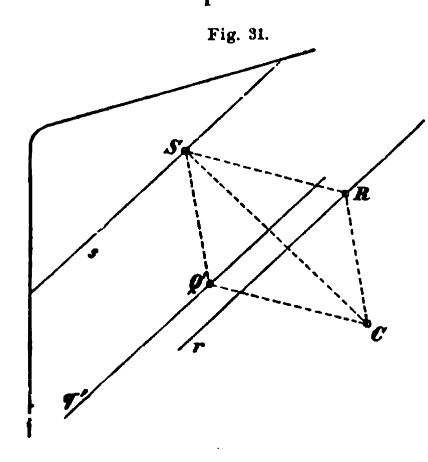
2) Man construiere die Centralcollineationen von den Characteristiken $\Delta = -\frac{3}{4}$ und $\Delta = \frac{3}{8}$.

3) Auf der Parallelen $t$ durch das Collineationscentrum zur Axe $s$ gilt für entsprechende Punktepaare $A, A'$ die Relation

$$\Delta = (\mathfrak{C}\infty AA') = \mathfrak{C}A : \mathfrak{C}A'$$

d. h. dieselben bilden zwei ähnliche Reihen mit dem Aehnlichkeitsverhältniss $\Delta$ und $\mathfrak{C}$ als sich selbst entsprechend, mit dem zweiten sich selbst entsprechenden Punkt im Unendlichen.

Fig. 31.




4) Wie lässt sich die vorher gefundene Aehnlichkeit zur Construction centrisch collinearer ebener Systeme benutzen? (Vergl. § 21. c. und § 30; auch § 40.). Je zwei entsprechende zur Collineationsaxe parallele Gerade zeigen gleichfalls die Aehnlichkeit der bezüglichen Reihen.

5) Denken wir vor der Umlegung die Bildebene, die Originalebene und die zu beiden respective parallelen Ebenen durch das Centrum $C$ der Projection (Fig. 31.), also die Geraden $s$, $q'$, $r$; endlich die Ebene $Cs$ und die zu $s$ normale projicierende Ebene, so schneidet die Letztere die vorbezeichneten fünf Ebenen in den vier Seiten und einer Diagonale $SC$ eines Parallelogramms $CRSQ'$, in welchem der Winkel bei $S$ die Tafelneigung $\alpha$ der Ebene ist. Bezeichnen wir $\angle Q'SC$ durch $\beta$ und $\angle CSR$ durch $\gamma$, so ist $\alpha = \beta + \gamma$ und

$$\Delta = \frac{SQ'}{CQ'} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{CR}{SR};$$

d. h. die characteristische Constante der Collineation ist das Theilverhältniss des Winkels $\alpha$ für die durch die Spur $s$ be-

stimmte projicierende Ebene. Sind die Bildebene, die Originalebene und die Characteristik $\Delta$ gegeben, so ist der Ort des Centrums diejenige Ebene, welche den Winkel $\alpha$ nach dem Theilverhältniss $\Delta$ theilt.

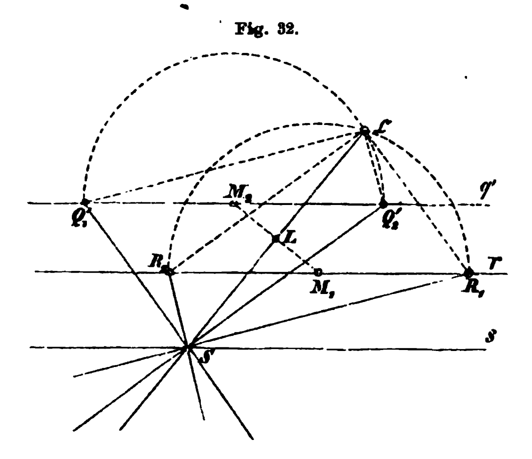
6) Betrachten wir in den concentrischen entsprechenden Büscheln aus einem Punkte der Collineationsaxe die Paare der entsprechenden Rechtwinkelstrahlen $q$, $q'$; $r$, $r'$, so ist

$$(c s q q') = \Delta = (c s r r'),$$

d. h. $\tan cq : \tan sq = \tan cq' : \tan sq'$; etc.

Sind $\mathfrak{C}$, $s$, $q'$, $r$ als Data der centrischen Collineation gegeben, so entsprechen jedem Punkte $TT'$ oder $S$ von $s$ als Scheitel bestimmte Rechtwinkelpaare $q$, $r$, $q'$, $r'$ oder $SR_1$, $SR_2$, $SQ_1'$, $SQ_2'$ (Fig. 32.),

Fig. 32.

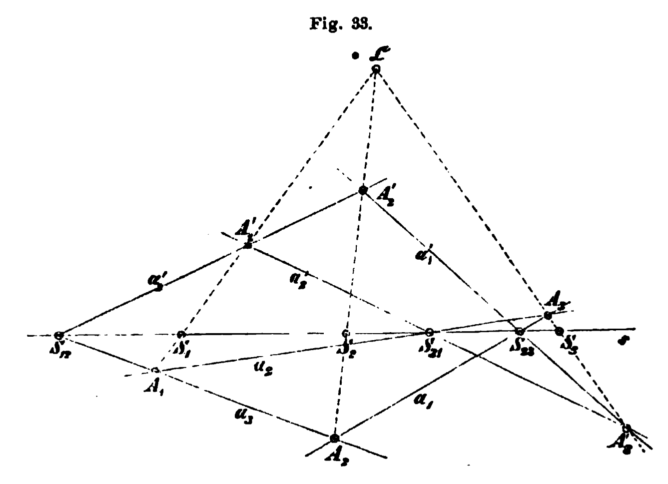


die man wie folgt construiert: Man halbiert $\mathfrak{C}S$ in $L$, errichtet dort die Normale zu ihr und schneidet mit derselben $q'$ in $M_2$ und $r$ in $M_1$; die Kreise, die von $M_2$ und $M_1$ als Mittelpunkten aus durch $\mathfrak{C}$ und $S$ gehen, schneiden ihre Durchmesser $q'$ und $r$ in den Gegenpunkten $Q_1'$, $Q_2'$ und $R_1$, $R_2$ der entsprechenden Paare der Rechtwinkelstrahlen. Man begründet die Construction durch die Bemerkung, dass von den beiden concentrischen projectivischen

Büscheln $csqr$, $csq'r'$ jedes parallel sich selbst nach 𝔈 verlegt mit dem andern perspectivisch sein muss, wo dann $q'$, respective $r$ als die perspectivischen Axen derselben entstehen; dass aber hiernach die Construction des § 18., 4. Anwendung finden muss. Das ist, was die angegebene Construction vollzieht. Die Halbierungslinien der von den Doppelstrahlen $c$, $s$ gebildeten Winkel halbieren auch die Winkel der Rechtwinkelpaare $qr'$, $q'r$.

7) Wenn die Ecken von zwei Dreiecken $A_1 A_2 A_3$, $A_1' A_2' A_3'$ (Fig. 33.) in Paaren $A_1$, $A_1'$ etc. in geraden Linien aus einem Centrum 𝔈 liegen, so schneiden sich die Paare ihrer entsprechenden Seiten $A_1 A_2$, $A_1' A_2'$; $A_2 A_3$, $A_2' A_3'$; $A_3 A_1$, $A_3' A_1'$ in drei Punkten $S_{12}$, $S_{23}$, $S_{31}$ einer geraden Linie $s$; und umgekehrt.

Fig. 33.



Betrachtet man nämlich $s$ als die Gerade $S_{23} S_{31}$ und nennt ihre Schnittpunkte mit den Strahlen $A_1 A_1'$, $A_2 A_2'$, $A_3 A_3'$ respective $S_1$, $S_2$, $S_3$, so gelten, sofern beide Dreiecke in derselben Ebene liegen, die Relationen perspectivischer Reihen aus $S_{23}$ und $S_{31}$

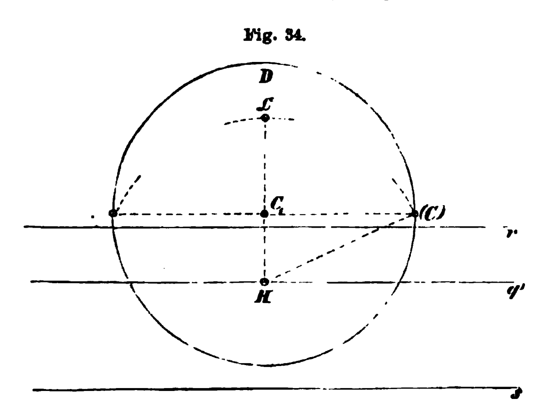
$$(\mathfrak{C} S_2 A_2 A_2') = (\mathfrak{C} S_3 A_3 A_3'), \quad (\mathfrak{C} S_3 A_3 A_3') = (\mathfrak{C} S_1 A_1 A_1')$$

und somit auch $(\mathfrak{C} S_1 A_1 A_1') = (\mathfrak{C} S_2 A_2 A_2')$ d. h. auch diese Reihen sind in Perspective aus $S_{12}$, und somit

$S_{12}$, $S_{23}$, $S_{31}$ in einer Geraden $s$. Dass der umgekehrte Satz gilt, beweist man mit Leichtigkeit, indem man die Characteristik der entsprechenden Centralcollineation durch die Büschel aus $S_{12}$, $S_{23}$, $S_{31}$ ausdrückt, welche paarweise perspectivisch sind für die Strahlen $A_1 A_1'$, etc. als ihre Axen. Wenn beide Dreiecke nicht in derselben Ebene liegen, so liefert die Anschauung ihres Verhältnisses zum Centrum 𝔈 als zweier ebener Schnitte des Mantels einer dreiseitigen Pyramide einen unmittelbaren Beweis. Darauf lässt sich aber der Beweis für die Lage in derselben Ebene zurückführen.

8) Wenn von zwei ebenen Systemen das eine die Centralprojection des andern ist, so bleiben sie in solcher Beziehung auch bei Drehung des einen um ihre Durchschnittslinie. (Vergl. § 15, 3.) Der Ort,

Fig. 34.




den das Centrum der Projection bei dieser Bewegung beschreibt, ist ein Kreis $K$, dessen Ebene zu jener Schnittlinie normal ist und der seinen Mittelpunkt in der Fluchtlinie der Originalebene in der Anfangslage hat. Einer gegebenen centrischen Collineation ebener Systeme 𝔈$sq'$ (Fig. 34.) entsprechen somit unendlich viele Centralprojectionen von verschiedenen Distanzen und Hauptpunkten; jene haben den Abstand des Collineationscentrums 𝔈 von $q'$ zu ihrem Maximum, diese liegen innerhalb der Strecke 𝔈𝔈*,

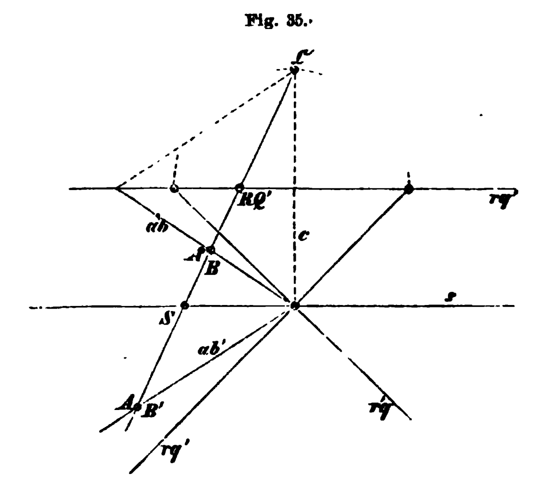
welche durch die beiden Umlegungen des Centrums (§ 9.) begrenzt ist. (Vergl. 5.)

20. Die characteristische Zahl $\Delta$ giebt nach ihren Werthen eine **Classification der Centralprojectionen**, deren Sinn aus § 19; 5. und 8. erhellt. Unter diesen Werthen ist der besondere Fall $\Delta = -1$, der Fall des harmonischen Verhältnisses, zu beachten. Die projicierende Ebene der Collineationsaxe $s$ halbiert dann den Winkel $\alpha$ zwischen der Bildebene und Originalebene; man hat wie auch hieraus direct folgt:

$$-1 = \frac{SQ'}{\mathfrak{C}Q'} = \frac{\mathfrak{C}R}{SR},$$

d. h. die Gegenpunkte $Q'$, $R$ sind in der Mitte zwischen den sich selbst entsprechenden Punkten $\mathfrak{C}$, $S$ oder die Gegenaxen $q'$, $r$ (Fig. 35.) in der Mitte zwischen Centrum und Collinea-

Fig. 35.




tionsaxe vereinigt. Als characteristisch für diese harmonische Centralcollineation ergiebt sich dann allgemein für ein beliebiges Paar entsprechender Punkte

$$(\mathfrak{C}SAA') = -1 = \frac{\mathfrak{C}A}{SA} : \frac{\mathfrak{C}A'}{SA'} = \frac{\mathfrak{C}A'}{SA'} : \frac{\mathfrak{C}A}{SA} = (\mathfrak{C}SA'A)$$

und ebenso

$$(csaa') = (csa'a)$$

für entsprechende Strahlen, d. h. man kann in einer derar-

tigen Centralcollineation je zwei entsprechende Punkte und ebenso je zwei entsprechende Strahlen vertauschen — das Bild als Original und das Original als Bild betrachten — ohne das Entsprechen zu stören. Ist $ABCD\cdots$ eine Gruppe von Punkten des Originals — denken wir sie als die aufeinander folgenden Ecken eines Vielecks — und $A'B'C'D'\cdots$ die Gruppe der entsprechenden Punkte des Bildes, so verhalten sich auch als Original und Bild die Gruppen

$$A'BCD\cdots,\ AB'C'D'\cdots;\ AB'C'D\cdots,\ A'BCD'\cdots;$$
$$A'BCD'\cdots,\ AB'C'D\cdots;\ \text{etc.}$$

Ebenso für beliebige Gruppen von Geraden und ihre entsprechenden.

Zwischen zwei derartigen Systemen besteht projectivisches Entsprechen mit Vertauschbarkeit; man hat in den Reihen entsprechender Punkte auf den Strahlen aus dem Centrum projectivische Reihen mit vertauschbarem Entsprechen und man hat in den Büscheln entsprechender Strahlen aus den Punkten auf der Axe projectivische Büschel mit vertauschbarem Entsprechen. Man nennt solche projectivische Reihen in derselben Geraden, solche Strahlenbüschel in derselben Ebene und vom nämlichen Scheitel, solche ebene Systeme in derselben Ebene mit vertauschbarem Entsprechen involutorische Reihen, Büschel, ebene Systeme.

1) Man construiere eine involutorische Centralcollineation, erläutere das vertauschbare Entsprechen an Original und Bild einer ebenen Figur und besonders die Vereinigung der Gegenaxen in der Mitte zwischen $\mathfrak{C}$ und $s$ als die unerlässliche Bedingung seiner Möglichkeit. Wie gestaltet sich die Construction mit Benutzung der Parallelen zu $s$ durch $\mathfrak{C}$ und der symmetrischen Reihen in derselben?

(Vgl. § 19; 3, 4.)

2) Die Relationen $(\mathfrak{C}SAA') = -1 = (csaa')$ sagen aus, dass die Doppelelemente in den involutorischen Reihen und Büscheln einer solchen Collineation mit jedem Paar entsprechender Elemente derselben eine harmonische Gruppe von Punkten oder Strahlen bilden.

3) In den involutorischen Büscheln aus den Punkten der Collineationsaxe fallen die entsprechenden Rechtwinkelpaare $q, q'$ mit $r', r$ zusammen (Fig. 35.), nämlich in den Halbierungslinien der von den Strahlen $c$ und $s$ gebildeten Winkel. Man beweise diess aus dem charakteristischen Doppelverhältniss (§ 19, 6.) und aus der Construction.

4) Wenn bei zwei in derselben Geraden vereinigten projectivischen Reihen $t, t'$ ein Paar von Punkten sich vertauschungsfähig entsprechen, so thun diess alle Paare und die Reihen sind involutorisch. Legt man also zwei projectivische Reihen so auf einander, dass ihre Gegenpunkte $Q', R$ sich decken, — in $M$, dem Centralpunkt, Mittel- oder Hauptpunkt der Involution — so sind sie in Involution; in der That, alle die entsprechend gleichen Strecken des einen Systems (§ 15) fallen verkehrt auf einander. Man kann zwei projectivische Reihen daher in zweierlei Weise involutorisch machen; bei der einen kommen die entsprechenden Nullstrecken $G$ mit $G'$, $H$ mit $H'$ zur Deckung und bilden zwei sich selbst entsprechende oder Doppelpunkte $G$ und $H$; bei der andern fällt $G$ auf $H'$, $G'$ auf $H$ und Doppelpunkte existieren nicht. Die erste Art entspricht offenbar der Involution ebener Systeme durch Centralprojection.

5) Projectivische Büschel von einerlei Scheitel in derselben Ebene werden involutorisch, wenn man ihre entsprechenden Rechtwinkelpaare zur Deckung bringt, $q$ mit $r'$, $q'$ mit $r$; man sagt, dass diese die Axen der Involution bilden. Offenbar können solche Büschel in zweierlei Art involutorisch gemacht werden. Wir schliessen daraus, dass es in projectivischen Strahlenbüscheln zwei Systeme entsprechend gleicher Winkel giebt, die zu den entsprechenden Rechtwinkelstrahlen in analoger Beziehung stehen, wie die gleichen entsprechenden Strecken zu den Gegenpunkten; etc. (Vergl. § 15.)

6) Die Relation $(ABM\infty) = (A'B'\infty M)$ giebt:

$$AM.\,A'M = BM.\,B'M = const. \quad (\S 15.)$$

und eine entsprechende für die Büschel in Bezug auf die Rechtwinkelstrahlen. Für die Doppelpunkte ist $\overline{GM}^2 = \overline{HM}^2 = const.$

7) Jeder Punkt der perspectivischen Axe $t''$ (§ 17.) von zwei projectivischen Reihen $t$, $t'$ bestimmt mit diesen zwei projectivische Strahlenbüschel in Involution. Jeder Strahl aus ihrem perspectivischen Centrum $T''$ bestimmt mit zwei projectivischen Büscheln $T$, $T'$ zwei projectivische Reihen in Involution. (§ 18.)

8) Wenn in der Bildebene zu den Punkten derselben die Spuren der zu den zugehörigen projicierenden Strahlen normalen projicierenden Ebenen bestimmt sind (§ 10.), so wird in jeder in ihr gelegenen Geraden durch ihre Punkte und durch die Schnittpunkte mit den Spuren der Normalebenen, welche ihnen entsprechen, eine Involution von Paaren bestimmt, die den Fusspunkt der Normale aus dem Hauptpunkt $C_1$ auf ihre Gerade zum Mittelpunkt hat; ihre Doppelpunkte sind nicht reell.

21. Als Specialfälle der vorigen allgemeinen Beziehungen ergeben sich aus den speciellen Lagen des Centrums und der Axe der Collineation (vergl. § 17, 4.) die folgenden.

a) Das Collineationscentrum $\mathfrak{C}$ liegt unendlich fern. Man hat (Fig. 36. a., b.)

$$\Delta = (\infty SAA') = (cs\,aa');$$

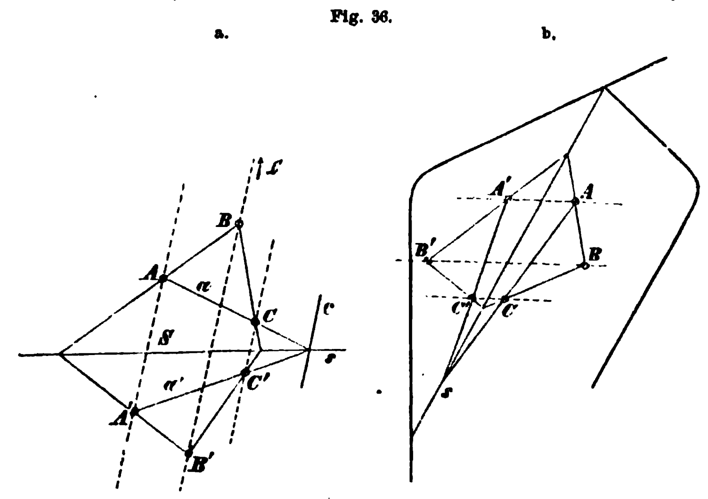
für die entsprechenden Punkte ist also $SA' : SA = \Delta$, entsprechende Gerade theilen einen Winkel von constanter Grösse nach dem constanten Doppelverhältniss $\Delta$. Für die Gegenpunkte hat man

$$\Delta = (\infty S \infty Q') = (\infty S R \infty)$$

d. h. $Q'$, $R$ müssen gleichzeitig unendlich fern sein; die Gegenaxen $q'$, $r$ sind nach der Umlegung in der unendlich fernen Geraden der Ebenen vereinigt und ihre Punkte bilden zwei vereinigte projectivische Reihen, für welche das Centrum und die Richtung der Axe die Doppelpunkte

sind. Parallele Gerade des Originals haben parallele Bilder. — Diess ergiebt sich auch aus dem Vorgang des Projicierens mit unendlich fernem Centrum direct.

Fig. 36.

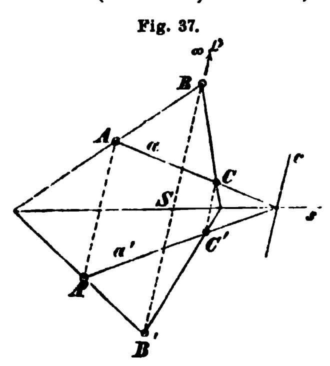



Diese Charactere bezeichnen die allgemeine Verwandtschaft der parallel-projectivischen Systeme, die man die Affinität nennt.

b) Das Collineationscentrum liegt im Unendlichen und die Characteristik ist $\Delta = -1$, man hat also Affinität und zugleich Involution. Es ist (Fig. 37.)

$$(\infty SAA') = -1, \text{ also } SA' = -SA;\ (csaa') = -1;$$

Fig. 37.



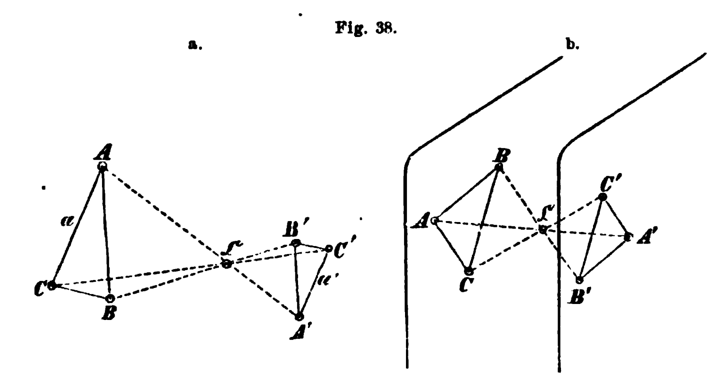

d. h. entsprechende Punktepaare liegen in fester Richtung äquidistant von der Axe $s$; entsprechende Strahlenpaare bilden stets mit dieser Richtung und der Axe harmonische Büschel. Diese Charactere bezeichnen die schiefe und normale Symmetrie in Bezug auf eine Axe. Die projicierenden Strahlen sind parallel einer der Ebenen, welche den Neigungswinkel $\alpha$ der Bildebene und Originalebene und sein Supplement $(180^0 - \alpha)$ halbieren.

c) Die Collineationsaxe liegt unendlich fern. Man hat (Fig. 38. a., b.)

$$\triangle = (\mathfrak{C} \infty A A') = \mathfrak{C}A : \mathfrak{C}A' = (c \infty a a');$$

die Abstände entsprechender Punkte vom Centrum sind in constantem Verhältniss; entsprechende Gerade sind einander parallel. Diess ist der Character von ähnlichen und ähnlich gelegenen Systemen, $\mathfrak{C}$ ist ihr Aehnlichkeitspunkt. Es entspricht der Centralprojection für jede zur Bildebene parallele Originalebene

Fig. 38.




(vergl. § 17, 4.); man macht davon fast immer Gebrauch, indem man einen bestimmten Maassstab der Verjüngung für die Darstellung des Objectes wählt, sei dasselbe nun durch Centralprojection oder durch Parallelprojection darzustellen — man zeichnet von der Abbildung, wie sie direct entstehen würde, ein verjüngtes ähnliches Bild.

d) Die Collineationsaxe liegt im Unendlichen und die Characteristik ist $\triangle = -1$; man hat also Aehnlichkeit in ähnlicher Lage und zugleich Involution. Es ist (Fig. 39.)

$$\triangle = (\mathfrak{C} \infty A A') = -1 = (c \infty a a');$$
$$\text{also } \mathfrak{C}A = -\mathfrak{C}A'$$

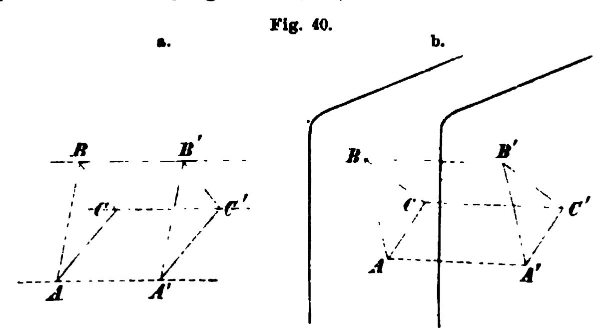
Fig. 39.

oder entsprechende Punkte liegen gleichweit und in entgegengesetztem Sinne vom Centrum

entfernt, entsprechende Gerade sind parallel. Diess ist der Character von Systemen, die man **centrisch symmetrisch** nennt; sie entsprechen der Centralprojection für diejenige Ebene, welche der Bildebene parallel und äquidistant vom Centrum mit ihr ist. Man sieht, **die Symmetrien ebener Systeme sind besondere Fälle ihrer Involution.**

c) Die Collineationsaxe und das Collineationscentrum liegen im Unendlichen, d. h. es findet gleichzeitig Affinität und Aehnlichkeit in ähnlicher Lage statt, man erhält **congruente Systeme.** Dieselben entsprechen der Parallelprojection für Ebenen, welche der Bildebene parallel sind. (Fig. 40. a., b.)

Fig. 40.




So sind alle Specialfälle der Projection des ebenen Systems in der Characteristik $\Delta$ ausgesprochen.

22. Durch das Vorhergehende begründet sich endlich auch die **allgemeine Bestimmung und Construction der Projectivität ebener Systeme.** Die Bestimmungs-Elemente müssen ausreichen, um die Projectivität aller entsprechenden Reihen und Büschel zu bedingen und diess wird offenbar durch vier Paare entsprechender Punkte oder Geraden erreicht, von denen keine drei in einer geraden Linie liegen, respective durch einen Punkt gehen. Sind $A, B, C, D$ vier solche Punkte im einen und $A', B', C', D'$ die entsprechenden im andern System, so hat man für jedes neue Paar entsprechender Punkte $X, X'$ die Gleichheiten

$$(A \cdot BCDX) = (A' \cdot B'C'D'X'), (C \cdot ABDX) = (C' \cdot A'B'D'X')$$

unter andern analogen. Ist also $X$ gegeben, so construiert

man den zu $AX$ entsprechenden Strahl $A'X'$ nach der ersten und den zu $CX$ entsprechenden Strahl $C'X'$ nach der zweiten durch die Methode des § 18 mit dem Lineal allein und erhält somit $X'$. So sind, unabhängig von der centralen Lage, welche die Umlegung der central-projectivischen ebenen Systeme gab, alle Paare entsprechender Punkte von zwei projectivischen ebenen Systemen durch vier von ihnen linear bestimmt. Jede beliebige Gerade des einen Systems kann aus ihrer entsprechenden im andern abgeleitet werden, indem man zu zwei Punkten der Letztern so die entsprechenden sucht.

Sind $a, b, c, d$ und $a', b', c', d'$ vier Paare entsprechender Geraden, so giebt jede neue Gerade $x$ mit ihrer entsprechenden $x'$ unter andern analogen die Gleichheiten

$$(a \cdot bcdx) = (a' \cdot b'c'd'x'),\ (c \cdot abdx) = (c' \cdot a'b'd'x')$$

und so die lineare Construction des $x'$ zu $x$ mittelst der entsprechenden Punktepaare projectivischer Reihen $ax$, $a'x'$; $cx$, $c'x'$ nach § 17.

Die Bestimmung der Systeme in centraler Lage durch das sich selbst entsprechende Centrum $\mathfrak{C}$, durch zwei Punkte $S_1$, $S_2$ der Spur oder Axe $s$, welche mit $S_1'$, $S_2'$ respective zusammen fallen und einen Punkt $Q'$ der Gegenaxe $q'$ oder $R$ in $r$ dessen entsprechender $Q$ respective $R'$ die Richtung des nach ihm gehenden Strahles aus dem Centrum ist, lässt sich als specielle Form hiervon betrachten. Zugleich bilden die Strahlen aus dem Centrum $\mathfrak{C}S_1$, $\mathfrak{C}S_2$ und die Geraden $s$ und $q'$ oder $r$ vier Gerade, deren entsprechende bekannt sind, zu den drei ersten als mit ihnen sich deckend, zu $q'$ oder $r$ im Unendlichen.

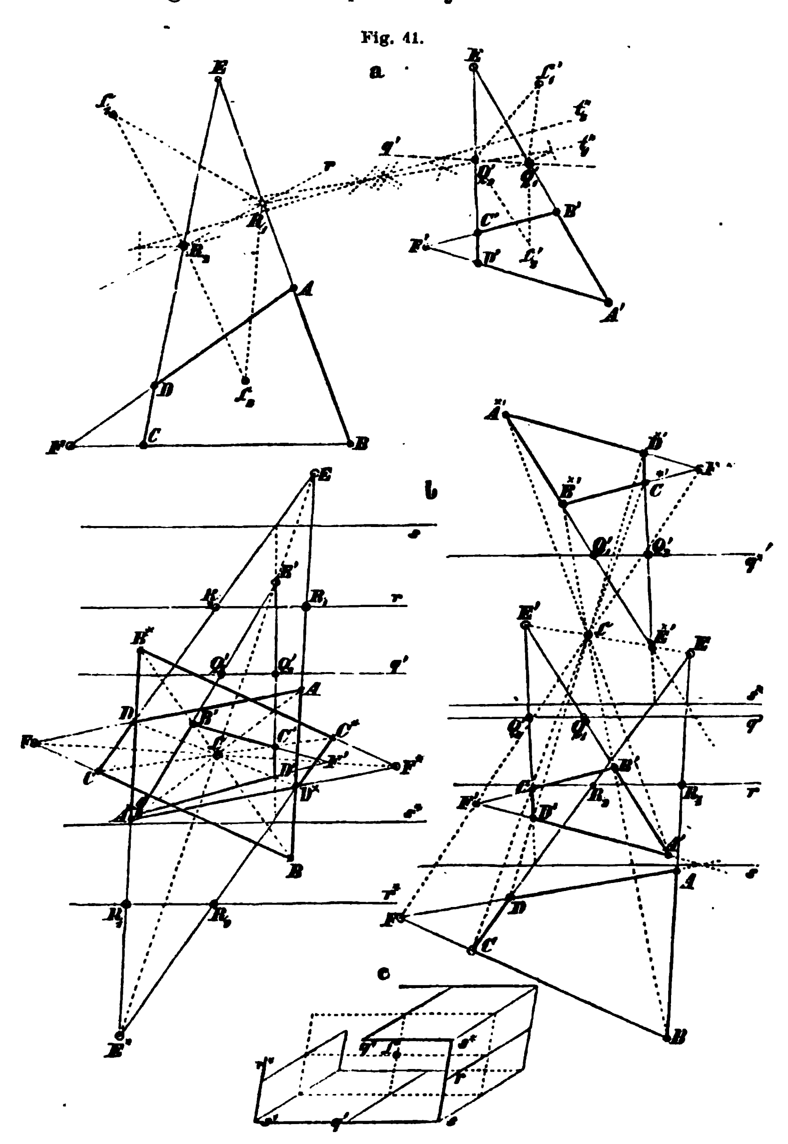
1) Zwei beliebige Vierecke $ABCD$ und $A'B'C'D'$ lassen sich stets als Original und zugehörige Centralprojection betrachten und daher in centrisch-collineare Lage bringen. Sind die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare $AB$, $CD$ mit $E$, also $A'B'$, $C'D'$ mit $E'$, $BC$, $DA$ mit $F$, $B'C'$, $D'A'$ mit $F'$ bezeichnet, so hat man die Projectivitäten von Reihen (Fig. 41. a.)

$$(ABE\cdots) = (A'B'E'\cdots),\ (BCF\cdots) = (B'C'F'\cdots);$$

man bestimmt in denselben die Paare der Gegenpunkte $R_1$, $R_2$ in $AB$, $BC$ und $Q_1'$, $Q_2'$ in $A'B'$, $B'C'$

und erhält damit in den Geraden $R_1 R_2$ und $Q_1' Q_2'$ die Gegenaxen $r$ und $q'$ der Systeme.

Fig. 41.



Da die Strahlen vom Centrum 𝔈 der Collineation nach den Punkten $R_1$, $R_2$ dieselben Winkel

mit der Geraden $r$ bilden, wie die Bilder der zugehörigen Geraden $A'B'$, $B'C'$ in $Q_1'$, $Q_2'$ mit der Geraden $q'$ und die Strahlen von $\mathfrak{C}$ nach $Q_1'$, $Q_2'$ dieselben Winkel mit $q'$ wie die Originale $AB$, $BC$ in $R_1$, $R_2$ mit $r$ (§ 9.), so erhält man durch Antragen dieser Winkel in jedem der beiden Systeme zwei Lagen, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$; $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{C}_2'$ für das Centrum $\mathfrak{C}$, orthogonalsymmetrisch zu $r$ respective $q'$. Bringt man die Systeme nun so zur Deckung, dass ein Paar von jenen $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_1'$; $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_2'$ auf einander fallen, während zugleich die Gegenaxen $q'$, $r$ zu einander und die Strahlenpaare $\mathfrak{C}R_1$, $A'B'$; $\mathfrak{C}R_2$, $C'D'$; $\mathfrak{C}Q_1'$, $AB$; $\mathfrak{C}Q_2'$, $CD$ parallel werden, so sind die Vierecke $ABCD$, $A'B'C'D'$ in centrisch collineare Lage gebracht, und man erhält die Collineationsaxe $s$ als den Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Paare von Geraden $AB$, $A'B'$, etc. parallel $q'$, $r$, und ebenso weit im entgegengesetzten Sinne von $\mathfrak{C}$ entfernt, wie die Mitte zwischen $q'$ und $r$.

Jeder der beiden angezeigten Vereinigungen entsprechen zwei Lagen der Vierecke und in der Figur 41. b. sind die dem $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_1'$ entsprechenden rechts, die für $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{C}_2'$ links dargestellt; dem Paar $ABCD$, $A'B'C'D'$ entsprechen links wie rechts $s$, $q'$, $r$, den Paaren $ABCD$, $A^{*\prime}\,B^{*\prime}\,C^{*\prime}\,D^{*\prime}$ rechts und $A^*B^*C^*D^*$, $A'B'C'D'$ links aber $s^*$, $q'$, $r$ und $s^*$, $q'$, $r^*$. Die Vergleichung der Abstände zwischen den entsprechenden Geraden $s, q', r$ in beiden Figuren macht die Symmetrieverhältnisse der Lagen der Ebenen von Bild und Original ersichtlich.

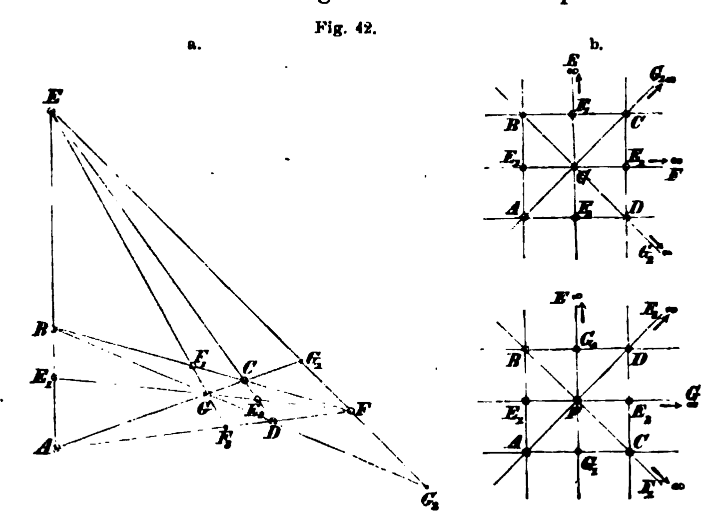
Eine Scitze c. zeigt endlich, dass sie auf zwei verschiedene räumliche Lagen zurückkommen und die jedesmaligen beiden Umlegungen repräsentieren, nämlich $A$ rechts und $A^{*\prime}\cdots$ rechts, $A'\cdots$ links; und $A'$ rechts mit $A^{*\prime}$ rechts und $A^{*\prime}\cdots$ links.

2) Welche Specialitäten ergeben sich für die centrische Collineation eines Quadrats mit einem beliebigen Viereck? Wie könnte dieselbe ohne Zuhilfe-

nahme der Projectivitätsgesetze hergestellt werden, auf Grund der Rechtwinkligkeit der Seiten und Diagonalen des Quadrats?

3) Aus der Collineation eines Quadrats $ABCD$ mit einem beliebigen Viereck $A'B'C'D'$ ergeben sich allgemeine projectivische, d. h. durch Projection nicht zerstörbare Eigenschaften der Vierecke. Sind die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare $A'B'$, $C'D'$; $B'C'$, $A'D'$; $C'A'$, $B'D'$ respective $E'$, $F'$, $G'$ (Fig. 42. a.) so liegen von den entsprechenden Punkten $E$, $F$, $G$ zwei in unendlicher Ferne $E$, $F$ und der dritte ist der Mittelpunkt des Quadrats $G$. (Fig. 42. b.) Durch die erlaubte Veränderung der Ordnung der Buchstaben $A$, $B$, $C$, $D$ kann jeder der drei zum Mittelpunkt gemacht werden. Im gedachten Falle entsprechen den

Fig. 42.




Geraden $E'F'$, $F'G'$, $G'E'$ die unendlich ferne Gerade $q$ und die Parallelen aus dem Mittelpunkt zu den Seiten des Quadrats. Die entsprechenden Reihen und Büschel der Figuren sind projectivisch; nennt man also noch die Punkte $A'C'$, $E'F'$; $B'D'$, $E'F'$ respective $G_1'$, $G_2'$ (Fig. 42. a.) und ihre entsprechenden im Unendlichen $G_1$, $G_2$ (Fig. 42. b.), so erhält man die Relationen

$$(A'C'G'G_1') = (ACGG_1) = -1,$$
$$(B'D'G'G_2') = (BDGG_2) = -1,$$

weil $G$ die Mitte zwischen $A$ und $C$, respective $B$ und $D$ ist und $G_1, G_2$ unendlich fern sind; analog folgt für die Büschel

$$(G' \cdot A'B'E'F') = (G \cdot ABEF) = -1,$$

weil die Seitenrichtungen des Quadrats die Winkel seiner Diagonalen halbieren. Man giebt diesen allgemeinen Eigenschaften aller Vierecke, denen analoge aller Vierseite beizugesellen sind, zweckmässigen Ausdruck durch die folgende Terminologie:

Vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ bestimmen ein vollständiges Viereck mit drei Paaren von Gegenseiten $AB$, $CD$; $CB$, $DA$; $CA$, $BD$, deren Schnittpunkte $E$, $F$, $G$ Diagonalpunkte desselben und durch die Diagonalen $EF$, $FG$, $GE$ verbunden heissen sollen.

In jedem Diagonalpunkte bilden die Seiten und die Diagonalen, die durch ihn gehen, ein harmonisches Büschel.

Vier Gerade $a, b, c, d$ bestimmen ein vollständiges Vierseit mit drei Paaren von Gegenecken $ab$, $cd$; $bc$, $da$; $ca$, $bd$, deren Verbindungslinien $e, f, g$ Diagonalen desselben und sich in den Diagonalpunkten $ef$, $fg$, $ge$ schneidend heissen sollen.

In jeder Diagonale bilden die Ecken und die Diagonalpunkte, die auf ihr liegen, eine harmonische Reihe.

4) Mit Hilfe der vorigen Sätze construiert man zu jedem Punkte $C$ in Bezug auf zwei Punkte $A$, $B$ derselben Geraden den vierten harmonischen Punkt $D$ und zu jedem Strahle $c$ in Bezug auf zwei Strahlen $a$, $b$ desselben Büschels den vierten harmonischen Strahl $d$. Die erste Construction ist aus der Fig. 25., p. 40. zu erhalten, wenn man noch die Gerade $AT$ zieht, die $BC'$ in $D'$ schneidet; dann sind $B'D'D$ in einer geraden Linie.

Der Gebrauch des Zirkels ist vermieden, die Construction linear.

5) Welche Gestalt erhalten die Sätze von 3), wenn eine der Ecken $D$ des Viereks oder eine der Seiten $d$ des Vierseits als unendlich fern gedacht wird?
6) Wenn zwei collineare ebene Systeme einen Strahlenbüschel Strahl für Strahl entsprechend gemein haben, so haben sie auch eine gerade Reihe Punkt für Punkt entsprechend gemein und sind in perspectivischer oder centrischer Lage (Vergl. §. 19., 7)

23. Blicken wir zurück. Die Centralprojection fügt zu dem Punkt als seinen Schein die projicierende Gerade mit der Punktreihe seiner Bilder und zu der geraden Linie oder Punktreihe als Schein das projicierende Strahlenbüschel oder die projicierende Ebene; und insofern eine Ebene durch ein Strahlenbüschel repräsentiert wird, führt die Centralprojection als den Schein des Letztern das projicierende Ebenenbüschel als die dritte für die Untersuchung nöthige Anschauung ein. Diese drei, die gerade Punktreihe, das ebene Strahlenbüschel und das Ebenenbüschel, bilden eine in sich abgeschlossene Gruppe gegenüber dem Prozess des Projicierens, der aus der Bildung des Scheines und der nachfolgenden des Schnittes zusammengesetzt ist (vergl. p. 2. unter Methode) und sie sind im Falle ihres Zusammenhanges durch Centralprojection durch das nämliche Gesetz verbunden. Jedes der drei Gebilde geht beim Prozess des Projicierens aus jedem der zwei anderen hervor: Die Punktreihe als Schnitt aus dem Strahlenbüschel durch eine Gerade seiner Ebene, als Schnitt aus dem Ebenenbüschel durch eine Gerade; das Strahlenbüschel als Schein der Punktreihe aus einem Punkte und als Schnitt eines Ebenbüschels durch eine Ebene; das Ebenenbüschel als Schein des Strahlenbüschels aus einem Punkte und als Schein der Punktreihe aus einer Geraden — diese Erweiterung des Ausdrucks ist zweckmässig. Sodann, diese drei Gebilde sind, sowie sie paarweise beim Prozess des Projicierens aus einem Centrum auftreten, in perspectivischer Lage und genügen dem Gesetz der Doppelverhältnissgleichheit entsprechender Gruppen, oder sie sind projectivisch in perspectivischer Lage; sie heissen projectivisch — ohne Beifügung — wenn diese specielle Lage aufgehoben wird. Man

nennt diese drei Gebilde die projectivischen Elementargebilde oder die Grundgebilde der ersten Stufe.

Um die unendliche Mannigfaltigkeit der Figuren einer Ebene zu projicieren, betrachtete die Centralprojection das ebene System entweder als eine Vereinigung von unzählig vielen Punkten oder als eine solche von unzählig vielen Geraden (§ 11.); jene konnte sie als vertheilt in unendlich viele gerade Reihen, diese als vertheilt in unzählig viele Strahlenbüschel auffassen, so dass jeder einzelne Punkt als gemeinsamer Punkt von zwei solchen Reihen und jede einzelne Gerade als gemeinsamer Strahl von zwei solchen Büscheln bestimmt ist. Das ebene System ist in beiderlei Betracht eine Vereinigung von unendlich vielen Grundgebilden erster Stufe. Es wird nun projiciert durch die Verbindung aller seiner Elemente mit dem Centrum der Projection, also durch die Gesammtheit der projicirenden Strahlen seiner Punkte — man sagt durch ein Strahlenbündel — oder der projicirenden Ebenen seiner Geraden — man sagt durch ein Ebenenbündel; also durch eine Unendlichkeit von projicierenden Strahlenbüscheln seiner geraden Reihen nach der ersten Auffassung und durch eine Unendlichkeit von projicierenden Ebenenbüscheln seiner Strahlenbüschel nach der zweiten. Der Schein des ebenen Systems, das projicierende Strahlenbündel oder Ebenenbündel ist eine Vereinigung von unendlich vielen Grundgebilden erster Stufe. Man nennt darum das ebene System von Punkten oder Strahlen und das Strahlen- oder Ebenenbündel die Gruudgebilde zweiter Stufe. Die constituierenden Grundgebilde erster Stufe im ebenen System und im projicierenden Bündel sind im Falle der Projection perspectivisch und bleiben, wenn ihr Entsprechen bei Aufhebung dieser Lage festgehalten wird — und dies allein macht die Brauchbarkeit der Projectionen aus — projectivisch; die projectivischen Eigenschaften der Gebilde erster Stufe führen zu denen der Gebilde zweiter Stufe durch Zusammensetzung. (§ 16 f., § 22.)

Die natürliche Fortsetzung dieser Betrachtungsweise ist es, dass der Raum als die unendliche Menge seiner Punkte, seiner Ebenen und seiner Geraden betrach-

tet werden muss. Als Punktesystem ist er die Vereinigung von unendlich vielen ebenen Punktsystemen, die in ein Ebenenbüschel gruppiert gedacht werden dürfen; als Ebenensystem ist er die Vereinigung von unendlich vielen Ebenenbündeln, deren Scheitel als eine gerade Reihe bildend angesehen werden können. In beiderlei Betracht setzt er sich aus den Gebilden zweiter Stufe ebenso zusammen, wie diese aus denen der ersten zusammengesetzt sind; er wird darum als ein Grundgebilde dritter Stufe bezeichnet. Es giebt auch wirklich eine Abbildung des Raumes durch den Raum, bei welcher — ganz analog den Verhältnissen der centrischen Collineation ebener Systeme, bei denen die entsprechenden Grundgebilde erster Stufe in perspectivischer Lage für ein Centrum sind — die entsprechenden Grundgebilde erster und zweiter Stufe, aus denen der Originalraum und der Bildraum sich zusammensetzen, in perspectivischer Lage für ein Centrum sind. (Vergl. §36f.) Sie wird als centrische Collineation räumlicher Systeme bezeichnet und liefert die Modellierungs-Methoden der darstellenden Geometrie. Betrachtet man den Raum als den Inbegriff aller seiner Geraden, so kann man dieselben in die Strahlenbündel vertheilen, deren Scheitel die sämmtlichen Punkte einer Ebene sind und erkennt ihn also aus Gebilden zweiter Stufe so zusammengesetzt, wie diese aus den Elementen Punkt und Strahl; er ist also in diesem Sinne als Gebilde vierter Stufe zu bezeichnen. Die Uebertragung der Eigenschaften aus denen der Gebilde niederer Stufe durch Zusammensetzung bleibt bestehen.

So entspringt aus den Grundanschauungen und der Methode der darstellenden Geometrie das natürliche System der Geometrie. In demselben ist der Unterschied der Geometrie in der Ebene von der Geometrie des Raumes aufgehoben.

Die Beziehung der Doppelverhältnissgleichheit oder Projectivität, welche sich als fundamental ergiebt, gilt für die drei Grundgebilde der ersten Stufe ganz in gleicher Weise; in den allgemeinen Eigenschaften der Figuren, welche sich auf sie gründen, treten daher Beziehungen von geraden Reihen

und von Strahlenbüscheln — vergl. als Beispiele § 22.; 3., § 17., 18. — und Ebenenbüscheln in gleicher Weise hervor; *die Sätze, Constructionen und Beweise zeigen ein Gesetz der Symmetrie*, das als eine Correspondenz zwischen dem Liegen in Geraden oder in Ebenen und dem Gehen durch Gerade oder durch Punkte, zwischen Ebene und Punkt, zwischen der Geraden als Verbindungslinie von zwei Punkten und der Geraden als Schnittlinie von zwei Ebenen bezeichnet werden kann. *Dasselbe Gesetz zeigt sich auch als Symmetriegesetz des Systems*, in welchem die Punkte einer Geraden, die Ebenen durch eine Gerade, die Geraden durch einen Punkt in einer Ebene als Gebilde erster Stufe, dann die Punkte einer Ebene und die Ebenen durch einen Punkt, die Geraden in einer Ebene und die Geraden durch einen Punkt nebeneinander als Gebilde zweiter Stufe, die Punkte und die Ebenen des Raums als Gebilde dritter Stufe stehen. Wir nennen es *das Gesetz der Dualität*. Als elementare Beispiele dafür dienen:

1) Ein Punkt und eine Gerade (als Ebenenbüschel) bestimmen eine Ebene.

Eine Ebene und eine Gerade (als Punktreihe) bestimmen einen Punkt.

2) Drei Punkte bestimmen eine Ebene, wenn sie nicht in einer Geraden liegen.

Drei Ebenen bestimmen einen Punkt, wenn sie nicht durch eine Gerade gehen.

3) Wenn von beliebig vielen Geraden jede zwei sich schneiden, aber nicht alle durch einen Punkt gehen, so liegen sie alle in einer Ebene.

Wenn von beliebig vielen Geraden jede zwei sich schneiden, aber nicht alle in einer Ebene liegen, so gehen sie alle durch einen Punkt.

4) Die Transversale zu zwei Geraden aus einem Punkte ist die Schnittlinie der Ebenen, welche jene Geraden mit diesem Punkte bestimmen.

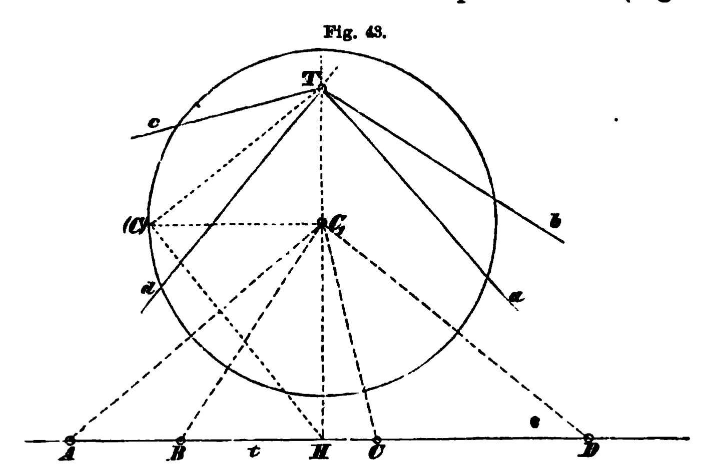
Die Transversale zu zwei Geraden in einer Ebene ist die Verbindungslinie der Punkte, welche jene Geraden mit dieser Ebene bestimmen.

5) Die Transversalen zu drei Geraden sind die Schnittlinien der Ebenen, welche zwei derselben mit den Punkten auf der dritten verbinden.

Die Transversalen zu drei Geraden sind die Verbindungslinien der Punkte, in welchen sich zwei derselben mit den Ebenen durch die dritte schneiden.

Zu einer speciellen Correspondenz in der Ebene, welche den Character der Dualität zeigt — also zwischen Punkten und Strahlen derselben — hat in der That die constructive Untersuchung bereits geführt; *jedem Punkte der Bildebene als Spur eines projicierenden Strahls entspricht eine Gerade in derselben als Spur einer projicierenden Ebene, welche zu jenem normal ist* (§ 10.); die Punkte derselben Reihe haben zu ihren entsprechenden Strahlen in dieser Beziehung die Strahlen eines Büschels, aus dem der Geraden der Reihe entsprechenden Punkt und umgekehrt. Solche entsprechende Reihen und Strahlenbüschel haben gleiches Doppelverhältniss — weil nach jener Construction das aus dem Hauptpunkt $C_1$ über der Reihe $ABC\cdots$ gebildete Büschel zu dem Büchel der Spuren $abc\cdots$ (Fig. 43.)

Fig. 43.




der entsprechenden Normalebenen gleichwinklig, d. h. projectivisch ist. Die so gebildeten Systeme sind eine besondre Art der *reciproken Systeme*, der wir noch wiederholt, erst in der Ebene (§ 33.), dann im Raume (§ 92.) begegnen werden.

**B. Die constructive Theorie der Kegelschnitte als Kreisprojectionen.**

24. Die Projection eines Kreises ist der Ort der Durchstosspunkte der vom Centrum der Projection nach den Punkten seiner Peripherie gehenden Strahlen mit der Bildebene; sie ist auch die Enveloppe der Spuren derjenigen Ebenen, welche vom Centrum der Projection nach den Tangenten des Kreises gehen. Insofern jene Strahlen wie diese Ebenen gleichmässig den projicierenden Kegel des Originalkreises bilden, der durch seinen Schnitt mit der Bildebene die Projection erzeugt, nennt man die Centralprojectionen des Kreises Kegelschnitte. Die fundamentalen Eigenschaften derselben ergeben sich für beide bezeichnete Anschauungen nach den Grundgesetzen der projectivischen ebenen Systeme aus den beiden Haupteigenschaften des Kreises hinsichtlich seiner Punkte und Tangenten: I. Der Peripheriewinkel über demselben Bogen des Kreises ist constant. II. Das von zwei festen Tangenten begrenzte Stück einer beweglichen Tangente des Kreises wird vom Mittelpunkt desselben unter constantem Winkel gesehen. Also für zwei willkürliche Punkte $T_1$, $T_2$ und zwei feste Punkte $A$, $B$ des Kreises vom Mittelpunkt $M$

$$\angle AT_1B = \angle AT_2B = \tfrac{1}{2}\angle AMB;$$

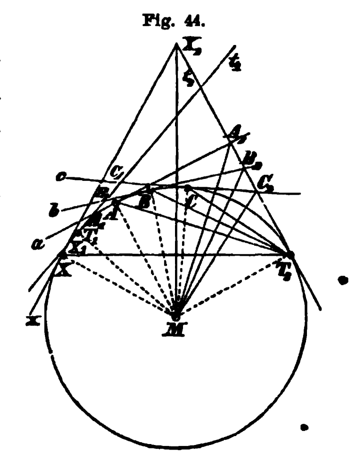


Fig. 44.

und für zwei willkürliche Tangenten $t_1$, $t_2$ und zwei feste Tangenten $a$, $b$ desselben mit den respectiven Berührungspunkten $T_1$, $T_2$, $A$, $B$, und den Schnittpunkten $A_1$, $A_2$, $B_1$, $B_2$ der Letztern in den Ersteren

$$\angle A_1MA_2 = \angle B_1MB_2 = \tfrac{1}{2}\angle T_1MT_2 = \tfrac{1}{2}\angle(t_1, t_2).$$

Sind $A$, $B$, $C$, $X$ vier Punkte des Kreises und $a$, $b$, $c$, $x$ die zugehörigen Tangenten desselben (Fig. 44.), welche die Tangenten in $T_1$, $T_2$

in $A_1, B_1, C_1, X_1$ und $A_2, B_2, C_2, X_2$ respective schneiden, so ist wegen der Gleichheit der Peripheriewinkel

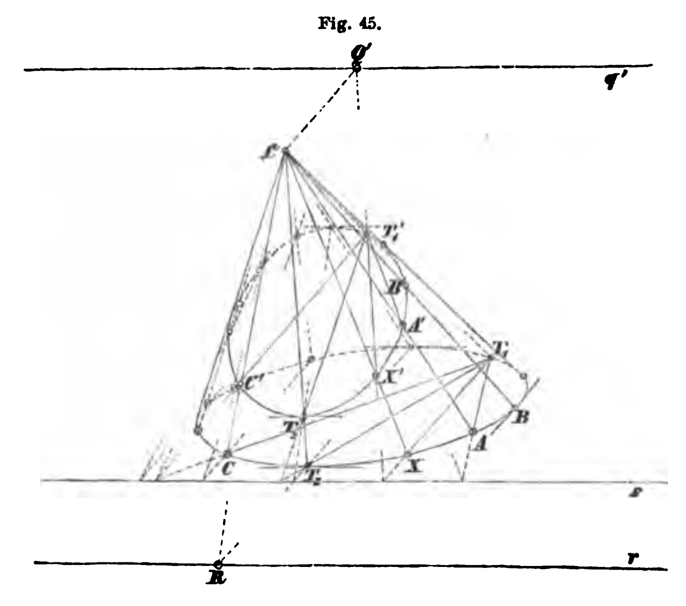
$$(T_1 \cdot ABCX) = (T_2 \cdot ABCX);$$

nach dem andern Satze aber

$$(M \cdot A_1 B_1 C_1 X_1) = (M \cdot A_2 B_2 C_2 X_2) = (A_1 B_1 C_1 X_1) = (A_2 B_2 C_2 X_2)$$
$$= (T_1 \cdot ABCX), \text{ d. i. auch } = (T_2 \cdot ABCX).$$

Dieselben Gleichungen gelten in jeder Projection des Kreises, wenn die gleichen Buchstaben die Projectionen der bezüglichen Punkte bezeichnen (Fig. 45. und 46.). Denn die Projectivität der Strahlenbüschel

Fig. 45.




$$(T_1 \cdot ABC \cdots) \text{ und } (T_2 \cdot ABC \cdots)$$

zieht die der projicierenden Ebenenbüschel

$$(\mathfrak{C}T_1 \cdot ABC \cdots) \text{ und } (\mathfrak{C}T_2 \cdot ABC \cdots)$$

nach sich und damit die der Strahlenbüschel in der Projection

$$(T_1' \cdot A'B'C' \cdots) \text{ und } (T_2' \cdot A'B'C' \cdots).$$

Man hat also die folgenden Gesetze:

„Die geraden Linien von vier Punkten eines Kegelschnitts

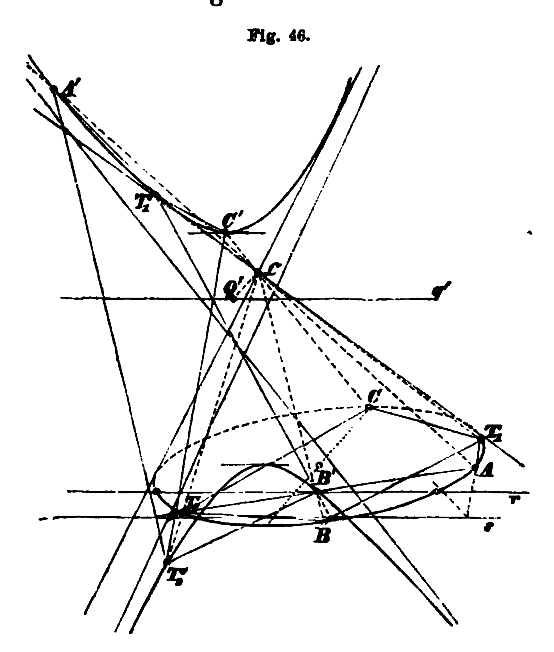
Die Durchschnittspunkte von vier Tangenten eines Ke-

nach einem beliebigen fünften Punkte desselben bilden ein Strahlenbüschel von unveränderlichem Doppelverhältniss.

gelschnitts mit einer beliebigen fünften Tangente desselben bilden eine Punktreihe von unveränderlichem Doppelverhältniss.

Man sagt daher *von vier festen Punkten oder Tangenten eines Kegelschnitts, dass sie ein bestimmtes Doppelverhältniss haben**) und hat dann den Satz: *Das Doppelverhältniss von vier Punkten eines Kegelschnitts ist dem Doppelverhältniss seiner vier Tangenten in denselben gleich.*

Fig. 46.




Diese Eigenschaften kommen allen Kreisprojectionen zu und es sind solche Eigenschaften derselben, welche durch Projection nicht geändert werden, die also wiederum nicht nur ihnen selbst, sondern auch allen ihren Centralprojectionen zukommen; wir nennen sie projectivische Eigenschaften und

*) Damit ist das Gebiet wesentlich erweitert, in welchem die Doppelverhältnissgleichheiten gelten.

werden ihre grosse Wichtigkeit für die darstellende Geometrie kennen lernen.

Man construiere Punkte des durch drei Punkte $A$, $B$, $C$ gehenden Kreises bei unzugänglichem Mittelpunkte desselben — vermittelst des perspectivischen Centrums $T$ gleicher Strahlenbüschel, durch die Relation

$$\angle ABC = \angle CAT, \ \angle BAC = \angle CBT.$$

25. Die Umkehrung der Hauptsätze des vorigen § führt zu folgenden Curvengenerationen:

Der Ort der Schnittpunkte aller entsprechenden Strahlenpaare von zwei projectivischen Strahlenbüscheln ist eine durch die Scheitelpunkte derselben gehende Curve, welche mit einer Geraden ihrer Ebene nicht mehr als zwei Punkte gemein haben kann (§ 16.; 6, 5); sie heisst daher eine Curve zweiter Ordnung und ist durch fünf Punkte bestimmt, von denen keine drei in einer geraden Linie liegen.

Die Enveloppe der Verbindungslinien aller entsprechenden Punktepaare von zwei projectivischen Punktreihen ist eine die Träger dieser Reihen berührende Curve, welche mit einem Punkte ihrer Ebene nicht mehr als zwei Tangenten gemein haben kann (§ 17.); sie heisst daher eine Curve zweiter Classe und ist durch fünf Tangenten bestimmt, von denen keine drei durch einen Punkt gehen.

Alle Kreisprojectionen sind nach dem Vorigen Curven zweiter Ordnung und zweiter Classe zugleich. Dass alle Curven zweiter Ordnung auch zweiter Classe und Kreisprojectionen sind, wird der Verlauf der Untersuchungen zeigen; wir verzichten auf den directen Beweis an dieser Stelle.

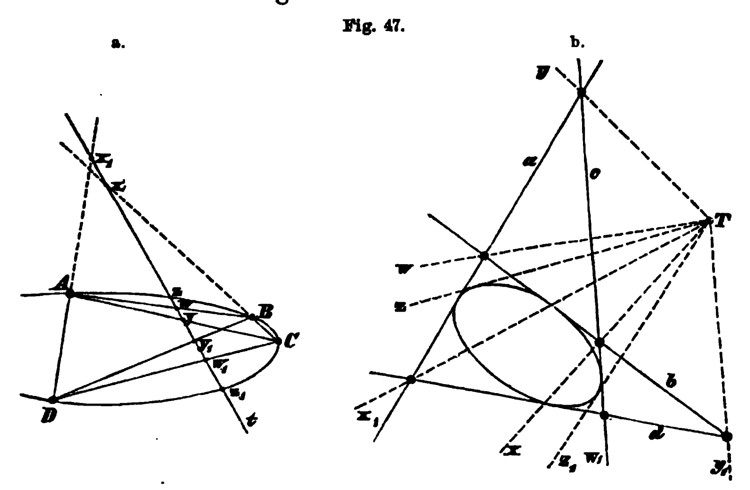
Wenn fünf Punkte (Tangenten) eines Kegelschnitts gegeben sind, so bestimmen irgend zwei derselben durch ihre Verbindungslinien (Schnittpunkte) mit den drei übrigen drei entsprechende Paare von Elementen der zwei erzeugenden projectivischen Büschel (Reihen). Diess ist für die Kegelschnitte als Kreisprojectionen evident; für Curven zweiter Ordnung und solche zweiter Classe wäre zu zeigen (vergl. § 27.; 1, a.), dass die Curve von der Wahl der Träger

der erzeugenden Büschel oder Reihen unter den Bestimmungs-Elementen unabhängig ist.

Wenn drei der Punkte in einer geraden Linie liegen, oder drei der Geraden durch einen Punkt gehen, so sind die projectivischen Gebilde, welche die beiden übrigen mit ihnen bestimmen, in perspectivischer Lage und der erzeugte Kegelschnitt degeneriert in zwei Gerade im einen Falle — Scheitelstrahl und perspectivische Axe — und in zwei Punkte im andern Falle — Schnittpunkt der Reihen und perspectivisches Centrum.

Mit vier festen Punkten oder Geraden bestimmt jeder fünfte Punkt und jede fünfte Gerade ihrer Ebene einen Kegelschnitt; man nennt die Gesammtheit dieser Kegelschnitte im ersten Falle ein Kegelschnitt-Büschel und im zweiten

Fig. 47.




eine Kegelschnitt-Schaar. Das Kegelschnitt-Büschel enthält drei Kegelschnitte, welche in Paare von Geraden und die Kegelschnitt-Schaar drei, die in Paare von Punkten degenerieren, nämlich die Gegenseitenpaare des Vierecks der gemeinsamen Punkte, respective die Gegeneckenpaare des Vierseits der gemeinsamen Tangenten.

1) Alle durch vier feste Punkte $A, B, C, D$ gehenden Kegelschnitte werden von einer beliebigen Geraden $t$ ihrer

Alle vier feste Gerade $a, b, c, d$ berührenden Kegelschnitte werden aus einem beliebigen Punkte $T$ ihrer Ebene in Strah-

Ebene in Punktepaaren $Z, Z_1$ derselben Involution geschnitten, zu welcher auch die Schnittpunkte $W, W_1$; $X, X_1$; $Y, Y_1$ derselben mit den Paaren der Gegenseiten $AB, CD$; $BC, AD$; $CA, BD$ gehören (Fig. 47 a.). Denn es ist

$$(A \cdot CDZZ_1) = (B \cdot CDZZ_1);$$

also in $t$

$$(YX_1\, ZZ_1) = (XY_1\, ZZ_1)$$
$$= \frac{XZ}{Y_1 Z} : \frac{XZ_1}{Y_1 Z_1} = (Y_1 X\, Z_1 Z).$$

lenpaaren $z, z_1$ derselben Involution berührt, zu welcher auch die Verbindungslinien $w, w_1$; $x, x_1$; $y, y_1$ derselben mit den Paaren der Gegenecken $ab, cd$; $bc, ad$; $ca, bd$ gehören. Denn es ist (Fig. 47 b.)

$$(a \cdot cdzz_1) = (b \cdot cdzz_1);$$

also an $T$

$$(yx_1\, zz_1) = (xy_1\, zz_1)$$
$$= \frac{\sin(x, z)}{\sin(y_1, z)} : \frac{\sin(x, z_1)}{\sin(y_1, z_1)}$$
$$= (y_1\, xz_1\, z).$$

2) Unter den Kegelschnitten des Büschels sind zwei, welche eine Gerade $t$ seiner Ebene berühren — in den Doppelpunkten der auf ihr erzeugten Involution.

Unter den Kegelschnitten der Schaar sind zwei, welche einen Punkt $T$ ihrer Ebene enthalten — mit den Doppelstrahlen der an ihm erzeugten Involution als Tangenten.

3) Die Gegenseitenpaare eines vollständigen Vierecks werden von jeder Geraden seiner Ebene in drei Paaren einer Involution geschnitten.

Die Gegeneckenpaare eines vollständigen Vierseits werden mit jedem Punkte seiner Ebene durch drei Paare einer Involution verbunden.

4) Wenn eine Gerade die Seiten $AB, BC, CA$ eines Dreiecks $ABC$ in Punkten $W, X, Y$ schneidet, und Punkte $W_1$, $X_1$, $Y_1$ in ihr so bestimmt werden, dass sie mit jenen drei Paare einer Involution bilden, so gehen die Geraden $CW_1$, $AX_1$, $BY_1$ durch denselben Punkt $D$.

Wenn ein Punkt mit den Ecken $ab, bc, ca$ eines Dreiseits $abc$ durch Strahlen $w$, $x, y$ verbunden wird und Strahlen $w_1$, $x_1$, $y_1$ aus ihm so bestimmt werden, dass sie mit jenen drei Paare einer Involution bilden, so liegen die Punkte $cw_1$, $ax_1$, $by_1$ in einer derselben Geraden $d$.

5) Man construiere mit dem Lineal allein in einer durch zwei Paare bestimmten Invo-

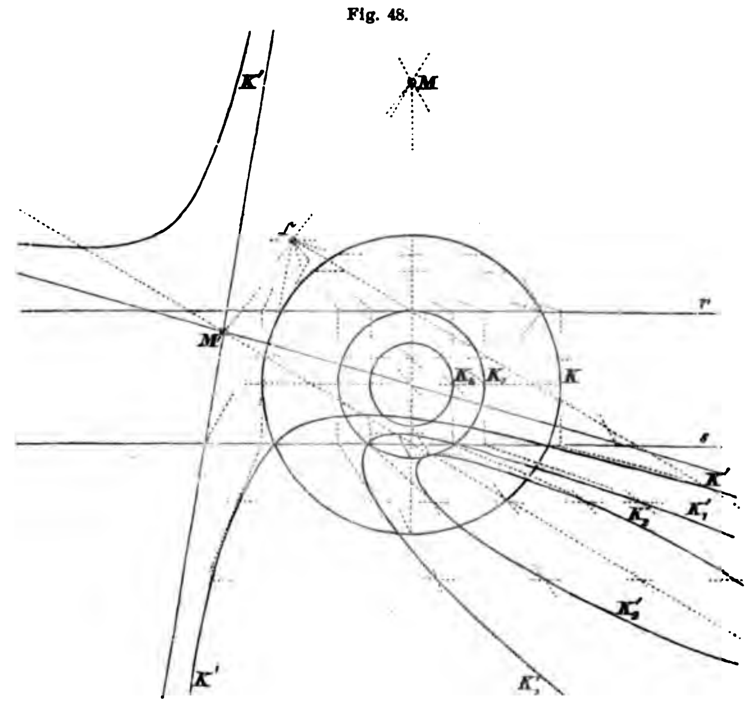
Man construiere mit dem Lineal allein in einer durch zwei Paare bestimmten Invo-

lution in gerader Linie den entsprechenden zu einem bestimmten Punkte derselben; speciell den dem unendlich entfernten Punkte entsprechenden Punkt $Q'R$ oder den Hauptpunkt (Centralpunkt). (§ 20.; 4.)

lution von Strahlen aus einem Punkte den entsprechenden zu einem bestimmten Strahl derselben.

6) Man zeige, dass die Eigenschaften des vollständigen Vierecks und Vierseits bezüglich der harmonischen Theilung (§ 22.; 3.) Specialfälle der Sätze unter 3) sind.

Fig. 48.



26. Die Projectionen des Kreises sind Curven von sehr verschiedener Gestalt je nach der Lage des Kreises zur Gegenaxe seiner Ebene (vergl. § 14.; 2. 3.). Schneidet der Kreis diese Gegenaxe — $r$, wenn wir ihn als Original ansehen, — so hat sein Bild zwei Punkte, die entsprechenden der Schnittpunkte, in unendlicher Ferne und zwei zugehörige Tangenten, die ihn erst in unendlicher Ferne berühren, — man nennt diese

Tangenten die Asymptoten und hat jene Punkte als die Asymptotenrichtungen zu bezeichnen; es zerfällt in zwei Theile oder Zweige, die erst in diesen unendlich fernen Punkten sich zusammenschliessen und wird Hyperbel genannt. In Fig. 48. entspricht dem Kreise $K$ die Hyperbel $K'$ und ihre Asymptoten sind die Bilder der Tangenten von $K$, deren Berührungspunkte in der Gegenaxe $r$ liegen. Trifft der Kreis die Gegenaxe $r$ seines Systems nicht, so hat sein Bild keine unendlich fernen Punkte, sondern ist wie er eine im Endlichen geschlossene Curve, eine Ellipse. So $K_2'$, das Bild von $K_2$ in Fig. 48.

Berührt endlich insbesondere der Kreis, wie $K_1$ in Fig. 48., die Gegenaxe $r$, so hat sein Bild $K_1'$ zwei zusammenfallende Punkte in unendlicher Ferne, wir sagen, die unendlich ferne Gerade seiner Ebene, die entsprechende von $r$, berührt dasselbe; es besteht aus einem Zweig, der sich erst im Unendlichen schliesst und heisst eine Parabel.

Die collinear verwandten Curven des Kreises oder seine Centralprojectionen (die Kegelschnitte) sind also Hyperbeln, Ellipsen, Parabeln; speciell ergiebt sich, dass die Parallelprojectionen des Kreises — oder die ihm affinen Curven (vergl. § 21. a.) — Ellipsen sein müssen und bekannt ist, dass die zu ihm ähnlichen Curven (§ 21. c.) wieder Kreise sind.

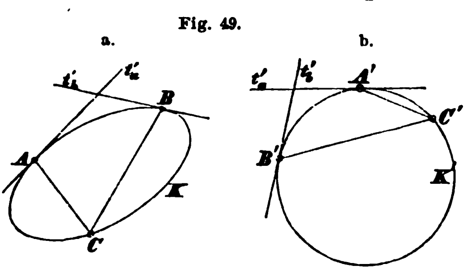
Und sofort allgemein: Die Collinearverwandten oder Centralprojectionen eines Kegelschnitts sind Kegelschnitte und zwar Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln, je nachdem er die Gegenaxe seines Systems nicht schneidet, berührt oder schneidet. Die affinen Curven oder die Parallelprojectionen eines Kegelschnitts sind Kegelschnitte derselben Art.

1) In Figur 45., § 24. sind die Gegenaxen $q'$ und $r$ eingetragen für den Fall des elliptischen Bildes, in Fig. 46., § 24. die entsprechenden für das hyperbolische Bild; man erläutere daran die correspondierende Umlaufsbewegung eines Punktes der Curve in Original und Bild.

2) Man thue dasselbe für das parabolische Bild des Kreises und für das parabolische Bild der Hyperbel.

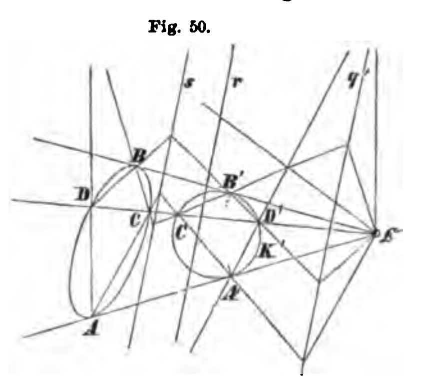
Denken wir zwei beliebige Kegelschnitte $K$, $K'$ (Fig. 49.) und drei beliebige Punkte des einen $A$, $B$, $C$, als entsprechend drei beliebigen Punkten $A'$, $B'$, $C'$ des andern, überdiess die Tangenten $t_a$, $t_{a'}$ in $A$ und $A'$ an $K$, $K'$ und ebenso die $t_b$, $t_{b'}$ in $B$, $B'$ an $K$, $K'$ als entsprechend, so sind hierdurch einerseits beide Kegelschnitte $K$, $K'$, andererseits die ebenen Systeme derselben nach § 22. völlig bestimmt und jedem vierten Punkt $D$ des Kegelschnitts $K$ entspricht ein vierter Punkt $D'$ des Kegelschnitts $K'$. Zwei Kegelschnitte sind also auf unzählig viele Arten projectivisch oder collinear verwandt.

Fig. 49.




Sind $AA'$, $BB'$ ein Paar der gemeinsamen Tangenten beider Kegelschnitte Fig. 50., und liegen $C$, $C'$ mit dem Durchschnittspunkt $\mathfrak{C}$ derselben in einer Geraden, so sind die Büschel $(A \cdot A'BC \cdots)$, $(A' \cdot AB'C' \cdots)$ nicht nur projectivisch, sondern auch perspectivisch; ihre perspectivische Axe ist die Collineationsaxe $s$ und der Punkt $\mathfrak{C}$ das Collineationscentrum zweier ebenen durch die Data bestimmten collinearen Systeme in centrischer Lage. Dass die centrisch collineare Lage zweier Kegelschnitte stets und entweder auf vier oder auf zwölf verschiedene Arten stattfindet, sei angeführt ohne näheres Eingehen.

Fig. 50.

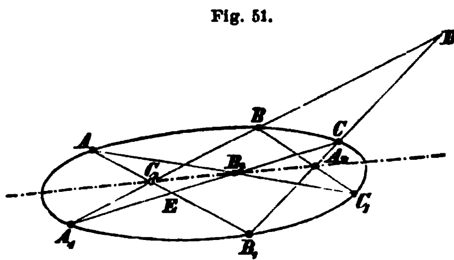



27. Haben wir einen durch zwei projectivische Strahlen-Büschel von den Scheiteln $A$ und $B$ bestimmten Kegelschnitt und sind $C$, $A_1$, $B_1$, $C_1$ vier weitere Punkte desselben, so ist nach § 24. (Fig. 51.)

$$(A \cdot A_1 B_1 C_1 C) = (B \cdot A_1 B_1 C_1 C);$$

schneiden wir diese Büschel respective mit den Geraden $A_1C$ und $B_1C$ und nennen wir die Punkte $A_1B$, $B_1C$ und $AB_1$, $A_1C$ respective $D$ und $E$, dazu die Punkte $AB_1$, $A_1B$; $BC_1$, $B_1C$; $CA_1$, $C_1A$ respective $C_2$, $A_2$, $B_2$, so ist deshalb

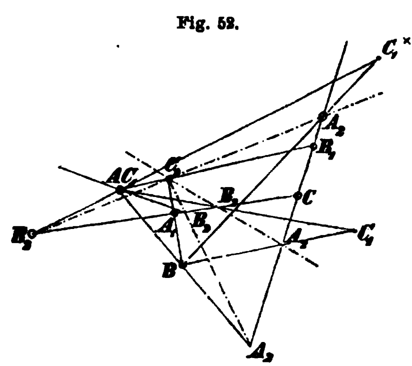
Fig. 51.



$(A_1EB_2C) = (DB_1A_2C)$, d. h. diese Reihen sind perspectivisch für das Centrum $A_1D$, $B_1E$ oder $C_2$; d. h. $C_2$, $B_2$, $A_2$ liegen in einer Geraden.

Die betrachteten sechs Punkte bilden in der Ordnung $AB_1CA_1BC_1$ ein der Curve eingeschriebenes Sechseck, für welches die Punkte $A_2$, $B_2$, $C_2$ als die Schnittpunkte der drei Paare gegenüberliegender Seiten erscheinen; man hat also den Satz: Sechs Punkte eines Kegelschnitts bilden in jeder Aufeinanderfolge ein Sechseck, für welches die drei Schnittpunkte seiner Gegenseitenpaare in einer geraden Linie liegen. (Pascal's Satz und Sechseck; Pascal'sche Linie $A_2B_2C_2$.)

Fig. 52.



1) Man construiere den durch fünf Punkte $A, B_1, C, A_1, B$ bestimmten Kegelschnitt, d. h. man bestimme beliebig viele Lagen des sechsten Punktes $C_1$ eines Pascal'schen Sechsecks. (Fig. 52.)

a) Die Geraden $AB_1$, $A_1B$ schneiden sich im Punkte $C_2$ der Pascal'schen Linie $p$; jeder Lage

der um $C_2$ drehenden Geraden $p$ entspricht ein sechster Punkt $C_1$ des Kegelschnitts. Dieselbe schneidet $B_1C$ in $A_2$, $CA_1$ in $B_2$ und $BA_2$, $AB_2$ schneiden sich in $C_1$.

Man erkennt darin deutlich die Erzeugung des Kegelschnitts durch projectivische Büschel aus $A$ und $B$ wieder, von der der Pascal'sche Satz nur eine andere Ausdrucksform ist. Insofern in dieser Ausdrucksform der Character der sechs Punkte ununterscheidbar der nämliche ist, erfüllt sie die in § 25. p. 74. angedeutete Forderung der Strenge.

b) Der gesuchte Punkt $C_1$ ist im Sechseck Nachbar von $A$ und von $B$; zieht man also (Fig. 52.) durch $A$ oder $B$, sagen wir durch $A$ eine beliebige Gerade als $AC_1$, so liefert sie mit $A_1C$ den Schnittpunkt $B_2$, welcher mit dem Schnitt von $AB_1$, $A_1B$ oder $C_2$ die Gerade $p$ giebt; schneidet $B_1C$ sie in $A_2$, so geht $BA_2$ durch $C_1$, d. h. $BA_2$ schneidet die gewählte Gerade aus $A$ in $C_1$.

So construiert man linear den zweiten Schnittpunkt einer Geraden mit einem Kegelschnitt, dessen erster Schnittpunkt mit ihr bekannt ist.

2) Man construiere die Tangente des durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnitts in einem dieser Punkte.

Da die Tangente als die gerade Verbindungslinie von zwei unendlich nahen d. i. zusammenfallenden Punkten der Curve zu betrachten ist, so legen wir dem bezeichneten Punkte die Buchstaben zweier Nachbarecken des Sechsecks bei, z. B. $AC_1$. (Fig. 52.) Sind dann $A_1$, $B$, $C$, $B_1$ die vier übrigen gegebenen Punkte, so bestimmen $B_1C$, $BC_1$ den Punkt $A_2$, $AB_1$, $A_1B$ den Punkt $C_2$, die Punkte $A_2$, $C_2$ die Gerade $p$ und diese mit $A_1C$ den Punkt $B_2$, durch welchen auch die Tangente $AC_1$ gehen muss.

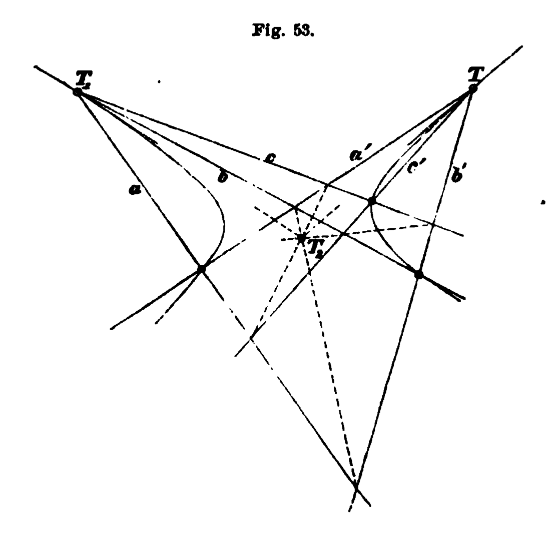
3) Man construiere in zweien der fünf Bestimmungspunkte eines Kegelschnitts die Tangenten desselben.

Man fasse (Fig. 53.) diese Punkte als Scheitel $T_1$, $T_2$ von zwei projectivischen Strahlenbüscheln, die durch die drei andern gegebenen Punkte $aa'$,

$bb'$, $cc'$ bestimmt sind, und construiere das perspectivische Centrum $T''$ für dieselben; dann sind die Geraden $T_1 T''$, $T_2 T''$ die gesuchten Tangenten.

Man construiert auch jeden sechsten Punkt des Kegelschnitts auf einem Strahl von $T_1$ oder $T_2$, indem man mittelst $T''$ den entsprechenden Strahl von $T_2$ oder $T_1$ bestimmt.

Fig. 53.



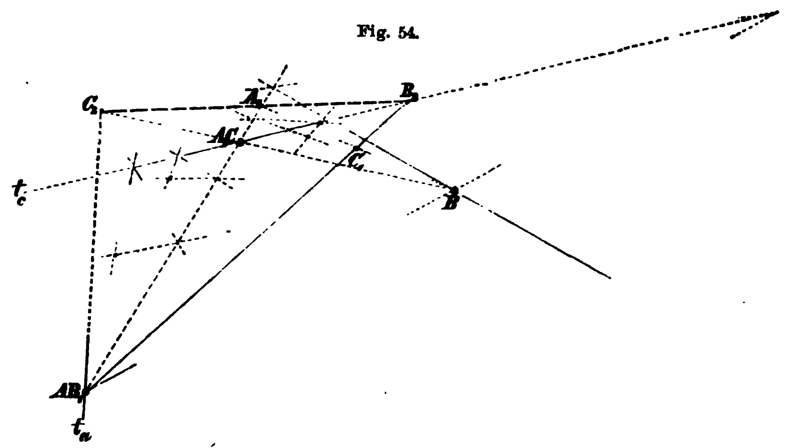

4) Man construiere den durch drei Punkte und die Tangenten in zweien derselben bestimmten Kegelschnitt, insbesondere die Tangente im dritten Punkt. Sind $A$, $B$, $C$ (Fig. 54.) die Punkte, so betrachten wir die Tangente in $A$ als die Gerade $AB_1$ — die Verbindungslinie der sich deckenden Punkte $A$ und $B_1$ — die in $C$ als die Gerade $CA_1$ und suchen $C_1$ auf $AC_1$ oder $BC_1$ auf nach $1^b$ oder $1^a$. Die Construction ist in Fig. 54. für mehrere Punkte ausgeführt, wenn auch nur für einen bezeichnet.

Um die Tangente im dritten Punkt zu finden, nennen wir die Tangente in $A$ wieder $AB_1$, die in $C$ aber $CA_1$ und die gesuchte in $B$, $BC_1$; dann bestimmen $AB_1$ und $A_1B$ den Punkt $C_2$, $AC_1$ und $A_1C$ den Punkt $B_2$, die Punkte $C_2$ und $B_2$ die Gerade $p$,

die von $CB_1$ in demselben Punkte $A_2$ geschnitten wird, durch den die gesuchte Tangente gehen muss.

In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Dreieck werden die Seiten von den Tangenten der Curve in den respectiven Gegenecken in Punkten einer Geraden geschnitten.

Fig. 54.



5) Man vollziehe die Construction des Kegelschnitts unter denselben Voraussetzungen durch projectivische Büschel — indem man die Punkte von bekannter Tangente zu Scheiteln wählt und durch ihre Tangenten das perspectivische Centrum $T''$ erhält. (Vergl. § 24., Aufg.)

6) Man construiere den durch vier Punkte und die Tangente in einem derselben bestimmten Kegelschnitt nach denselben beiden Methoden des Pascal'schen Sechsecks und der projectivischen Büschel.

7) Man construiere nach denselben beiden Methoden einen Kegelschnitt a) durch vier Punkte und die eine Asymptotenrichtung und bestimme dabei insbesondere die andre Asymptotenrichtung und die Asymptoten selbst — erstere nach $1^b$, die letzteren nach 3)

b) durch drei Punkte und beide Asymptotenrichtungen;

c) durch drei Punkte und die eine Asymptote;

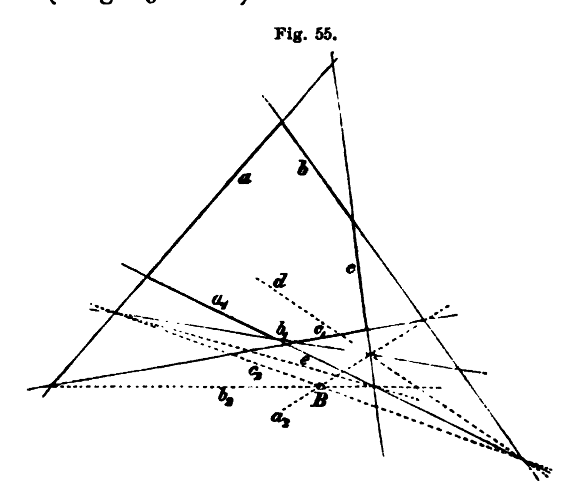
d) durch einen Punkt und beide Asymptoten.

In jedem Falle ist die **zweckmässigste** Constructionsform zu suchen.

8) Man construiere eine Parabel durch drei Punkte und die Richtung ihres unendlich fernen Punktes — d. h. aus vier Punkten und der Tangente in einem derselben als der unendlich fernen Geraden — oder durch zwei Punkte und ihre Tangenten — oder durch zwei Punkte, die Tangente des einen und jene Richtung.

9) Man beweise den Satz: Das Parallelogramm, welches die von einem Punkte der Hyperbel ausgehenden Parallelen zu den Asymptoten derselben mit diesen selbst bestimmen, hat constante Fläche. (Vergl. § 16. 3.)

Fig. 55.



28. Haben wir einen durch zwei projectivische Reihen in den Geraden $a$ und $b$ bestimmten Kegelschnitt und sind $c$, $a_1$, $b_1$, $c_1$ vier weitere Tangenten desselben, so ist (Fig. 55.) nach § 24.

$$(a \cdot a_1 b_1 c_1 c) = (b \cdot a_1 b_1 c_1 c);$$

projicieren wir diese Reihen respective aus den Punkten $a_1 c$, $b_1 c$ und nennen wir die Geraden $a_1 b$, $b_1 c$ und $a b_1$, $a_1 c$ re-

spective $d$ und $e$, dazu die Geraden $ab_1$, $a_1b$; $bc_1$, $b_1c$; $ca_1$, $c_1a$ respective $c_2$, $a_2$, $b_2$, so ist deshalb

$$(a_1eb_2c) = (db_1a_2c),$$

diese Büschel sind also perspectivisch mit der Axe $a_1d$, $b_1e$ oder $c_2$, d. h. die beiden Strahlen $b_2$ und $a_2$ schneiden sich in einem Punkte $B$ der Geraden $c_2$.

Die betrachteten sechs Geraden bilden in der Ordnung $ab_1ca_1bc_1$ ein der Curve umgeschriebenes Sechsseit, für welches die Geraden $a_2$, $b_2$, $c_2$ als die Verbindungslinien der drei Paare gegenüberliegender Ecken $bc_1$, $b_1c$; $ca_1$, $c_1a$; $ab_1$, $a_1b$ erscheinen; man hat also den Satz: **Sechs Tangenten eines Kegelschnitts bilden in jeder Folge ein Sechsseit, für welches die drei Verbindungslinien der Gegeneckenpaare durch einen Punkt gehen.** (**Brianchon's Satz** und Sechsseit; **Brianchon'scher Punkt** desselben.)

1) Man construiere den durch fünf Tangenten $a$, $b_1$, $c$, $a_1$, $b$ bestimmten Kegelschnitt, d. h. man bestimme beliebig viele Lagen der sechsten Seite $c_1$ eines Brianchon'schen Sechsseits.

a) Die Punkte $ab_1$, $a_1b$ (Fig. 55.) liegen in der Geraden $c_2$ des Brianchon'schen Punktes $B$; jeder Lage desselben als eines in $c_2$ beweglichen Punktes entspricht eine sechste Tangente $c_1$ des Kegelschnitts; $B$ giebt mit $b_1c$ die Gerade $a_2$, mit $ca_1$ die Gerade $b_2$ und $ba_2$, $ab_2$ haben $c_1$ zur Verbindungslinie. Die Erzeugung des Kegelschnitts durch projectivische Reihen auf $a$ und $b$ ist darin deutlich, der Satz von Brianchon ist nur ein anderer Ausdruck derselben. (Vergl. § 27.; 1.)

b) Die gesuchte Tangente $c_1$ ist Nachbarin von $a$ und $b$; wählen wir also in $a$ einen beliebigen Punkt als $ac_1$, so liefert er mit $a_1c$ die Verbindungslinie $b_2$, die mit $ab_1$, $a_1b$ oder $c_2$ den Punkt $B$ bestimmt; verbindet $a_2$ diesen mit $b_1c$, so liegt $a_2b$ in $c_1$. So construiert man linear die zweite Tangente eines Kegelschnitts aus einem Punkte, der einer bekannten Tangente desselben angehört. (Vergl. § 27.; 1.)

2) Man construiere den Berührungspunkt des durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitts in einer derselben. (Für diese und die folgenden Aufgaben bis mit 8 vergleiche man die entsprechenden Nummern des § 27.)

3) Man construiere für zwei der fünf einen Kegelschnitt bestimmenden Tangenten die Berührungspunkte.

4) Man construiere den durch drei Tangenten und die Berührungspunkte in zweien derselben bestimmten Kegelschnitt, insbesondere den Berührungspunkt der dritten Tangente.

In jedem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Dreiseit schneiden sich die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der Gegenseiten in einem Punkte.

5) Man construiere den Kegelschnitt unter denselben Voraussetzungen durch projectivische Reihen.

6) Man construiere den durch vier Tangenten und den Berührungspunkt in einer derselben bestimmten Kegelschnitt nach beiden Methoden.

7) Man construiere eine Hyperbel durch drei Tangenten und eine Asymptote; oder durch eine Tangente und beide Asymptoten.

8) Man construiere eine Parabel durch vier Tangenten oder durch drei Tangenten und die Richtung ihres unendlich fernen Punktes; oder durch zwei Tangenten, den Berührungspunkt der einen von ihnen und jene Richtung.

9) Man beweise die Sätze: Das Dreieck, welches eine Tangente der Hyperbel mit ihren Asymptoten bestimmt, hat constante Fläche. Die Verbindungsstrahlen von zwei festen Punkten der Hyperbel mit einem veränderlichen Punkte derselben erzeugen in den Asymptoten zwei projectivisch gleiche Reihen.

Die Tangenten der Parabel bestimmen auf zwei festen unter ihnen projectivisch ähnliche Reihen.

29. Die vorhergehenden Untersuchungen zeigen, dass

jeder Kegelschnitt durch projectivische Constructionen mit dem Lineal bestimmt ist, sobald man fünf Punkte oder Tangenten desselben kennt oder was dem äquivalent ist. (Vergl. § 26. und 27.; 4—8.)

Sind also fünf Punkte oder Tangenten des zu betrachtenden Kegelschnitts in Projection gefunden, so erhält man aus ihnen durch dieselben Constructionen sein vollständiges Bild und aus ebenso vielen Punkten oder Tangenten in wahrer Lage ebenso die wahre Gestalt des Ganzen.

Der Werth der entwickelten und benutzten Eigenschaften wird aber dadurch erhöht, dass sie auch erlauben

a) die Schnittpunkte einer Geraden mit dem Kegelschnitt,

b) die Tangenten aus einem Punkte an denselben

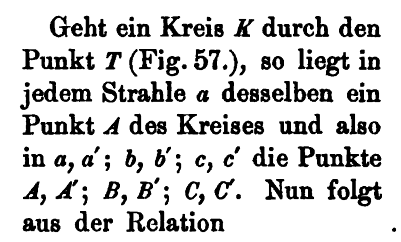
aus seinen Bestimmungsstücken allein durch projectivische Constructionen zu finden, ohne die Curve selbst verzeichnen zu müssen.

Wir denken fünf Punkte eines Kegelschnitts gegeben und fordern die Schnittpunkte desselben mit einer gegebenen Geraden $t$ zu bestimmen. Die erzeugenden projectivischen Strahlenbüschel, welche aus zweien $T$, $T'$ (Fig. 56.) jener fünf Punkte durch Strahlen nach den drei übrigen 1, 2, 3 bestimmt sind, schneiden die Gerade $t$ in zwei projectivischen Reihen, von denen drei Paare entsprechender Punkte $A, A'$; $B, B'$; $C, C'$ gegeben sind; es handelt sich darum, die sich selbst entsprechenden oder Doppelpunkte dieser Reihen zu construieren.

Wir denken fünf Tangenten eines Kegelschnitts gegeben und fordern die Tangenten desselben aus einem gegebenen Punkte $T$ zu bestimmen. Die erzeugenden projectivischen Punktreihen, welche auf zweien $t$, $t'$ (Fig. 57.) jener fünf Tangenten durch ihre Schnittpunkte mit den drei übrigen $a$, $b$, $c$ bestimmt sind, liefern durch Verbindung mit dem Punkte $T$ zwei projectivische Büschel, von denen drei Paare entsprechender Strahlen $a, a'$; $b, b'$; $c, c'$ gegeben sind; es handelt sich darum, die sich selbst entsprechenden oder Doppelstrahlen dieser Büschel zu construieren.

Berührt ein Kreis $K$ die Gerade $t$ (Fig. 56.), so geht von jedem Punkte $A$ derselben eine Tangente $\alpha$ an den Kreis und also von $A, A'$; $B, B'$; $C, C'$ die Tangenten $\alpha, \alpha'$; $\beta, \beta'$; $\gamma, \gamma'$. Nun folgt aus der Relation

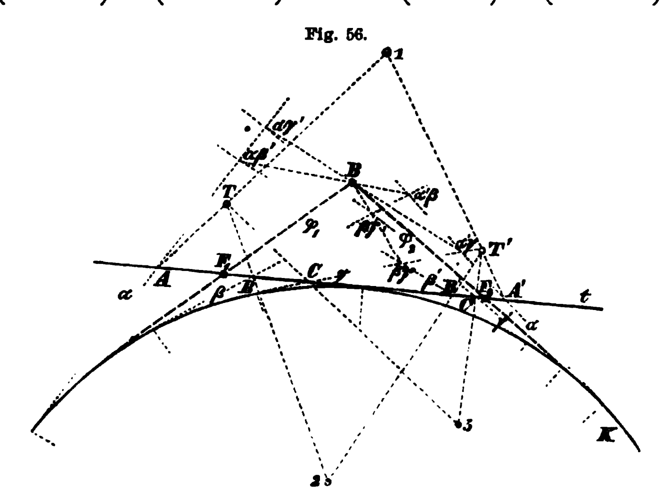
$$(ABC\cdots) = (A'B'C'\cdots)$$



Geht ein Kreis $K$ durch den Punkt $T$ (Fig. 57.), so liegt in jedem Strahle $a$ desselben ein Punkt $A$ des Kreises und also in $a, a'$; $b, b'$; $c, c'$ die Punkte $A, A'$; $B, B'$; $C, C'$. Nun folgt aus der Relation

$$(abc\cdots) = (a'b'c'\cdots)$$

Fig. 56.




nach den Grundeigenschaften der Kegelschnitte

$$(\alpha\beta\gamma\cdots) = (\alpha'\beta'\gamma'\cdots),$$

d. i. jene sechs Tangenten bestimmen zwei projectivische Systeme von Tangenten des Kreises. Dann ist auch

$$(\alpha'\cdot\alpha\beta\gamma\cdots) = (\alpha\cdot\alpha'\beta'\gamma'\cdots)$$

und diese Reihen sind perspectivisch und haben somit in dem Punkte $\alpha'\beta$, $\alpha\beta'$; $\alpha'\gamma$, $\alpha\gamma'$ ihr perspectivisches Centrum. Ebenso entspricht den Reihen in $\beta, \beta'$ das Centrum

nach den Grundeigenschaften der Kegelschnitte

$$(ABC\cdots) = (A'B'C'\cdots),$$

d. h. jene sechs Punkte bestimmen zwei projectivische Systeme von Punkten des Kreises. Dann ist auch

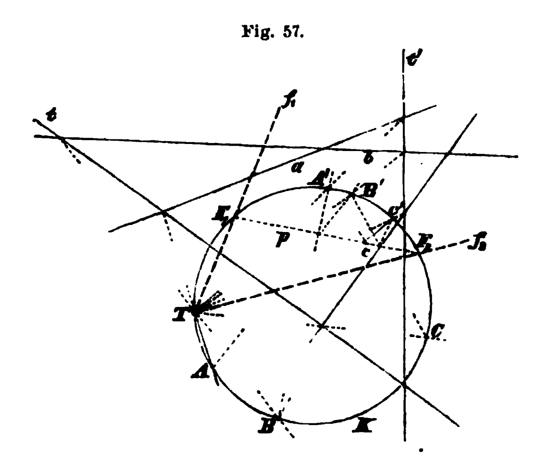
$$(A'\cdot ABC\cdots) = (A\cdot A'B'C'\cdots)$$

und diese Büschel sind perspectivisch und haben somit in den Geraden $A'B$, $AB'$; $A'C$, $AC'$ ihre perspectivische Axe. Ebenso entspricht den Büscheln aus $B, B'$ die Axe

$\beta\alpha', \beta'\alpha$; $\beta\gamma', \beta'\gamma$ und den Reihen in $\gamma, \gamma'$ das Centrum $\gamma\beta'$, $\gamma'\beta$; $\gamma\alpha'$, $\gamma'\alpha$. Weil endlich $\alpha\beta'\gamma\alpha'\beta\gamma'$ ein Brianchon'sches Sechsseit ist, so fallen diese drei Centra in einen Punkt $B$ zusammen.

$BA'$, $B'A$; $BC'$, $B'C$ und den Büscheln aus $C$, $C'$ die Axe $CB'$, $C'B$; $CA'$, $C'A$. Weil endlich $AB'CA'BC'$ ein Pascalsches Sechseck ist, so fallen die drei Axen in eine Gerade $p$ zusammen.

Fig. 57.




Mit Hilfe des Punktes $B$ construiert man zum Punkte $D$ der Reihe den entsprechenden Punkt $D'$ derselben; denn jener giebt die Tangente $\delta$ des Kreises und da die Gerade $\alpha'\delta$, $\alpha\delta'$ durch $B$ gehen muss, so erfährt man $\alpha\delta'$, somit $\delta'$ und $D'$.

Die Tangenten von $B$ an den Kreis $K$ (Fig. 56.) sind zwei Strahlen $\varphi_1$, $\varphi_2$, die sich in den projectivischen Tangentensystemen selbst entsprechen, und ihre Schnittpunkte mit $t$ sind die Doppelpunkte $F_1$, $F_2$ der projectivischen Reihen $A, B, C\cdots$, $A', B', C', \cdots$ d. h. die Schnitt-

Mit Hilfe der Geraden $p$ construiert man zum Strahle $d$ des Büschels den entsprechenden Strahl $d'$ desselben; denn jener giebt den Punkt $D$ des Kreises und da der Punkt $A'D$, $AD'$ in $p$ liegen muss, so erfährt man $AD'$ und somit $D'$ und $d'$.

Die Punkte in $p$ auf dem Kreise $K$ (Fig. 57.) sind zwei Punkte $F_1$, $F_2$, die sich in den projectivischen Punktesystemen selbst entsprechen und ihre Verbindungslinien mit $T$ sind die Doppelstrahlen $f_1$, $f_2$ der projectivischen Büschel $a, b, c\cdots$, $a', b', c', \cdots$ d. h. die Tan-

punkte der Geraden $t$ mit dem Kegelschnitt. genten vom Punkte $T$ an den Kegelschnitt.

Offenbar würde jeder andere vollständig verzeichnete Kegelschnitt dieselbe Verwendung erlauben, wie der Kreis $K$; ein solcher löst aber die Probleme am bequemsten und schärfsten; man benutzt die Eigenschaften des Kreises von der gleichen Länge der Tangenten von einem Punkte bis zum Berührungspunkte und von der Halbierung der Sehne durch den zu ihr normalen Radius zur Erhöhung der Genauigkeit der Construction.

Dieselben Betrachtungen führen auch noch:

b) zur Bestimmung der übrigen Schnittpunkte von zwei Kegelschnitten $K$, $K^*$, wenn zwei derselben bekannt sind. Denken wir $P_1$, $P_2$ als die gemeinsamen Punkte und ist der erste Kegelschnitt durch die ferneren Punkte $P_3$, $P_4$, $P_5$, der zweite durch $P_3^*$, $P_4^*$, $P_5^*$ bestimmt, so sind die Strahlenbüschel $(P_1 \cdot P_3^* P_4^* P_5^* \cdots)$ und $(P_2 \cdot P_3^* P_4^* P_5^* \cdots)$ projectivisch und bestimmen auf dem ersten Kegelschnitt $K$ zwei projectivische Reihen, deren Doppelpunkte offenbar die weiteren Schnittpunkte sind.

Man folgert daraus leicht, wie:

d) zu drei gemeinsamen Schnittpunkten von zwei Kegelschnitten der vierte gefunden werden kann, natürlich durch lineare Construction.

1) Zwei in demselben Träger vereinigte projectivische Punktreihen oder Strahlenbüschel besitzen im Allgemeinen zwei Doppelelemente, welche reell und verschieden, zusammenfallend, oder nicht reell (imaginär) sein können. Sind sie reell, so ist für $F_1$, $F_2$ als die Doppelelemente der Reihen und $f_1$, $f_2$ als die des Büschels

$$(F_1 F_2 A B) = (F_1 F_2 A' B') \text{ oder } (F_1 F_2 A A') = const.$$

Ebenso $(f_1 f_2 a a') = const.$ (Vergl. § 19.)

2) Man construiere die Tangenten einer durch zwei Tangenten und ihre Berührungspunkte bestimmten Parabel, welche vom Punkte $T$ ausgehen.

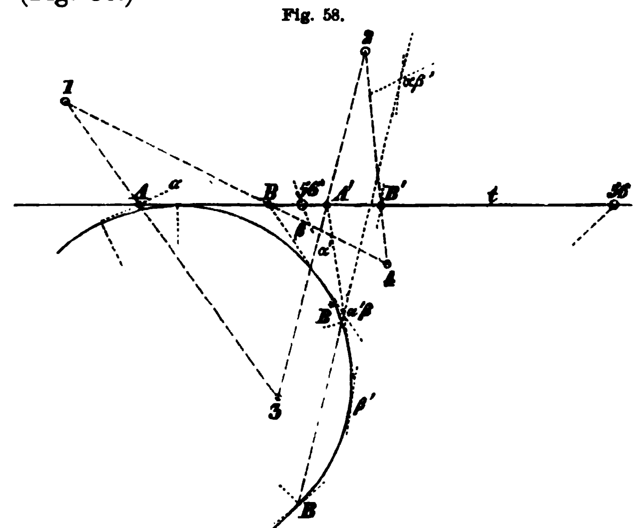
3) Man bestimme die Schnittpunkte einer Geraden $t$

mit der durch ihre Asymptoten und einen Punkt bestimmten Hyperbel.

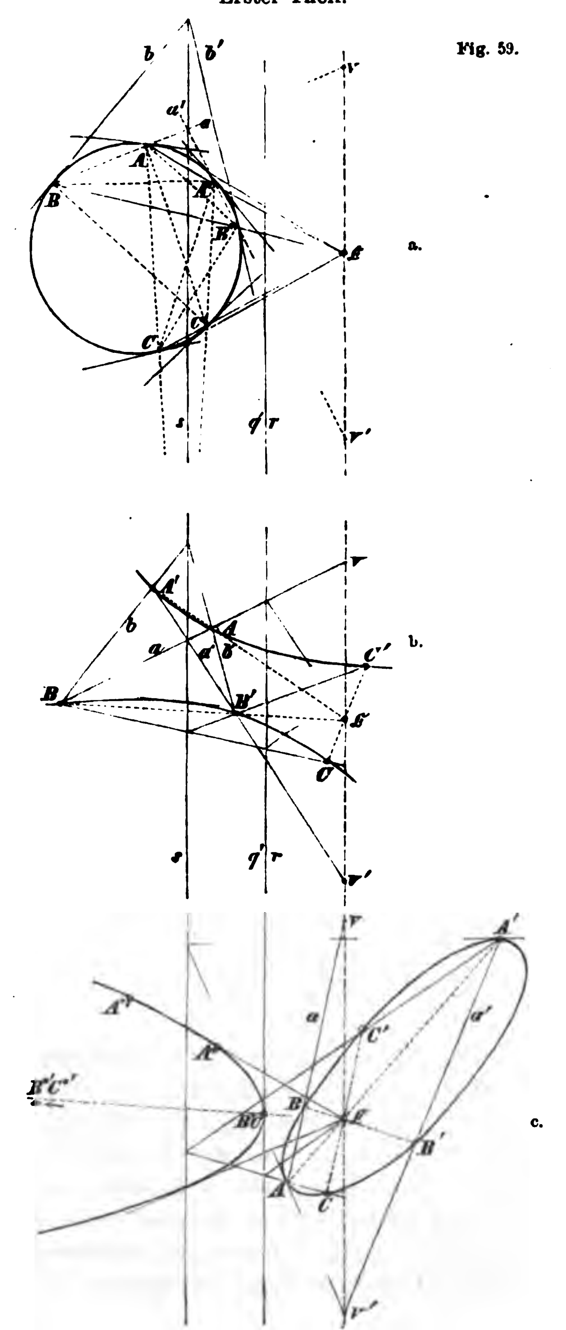
4) Man ermittle die Gattung eines durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnitts, eventuell die Asymptotenrichtungen desselben. Die Gerade $t$ ist unendlich fern, man bildet aus zweien der fünf Punkte die projectivischen Büschel über den drei andern, verlegt durch Parallelverschiebung das eine an den Scheitel des andern und bestimmt die Doppelstrahlen der so gebildeten concentrischen projectivischen Büschel.

5) Man construiere einen Kegelschnitt durch vier Punkte 1, 2, 3, 4, der eine gegebene Gerade $t$ berührt. (Fig. 58.)

Fig. 58.



Man betrachtet den Berührungspunkt in der Geraden als die Vereinigung der beiden Schnittpunkte mit derselben und erkennt, dass die projectivischen Reihen in der Geraden, welche der Kegelschnitt bestimmt, vereinigte Doppelpunkte besitzen müssen; da man zwei Paare $A$, $A'$; $B$, $B'$ derselben erhält, indem man aus zweien der vier Punkte 1, 2 als Scheitel die Büschel nach den bei-


Fig. 59.
a.
b.
c.

den andern 3, 4 bildet, so sind sie und die Lagen der vereinigten Doppelpunkte bestimmt. Man erhält zwei Lösungen, nämlich einen Kegelschnitt 1, 2, 3, 4, der $t$ im Punkte 56 und einen, der es im Punkte 56* berührt. (Vergl. die Construction mit § 31.; 3.)

6) Man construiere die beiden Parabeln durch vier gegebene Punkte oder in einem Kegelschnittbüschel.
7) Man bestimme die Kegelschnitte zu vier Tangenten durch einen gegebenen Punkt.
8) Man erörtere die Bestimmung der weitern gemeinsamen Tangenten zu zwei Kegelschnitten, wenn zwei oder drei derselben gegeben sind — d. i. die zu b), c) im Texte dualistisch entsprechenden Constructionen.

30. Die vorigen Constructionen ermöglichen zwar auch die constructive Behandlung involutorischer Reihen und Büschel, weil diese nur eine durch Besonderheit der Lage ausgezeichnete Art vereinigter projectivischer Reihen. und Büschel sind; sie zeigen auch, dass eine Involution im Allgemeinen zwei Doppelelemente besitzen muss, die insbesondere zusammenfallen oder auch nicht reell werden können. Man entnimmt aber schonaus § 20.; 4. und an derselben Stelle (§ 20.; 7.) diess erkennen wir nun auch den Zusammenhang der Involution mit der projectivischen Erzeugung der Kegelschnitte.

Zur besten Form der die Involution betreffenden Constructionen und zugleich zur Quelle zahlreicher wichtiger Eigenschaften der Kegelschnitte gelangen wir jedoch durch die Verbindung der Lehre von der involutorischen Centralcollineation mit den vorigen Betrachtungen.

In einer involutorischen Centralcollineation bilden zwei Paare entsprechende Punkte $A, A'$; $B, B'$ auf verschiedenen Strahlen aus dem Centrum $\mathfrak{C}$ immer ein vollständiges Viereck, von dessen Diagonalpunkten zwei, nämlich $AB'$, $A'B$; $AB$, $A'B'$ in der Axe der Collineation $s$ gelegen sind, der dritte im Centrum. Ebenso bilden zwei Paare entsprechende Gerade $a, a'$; $b, b'$ in ihr aus verschiedenen Punkten der Axe ein vollständiges Vierseit, von dessen Diagonalen zwei, nämlich $ab'$, $a'b$; $ab$, $a'b'$ durch das Centrum der Collineation $\mathfrak{C}$ hindurchgehen, die dritte in der Axe liegt. Diese Vierecke und

Vierseite entsprechen sich selbst in der involutorischen Centralcollineation. Man findet solche Vierecke und Vierseite in Fig. 59. a. b. c.

Geht man zu drei Paaren entsprechender Elemente $A, A'$; $B, B'$; $C, C'$ respective $a, a'$; $b, b'$; $c, c'$ weiter, so erkennt man, dass dieselben stets ein Pascal'sches Sechseck, mit der Collineationsaxe $s$ als seiner Pascal'schen Linie, respective ein Brianchon'sches Sechsseit mit $\mathfrak{C}$ als seinem Brianchon'schen Punkt bilden. Drei solche Elementenpaare bestimmen also einen Kegelschnitt, der in der involutorischen Centralcollineation sich selbst entspricht. (Fig. 59. a. b. c.)

Eine Gerade durch das Centrum $\mathfrak{C}$ schneidet den Kegelschnitt in zwei Punkten, die durch das Centrum und die Axe $s$ harmonisch getrennt sind.

Durch einen Punkt auf der Axe $s$ gehen zwei Tangenten an den Kegelschnitt, die durch den nach dem Centrum gehenden Strahl und die Axe harmonisch getrennt sind.

Wenn unter diesen Geraden zwei Tangenten des Kegelschnitts sind, so berühren dieselben ihn in den Punkten, die er mit der Axe $s$ gemein hat.

Wenn unter diesen Punkten zwei Punkte des Kegelschnitts sind, so gehen die zugehörigen Tangenten desselben nach dem Centrum $\mathfrak{C}$.

Wir nennen das Centrum der involutorischen Collineation und die Axe derselben respective Pol und Polare in Bezug auf den Kegelschnitt; denn man hat sofort die Sätze:

Jeder Kegelschnitt ist für jeden Punkt seiner Ebene als Centrum mit sich selbst in involutorischer Centralcollineation.

Jeder Kegelschnitt ist für jede Gerade seiner Ebene als Axe mit sich selbst in involutorischer Centralcollineation.

(Vergl. § 26. über die centrische Collineation zweier beliebigen Kegelschnitte der Ebene.)

Die zugehörige Collineationsaxe geht durch alle nachfolgend bezeichneten Punkte oder ist der Ort derselben (Fig.

Das zugehörige Collineationscentrum liegt auf allen nachfolgend bezeichneten Geraden oder ist die Enveloppe

59. a. b. c.); nämlich der Ort der vierten harmonischen dem Centrum conjugierten Punkte zu den Punkten $A, A'$; $B, B'$; etc. des Kegelschnitts auf jedem durch das Centrum gehenden Strahl; der Ort der Schnittpunkte der Geraden, welche jene Paare von Punkten kreuzweis verbinden, wie $AB'$, $A'B$; etc.; ferner der Ort der Schnittpunkte von $AB$, $A'B'$; etc. und der Ort der Schnittpunkte der Tangenten $a$, $a'$; etc. des Kegelschnitts in den entsprechenden Punkten wie $A$, $A'$; etc.

derselben (Fig. 59. a. b. c.); nämlich die Enveloppe der vierten harmonischen der Axe conjugierten Strahlen zu den Tangenten $a$, $a'$; $b$, $b'$; etc. des Kegelschnitts aus jedem auf der Axe liegenden Punkte; die Enveloppe der Verbindungslinien der Punkte, in welchen jene Paare von Tangenten kreuzweis sich schneiden, wie $ab'$, $a'b$; etc.; ferner die Enveloppe der Verbindungslinien von $ab$, $a'b'$; etc. und die Enveloppe der Verbindungslinien der Berührungspunkte $A$, $A'$; etc. des Kegelschnitts in den entsprechenden Tangenten wie $a$, $a'$; etc.

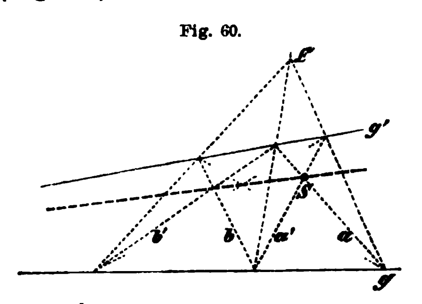
Darin liegen die constructiven Hilfsmittel für den Uebergang vom Centrum der Involution zur Axe derselben, d. i. vom Pol zur Polare, so wie für den umgekehrten von der Polare zum Pol. Die Gerade durch die Halbierungspunkte aller der Strecken zwischen Pol und Polare auf den verschiedenen durch den Pol gehenden Strahlen ist — als Vereinigung der Gegenaxen der involutorischen Systeme — der Ort der freien Ecken aller der Parallelogramme, welche die vom Pol ausgehenden Parallelen entsprechender Geradenpaare — speciell entsprechender Tangentenpaare des Kegelschnitts — mit diesen selbst bilden. (§ 20.). Diese Paare der entsprechenden Geraden erzeugen auf der durch den Pol gezogenen Parallelen zur Polare symmetrisch gleiche projectivische Reihen $V$, $V'$ (Fig. 59. a. b. c.), die den Pol zum Doppelpunkt haben. (§ 20.; 1. Vergl. § 19.; 3.)

Sonach besitzt eine Involution von Punkten $A, A'$; $B, B'$; ⋯ auf einem Kegelschnitt nicht nur eine Axe oder Polare, in welcher sich die Paare der Geraden $AB'$, $A'B$; $AC'$, $A'C$; $AB$, $A'B'$; etc. schneiden (§ 29.), sondern auch ein Centrum oder einen Pol, in welchem

alle Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$, $\cdots$ convergieren. Und eine Involution von Tangenten $a$, $a'$; $b$, $b'$; $\cdots$ an einen Kegelschnitt besitzt ausser einem Centrum oder Pol, in welchem die Verbindungslinien der Punktepaare $ab'$, $a'b$; $ac'$, $a'c$; $ab$, $a'b'$; etc. convergieren (§ 29.). auch eine Axe oder Polare, in welcher alle die Punkte $aa'$, $bb'$, $\cdots$ liegen.

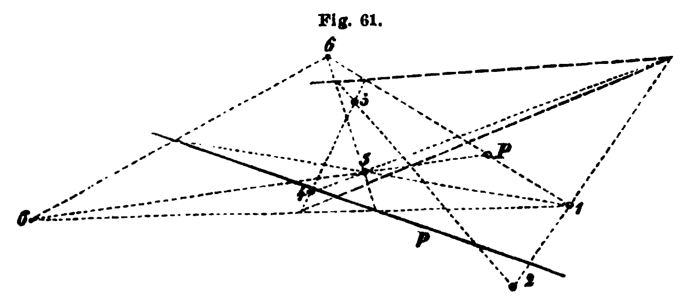
1) Man bestimme die gerade Linie von einem Punkte $S$ nach dem unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden $g$ und $g'$ durch Punkte ohne Hilfe des Zirkels (Fig. 60.). Man zieht durch $S$ zwei Gerade

Fig. 60.



$a$, $a'$ und betrachtet $g$, $g'$; $a$, $a'$ als entsprechende Paare einer involutorischen Perspective; sie geben 𝔈 als Centrum derselben, damit weitere Paare wie $b$, $b'$ und damit neue Punkte der Axe derselben, welche durch $S$ und $g$, $g'$ gehen muss. (Vergl. § 57.; 1.)

Fig. 61.

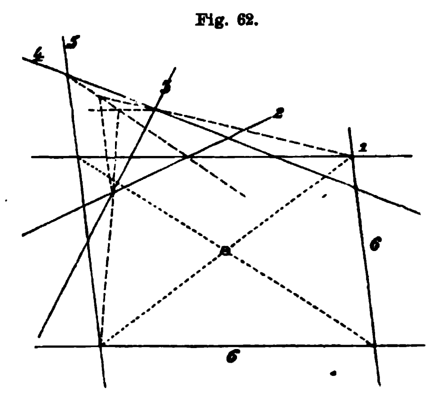


2) Man bestimme die Polare $p$ eines Punktes $P$ in Bezug auf denjenigen Kegelschnitt, welcher durch fünf andere Punkte 1, 2, 3, 4, 5 der Ebene bestimmt ist — indem man (Fig. 61.) die Verbindungslinien

von $P$ mit zweien jener Punkte (1, 5) und ihre ferneren Schnittpunkte (6) mit dem Kegelschnitt benutzt. Speciell, wenn der Punkt $P$ der unendlich ferne Punkt einer gegebenen Geraden ist.

3) Man construiere den Pol $P$ einer Geraden $p$ in Bezug auf die durch ihre Asymptoten und eine andere Tangente bestimmte Hyperbel; insbesondere

Fig. 62.



den Pol der unendlich entfernten Geraden für den durch fünf Tangenten bestimmten Kegelschnitt. Die Construction des Letzteren in Fig. 62. ist zu erklären.

4) Die Projectionen $T'$ und $p'$ des Pols $P$ und der Polaren $p$ für einen Kegelschnitt $K$ sind Pol und Polare für die Projection des Kegelschnitts $K'$.

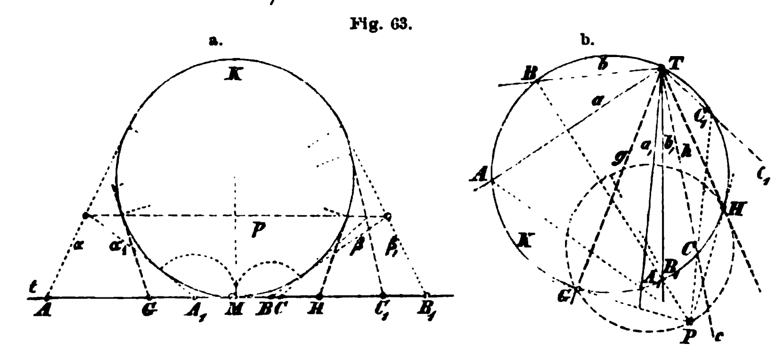
31. Durch das Vorige sind die besten Mittel zur Behandlung der Probleme über die involutorischen Büschel und Reihen gewonnen, welche denen des § 29. analog sind.

1) Zwei Paare von Punkten einer Geraden $t$ oder zwei Paare von Strahlen eines Punktes $T$, welche sich entsprechen, $A, A_1$; $B, B_1$ oder $a, a_1$; $b, b_1$ bestimmen eine Involution von Punkten oder Strahlen. Man construiert

a) für einen Kreis $K$, welcher $t$ berührt — respective durch $T$ geht — das System involutorischer Tangenten aus $A, A_1$; $B, B_1$, nämlich $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ (Fig. 63. a.) — respective das System involutorischer

Punkte auf $a$, $a_1$, $b$, $b_1$, nämlich $A$, $A_1$, $B$, $B_1$ (Fig. 63. b.) — und zu diesem die Polare $p$ — respective den Pol $P$;

Fig. 63.



b) ein Viereck, von dessen Gegenseitenpaaren das eine durch $A$, $A_1$, das andere durch $B$, $B_1$ geht. (§ 25.; 3.)

Man bestimme zum Punkte $C$, respective Strahl $c$, den entsprechenden Punkt $C_1$ — Strahl $c_1$ — der Involution; sowohl nach a) als nach b).

2) Man ermittele die Doppelpunkte $G$, $H$ einer involutorischen Reihe in $t$ und die Doppelstrahlen $g$, $h$ eines involutorischen Büschels aus $T$ — mittelst des Pols respective der Polare der Involution in 1, $a$).

3) Man bestimme die durch vier feste Punkte gehenden — oder vier feste Gerade berührenden — Kegelschnitte mit einer gegebenen Geraden als Tangente — respective durch einen gegebenen Punkt (§ 25.; 2.); speciell die Parabeln durch vier Punkte.

4) Die Doppel-Elemente sind reell, wenn die Paare entsprechender Elemente sich nicht trennen, und sind nicht reell, wenn dieselben sich trennen. Je nachdem die Doppelelemente reell und verschieden, vereinigt oder nicht reell sind, nennt man die Involution eine hyperbolische, parabolische oder elliptische Involution von Punkten oder Strahlen.

5) Wie bestimmt man den Centralpunkt der Involution von Punkten $A$, $A_1$, $B$, $B_1$ in der Geraden $t$?

6) Man construiere das Paar $r, r_1$ entsprechender rechtwinkliger Strahlen des involutorischen Strahlenbüschels $a, a_1, b, b_1$ (§ 20.; 3.) Fig. 64. und zeige, dass sie im Fall reeller Doppelstrahlen die von diesen gebildeten Winkel halbieren.

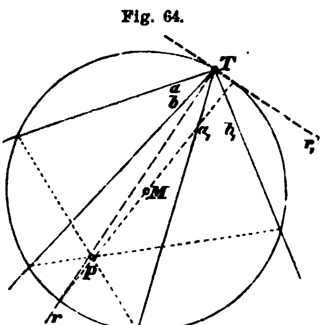
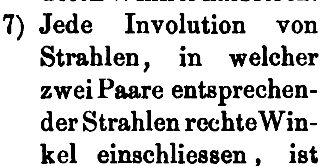


Fig. 64.



7) Jede Involution von Strahlen, in welcher zwei Paare entsprechender Strahlen rechte Winkel einschliessen, ist eine Involution rechter Winkel, d. h. besteht aus lauter rechtwinkligen Paaren.

8) Alle Rechtwinkel-Involutionen sind einander gleich; wir legen daher ihren nicht reellen Doppelstrahlen, die nach den Schnittpunkten des Hilfskreises mit der unendlich fernen Polare der Involution gehen, einerlei feste Richtungen bei; d. h. alle Kreise derselben Ebene gehen durch zwei feste nicht reelle Punkte $J_1$, $J_2$ in der unendlich fernen Geraden. Wir nennen sie die Kreispunkte der Ebene.

9) Die centrale Projection der Involution rechter Winkel mit ihrem Hilfskreis ist eine allgemeine Involution ohne reelle Doppelstrahlen mit ihrem Pol und ihrer Polare.

10) Die Doppelstrahlen gleichwinkliger projectivischer Büschel von einerlei Scheitel und von gleichem Sinn gehen nach den Kreispunkten der Ebene.

11) Winkel von einerlei Halbierungslinien bilden eine symmetrische Involution (§ 21.; 6.); der Pol derselben im Hilfskreis ist unendlich fern, die Polare ein Durchmesser.

12) Man construiere eine Involution von Strahlen aus den Doppel-Elementen; speciell eine involutorische Reihe aus einem Paare und dem Centralpunkt; etc.

13) Zwei Involutionen in derselben Geraden oder um denselben Punkt haben im Allgemeinen ein gemein-

schaftliches Paar von Elementen. Welches sind die Bedingungen für die Realität desselben? Man bestimme es, wenn die Doppel-Elemente der Involutionen gegeben sind.

14) Man construiere diejenigen Kegelschnitte von zwei Büscheln (§ 25.; 1.) $ABCD$, $A^*B^*C^*D^*$, welche sich in der Geraden $t$ ihrer Ebene durchschneiden; ebenso diejenigen Kegelschnitte zweier Schaaren (ibid.) $abcd$, $a^*b^*c^*d^*$, welche die nämlichen Tangenten aus einem Punkte $T$ ihrer Ebene haben. Speciell die Hyperbeln mit parallelen Asymptoten, etc.

15) Alle Hyperbeln mit denselben Asymptoten bestimmen in einer beliebigen Geraden Punktepaare einer symmetrischen Involution, in welcher die Schnittpunkte mit den Asymptoten ein Paar bilden. Die Centralprojection der Figur liefert einen allgemeineren Satz.

16) Man construiere nach dem vorigen Satze eine Hyperbel aus den Asymptoten und einem ihrer Punkte — mittelst der Strahlen durch diesen.

32. Die Constructionen des § 30. für den Uebergang vom Pol zur Polare und umgekehrt enthalten eine Reihe wichtiger Sätze für die ebenen involutorisch collinearen Systeme.

a) In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Viereck ist die gerade Verbindungslinie von zwei Diagonalpunkten (§ 22.; 3.) die Polare des dritten Diagonalpunktes in Bezug auf den Kegelschnitt.

Man nennt die Diagonalpunkte ein Tripel harmonischer Pole in Bezug auf den Kegelschnitt.

In jedem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Vierseit ist der Durchschnittspunkt von zwei Diagonalen (§ 22.; 3.) der Pol der dritten Diagonale in Bezug auf den Kegelschnitt.

Man nennt die Diagonalen ein Tripel harmonischer Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt.

Die von solchen Tripeln gebildeten Dreiecke und Dreiseite heissen auch sich selbst conjugiert in Bezug auf den Kegelschnitt.

b) Die Polaren aller Punkte einer Geraden $p$ in Bezug auf einen Kegelschnitt gehen durch den Pol $P$ dieser Geraden.

Die Pole aller Geraden aus einem Punkte $P$ in Bezug auf einen Kegelschnitt liegen in der Polare $p$ dieses Punktes.

Die Reihe der Pole in der Polare und das Büschel der entsprechenden Polaren aus dem Pol sind projectivisch; jene bestimmen mit dem Pol ein Büschel, dessen Strahlen denen des Büschels der Polaren projectivisch und involutorisch d. i. vertauschungsfähig entsprechen; diese bestimmen mit der Polare eine Reihe, deren Punkte den Polen projectivisch und involutorisch entsprechen d. h.:

c) Alle Strahlen eines ebenen Strahlenbüschels ordnen sich in Bezug auf einen festen Kegelschnitt seiner Ebene so in Paare, dass die eine Gerade jedes Paares den Pol der andern in Bezug auf denselben enthält.

Alle Punkte einer geradlinigen Reihe ordnen sich in Bezug auf einen festen Kegelschnitt ihrer Ebene so in Paare, dass der eine Punkt jedes Paares in der Polare des andern in Bezug auf denselben liegt.

Diese Paare bilden eine Involution, die I n v o l u t i o n h a r m o n i s c h e r P o l a r e n um den betrachteten Punkt.

Diese Paare bilden eine Involution, die I n v o l u t i o n h a r m o n i s c h e r P o l e in der betrachteten Geraden.

Die Doppelstrahlen derselben sind Tangenten des Kegelschnitts aus dem Punkte.

Die Doppelpunkte derselben sind Schnittpunkte des Kegelschnitts mit der Geraden.

Die Involution harmonischer Polaren um einen Punkt und die Involution harmonischer Pole auf der Polare dieses Punktes sind perspectivisch.

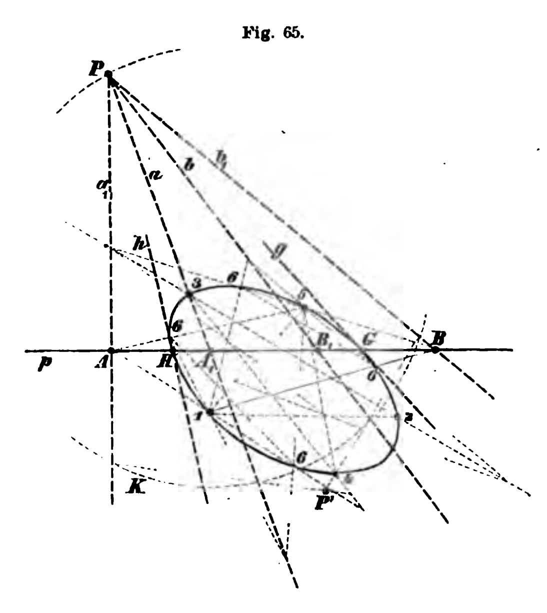
1) Man construiere die Involution harmonischer Pole auf einer Geraden $p$ und die der harmonischen Polaren um ihren Pol $P$ für einen Kegelschnitt der durch fünf Punkte bestimmt ist.

   Man hat von zwei Punkten $A$, $B$ der Geraden die Polaren $a$, $b$ zu ermitteln (§ 30.; 2.). Die Construction in Fig. 65. ist zu erklären. (Vergl. Fig. 61., p. 96.)

2) Man finde die Schnittpunkte des durch fünf Punkte bestimmten Kegelschnitts mit einer Geraden $p$ als

Doppelpunkte der ihr angehörigen Involution harmonischer Pole; ebenso die Taugenten aus einem Punkte $P$ an denselben (Fig. 65.).

Fig. 65.



3) Man bestimme den Centralpunkt $M$ derselben Involution — mittelst der Polare der Richtung der Geraden.

4) Man erläutere die Construction von Pol und Polare für den Kreis und den Satz, dass die Polare zum Durchmesser des Polsr echtwinklig ist, vom Standpunkte der involutorischen Central-Collineation. Das Rechteck aus den Abständen des Pols und der Polare vom Centrum ist dem Quadrat des Halbmessers gleich. (§ 20.; 6.)

5) Die Polare eines Punktes des Kegelschnitts ist die Tangente desselben in ihm und der Pol einer Tangente ist ihr Berührungspunkt. Die Punktreihe $A, B, C, \cdots$ in der Tangente $t$ und das Büschel der ihnen entsprechenden Polaren $a, b, c, \cdots$ sind projectivisch oder das Doppelverhältniss von vier Punkten eines Kegelschnitts ist dem der entspre-

chenden Tangenten desselben gleich. (Vergl. § 24., p. 73.)

6) Die Involution harmonischer Pole in der Tangente $t$ ist parabolisch (§ 31.; 4.), die entsprechenden $A_1, B_1, \cdots$ aller Punkte $A, B, \cdots$ sind im Berührungspunkte $T$ vereinigt. Ebenso ist die Involution harmonischer Polaren aus einem Punkte des Kegelschnitts parabolisch.

7) Die Involution harmonischer Polaren aus dem Centrum $\mathfrak{C}$ und die der harmonischen Pole auf der Axe der Collineation $s$ sind zwei Kegelschnitten $K, K'$ gemein, von denen der eine in der bezüglichen centrischen Collineation dem andern entspricht. Diess Verhalten ist von der Realität der Doppelelemente jener Involutionen d. h. von der Existenz gemeinschaftlicher Tangenten aus $\mathfrak{C}$ und gemeinschaftlicher Punkte auf $s$ unabhängig.

8) Geht von zwei zu einander centrisch collinearen Kegelschnitten der eine durch das Centrum $\mathfrak{C}$, so thut diess auch der andre und beide haben in ihm dieselbe Tangente (6.).

33. Jeder aus Punkten und Geraden zusammengesetzten Figur in der Ebene eines Kegelschnitts $K$ entspricht eine aus den Polaren jener Punkte und den Polen jener Geraden ganz gleich zusammengesetzte Figur, in der jedem Strahlenbüschel der ersten eine ihm projectivische Punktreihe der zweiten und umgekehrt entspricht — die Polarfigur der ersten in Bezug auf $K$; gleichzeitig ist die erste Figur die Polarfigur der zweiten in Bezug auf $K$. Man nennt daher zwei solche Figuren reciproke Polar-Figuren in Bezug auf $K$ und bezeichnet diesen Kegelschnitt als die Directrix der Reciprocität.

Darnach giebt die Figur eines geometrischen Satzes oder Problems der eines neuen Satzes oder Problems den Ursprung; das Princip der Reciprocalfiguren oder der Reciprocität erlaubt darnach, die Menge der geometrischen Wahrheiten zu vermehren; aus dem Satze von Pascal lässt es den Satz von Brianchon hervorgehen, etc. In den vorhergehenden Entwickelungen liefern alle die parallel neben einander gestellten

Sätze und Aufgaben Beispiele für diesen Uebergang. Ihre Nebeneinanderstellung im Vorhergehenden ist aber von diesem Princip unabhängig aus der dualistischen Natur des Prozesses der Projection, und des ihn beherrschenden Gesetzes der Doppelverhältnissgleichheit hervorgegangen; so wie jener sich aus der Bildung des Scheines oder des projicierenden Bündels und der seines Schnittes mit der Bildebene zusammensetzt, so erstreckt sich dieses gleichmässig auf Reihen von Punkten und auf Büschel von Strahlen und Ebenen. Unsere Entwickelung giebt jene Sätze als Folgen jenes allgemeinen Gesetzes der Dualität, das die geometrischen Formen und ihre Eigenschaften beherrscht (§ 23.); im Besondern entsprechen sie einander auch nach dem Princip der Reciprocität.

1) Die Polarfigur eines Kreises (oder Kegelschnitts) in Bezug auf einen Kreis als Directrix der Reciprocität ist ein Kegelschnitt, und zwar eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Mittelpunkt des Directrixkreises in dem gegebenen Kreise, auf seiner Peripherie oder ausserhalb desselben liegt. Weitere Beziehungen für denselben würden sich in Anwendung der folgenden Entwickelungen ergeben; z. B. der Mittelpunkt der Directrix ist ein Brennpunkt desselben nach § 35.

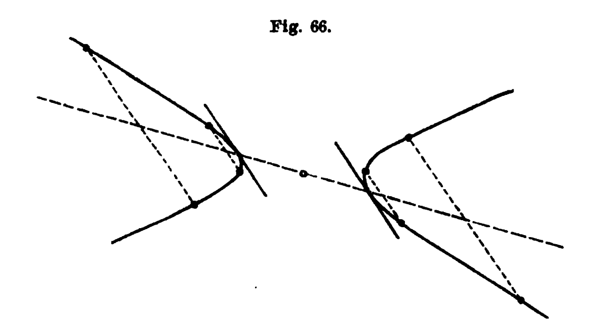
2) Die Punkte der Bildebene und die Spuren der projicierenden Normalebenen zu den durch sie bestimmten projicierenden Strahlen bilden zwei polarreciproke Systeme mit einem aus dem Hauptpunkte $C_1$ mit dem nicht reellen Halbmesser $d\sqrt{-1}$ beschriebenen Kreise als Directrix der Reciprocität. (Vergl. § 10., § 20. Ende und § 32.; 4.) Einem Kegelschnitt der Bildebene entspricht so ein anderer Kegelschnitt derselben als Enveloppe der Spuren der projicierenden Normalebenen zu den projicierenden Strahlen, welche nach den Punkten des ersteren gehen; etc.

34. Einige Specialfälle der allgemeinen Gesetze des § 32. sind von besonderer Wichtigkeit; zuerst solche, in welchen der Träger der Involution harmonischer Polaren oder Pole eine specielle, nämlich unendlich ferne Lage hat; sodann solche,

in denen die Involution harmonischer Polaren selbst von besonderer Art, nämlich eine Involution rechter Winkel ist.

1) Ist der Pol $P$ unendlich entfernt, so halbiert die Polare alle durch ihn gehenden, unter einander parallelen Sehnen des Kegelschnitts; der Kegelschnitt entspricht sich selbst in einer Axensymmetrie, für welche diese Polare die Axe ist (§ 21.; b.) Man nennt diese einem unendlich fernen Centrum entsprechende Axe der Involution am Kegelschnitt den der Richtung des Centrums also auch der von ihr halbierten Sehnen conjugierten Durchmesser des Kegelschnitts. Die Tangenten des Kegelschnitts in den Schnittpunkten dieses Durchmessers mit ihm sind parallel diesen Sehnen (Fig. 66.) und die

Fig. 66.



Berührungspunkte der zu ihm selbst parallelen Tangenten liegen auf dem gleichgerichteten Durchmesser. Dieser Letztere als die Polare der Richtung des ersteren Durchmessers halbiert diesen so wie alle zu ihm parallelen Sehnen. Man nennt ihn den dem ersten conjugierten Durchmesser. Ihre Richtungen bilden ein Paar in der dem Kegelschnitt entsprechenden Involution harmonischer Pole auf der unendlich fernen Geraden.

2) In jedem Durchmesser liegt eine Involution harmonischer Pole, die ihre Doppelpunkte in der Peripherie des Kegelschnitts hat; der Centralpunkt $M$ dieser Involutionen ist allen gemein und heisst der Mittelpunkt des Kegelschnitts. (Vergl. 3.)

3) Ist die Polare $p$ unendlich fern, so werden alle durch den Pol gehenden Sehnen in demselben halbiert und sind Durchmesser des Kegelschnitts. Der Pol der unendlich fernen Geraden ist der Mittelpunkt des Kegelschnitts.
4) In Bezug auf den Mittelpunkt entspricht der Kegelschnitt sich selbst in einer centrischen Symmetrie (§ 21.; d.).
5) In der Centralprojection $K'$ eines Kreises $K$ wird das Bild vom Pol der Gegenaxe $r$ im Kreise zum Mittelpunkt. (Vergl. § 32.; 5.)
6) Alle Durchmesser der Parabel sind einander parallel, da sie durch den unendlich fernen Punkt derselben gehen.
7) Alle die Durchmesser eines Kegelschnitts bilden die Involution harmonischer Polaren aus dem Mittelpunkt desselben; die Paare der conjugierten Durchmesser sind die Paare derselben. Ihre Doppelstrahlen sind reell und verschieden, zusammenfallend oder nicht reell, jenachdem die unendlich ferne Gerade den Kegelschnitt in reellen und verschiedenen, vereinigten oder nicht reellen Punkten schneidet, d. h. reell und verschieden in der Hyperbel, zusammenfallend — in der unendlich fernen Geraden — für die Parabel, nicht reell für die Ellipse. Sie sind die Asymptoten des Kegelschnitts. (Man vergl. die Benennungen des § 31.; 4.) In der Ellipse trennen sich die Paare der conjugierten Durchmesser, in der Hyperbel trennen sie sich nicht; in der Parabel fällt von einem Paare derselben immer der eine mit der unendlich fernen Geraden zusammen.
8) In der Hyperbel wird jedes Paar der conjugierten Durchmesser von den Asymptoten harmonisch getrennt. Von zwei conjugierten Durchmessern der Hyperbel schneidet sie also der eine, die Involution harmonischer Pole auf dem andern ist ohne reelle Doppelpunkte (2.).
9) Das Rechtwinkelpaar der Involution der conjugierten Durchmesser nennt man die Axen des Kegelschnitts;

die Tangenten desselben in ihren Schnittpunkten mit ihm, die man seine Scheitel nennt, sind orthogonal zu ihnen. Der Kegelschnitt ist in Bezug auf jede seiner Axen in orthogonaler Axensymmetrie.

10) In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Parallelogramm sind die Parallelen zu den Seiten aus dem Schnittpunkt der Diagonalen zwei conjugierte Durchmesser.

In jedem einem Kegelschnitt umgeschriebenen Parallelogramm sind die Diagonalen zwei conjugierte Durchmesser. (§ 32.; a.)

11) In der gleichseitigen Hyperbel, deren Asymptoten rechtwinklig zu einander sind, besteht die Involution der conjugierten Durchmesser aus zwei gleichwinkligen Strahlenbüscheln mit entgegengesetztem Drehungssinn oder sie ist eine symmetrische Involution. Die aus den Endpunkten eines Durchmessers über den Punkten der gleichseitigen Hyperbel gebildeten Strahlenbüschel sind gleich.

12) Man construiere eine gleichseitige Hyperbel durch drei Punkte und eine Asymptotenrichtung.

13) Alle gleichseitigen Hyperbeln durch drei Punkte gehen auch durch den Durchschnittspunkt der drei Höhen in dem von diesen gebildeten Dreieck.

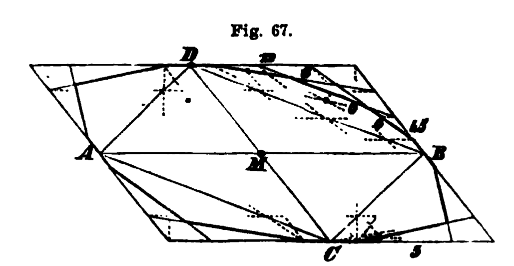
14) Wenn es in einem Kegelschnitt zwei Paare von rechtwinkligen conjugierten Durchmessern giebt, so sind alle Paare derselben rechtwinklig; der Kegelschnitt ist ein Kreis und durch einen Punkt seiner Peripherie bestimmt.

15) Die Parabel hat nur eine Axe und einen Scheitel; man construiere beide, wenn vier Tangenten bekannt sind — zuerst die Richtung der Axe, dann den Scheitel.

16) Man construiere aus den fünf einen Kegelschnitt bestimmenden Punkten $A, B, C, D, E$ zwei Paare conjugierter Durchmesser desselben, seine Axen, etc. Man zieht $AB$ und dazu parallel $DF$ und halbiert beide Sehnen; ebenso für $BC$ und etwa das dazu parallele $DG$.

17) Man construiere eine Ellipse aus zwei conjugierten Durchmessern $AB$, $CD$ durch Tangenten und deren Berührungspunkte — indem man von den zwei Tangenten in den Enden eines Durchmessers die eine als Vereinigung der ersten und zweiten (12), die andere als dritte Seite (3), die Tangente in einem Endpunkt

Fig. 67.




des andern Durchmessers als Vereinigung der vierten und fünften Seite (45) des Brianchon'schen Sechsseits betrachtet (Fig. 67.); die Berührungspunkte nach §28.; 4. Man disponiere so, dass nur der im Inneren des Parallelogramms der gegebenen Tangenten gelegene Raum für die Construction benutzt wird.

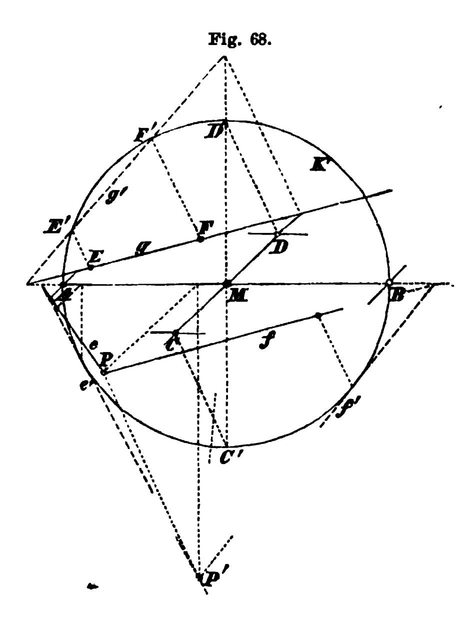
18) Wenn eine Ellipse und ein Kreis einen Durchmesser gemein haben, so sind sie als affine Figuren für diesen Durchmesser als Axe der Affinität anzusehen; die Verbindungslinien der Endpunkte derjenigen Durchmesser von beiden, welche dem gemeinsamen Durchmesser conjugiert sind, geben die Richtung der Affinitätsstrahlen. Sie sind zur Affinitätsaxe rechtwinklig, wenn diese eine Axe für die Ellipse ist.

19) Von einer Ellipse (Fig. 68.) sind die Endpunkte von zwei conjugierten Durchmessern $AB$, $CD$ gegeben; man soll ihre Durchschnittspunkte $E$, $F$ mit einer Geraden $g$ und ihre Tangenten $e$, $f$ von einem Punkte $P$ ihrer Ebene construieren — indem man sie als affin zu dem über einem jener Durchmesser beschriebenen concentrischen Kreise $K'$ betrachtet, und durch Bestimmung der im Kreissystem entsprechenden Geraden $g'$ und des dort entsprechen-

den Punktes $P'$ von den Schnittpunkten $E'$, $F'$ und Tangenten $e'$, $f'$ dieser Letztern mit dem Kreise $K'$ zu den Geforderten übergeht. Die Figur 68. enthält die Ausführung; auch die Berührungspunkte der Tangenten $e$ und $f$; man wird leicht die Tangenten für die Punkte $E$, $F$ hinzufügen.

20) Die Axen eines durch fünf Punkte gehenden Kegelschnitts können auch mittelst eines Kreises be-

Fig. 68.




stimmt werden, der durch drei von diesen fünf Punkten $A$, $B$, $C$ geht und dessen vierter Schnittpunkt $D'$ mit demselben daher nach § 29.; d. linear bestimmt ist. In der durch diesen Kreis und den Kegelschnitt nach § 25.; 1. bestimmten Involution von Schnittpunkten in der unendlich fernen Geraden, zu der auch die Richtungen der Gegenseitenpaare des Kreisvierecks der gemeinsamen Punkte als Paare gehören, sind die Axenrichtungen des Kegelschnitts zu den Kreispunkten und den Asymptotenrichtungen des Kegelschnitts zugleich harmonisch, d. h. sie sind die Doppelpunkte jener Invo-

lution. Bildet man aber ferner im Viereck $ABCD$, die Durchschnittspunkte der Gegenseitenpaare $E, F, G$ und die Halbierungslinien der von diesen gebildeten Winkel, so sind ihre Richtungen als zu drei Paaren der vorbetrachteten Involution zugleich harmonisch identisch unter einander und mit den Doppelpunkten jener Involution. Nachdem durch diese Bemerkungen die Richtungen der Axen bestimmt sind, erhält man leicht die Axen selbst.

Ihre Endpunkte erfährt man als Doppelpunkte der bezüglichen Involution harmonischer Pole, welche offenbar durch den Schnitt einer Tangente mit der Axe und der der Normale zur Letzteren vom bezüglichen Berührungspunkte bestimmt wird. (2.)

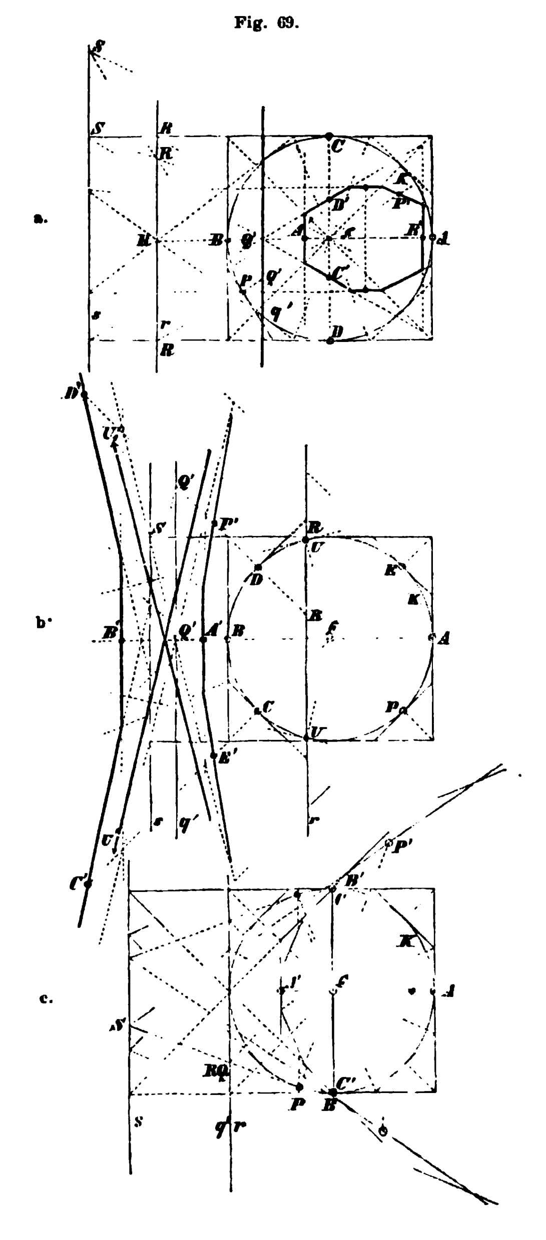
35. Die Punkte in der Ebene eines Kegelschnitts, für welche die ihnen entsprechenden Involutionen harmonischer Polaren rechtwinklige Involutionen sind, heissen die Brennpunkte desselben. Die Polare eines Brennpunkts in Bezug auf den Kegelschnitt heisst eine Directrix desselben.

Da nach § 32.; 7 die Involution harmonischer Polaren aus dem Centrum der Collineation $\mathfrak{C}$ einem beliebigen Originalkegelschnitt und seinem Bilde gemeinsam ist, so erhält man in der centrisch collinearen Figur zu einem Kreise $K$, dessen Mittelpunkt das Collineationscentrum $\mathfrak{C}$ ist, einen Kegelschnitt $K'$, der diesen Punkt zum Brennpunkt hat (Fig. 69.; a. b. c.); die zugehörige Directrix als die Polare des Brennpunkts im Bilde ist das Bild der Polare von $\mathfrak{C}$ oder der unendlich fernen Geraden im Original, d. h. die Gegenaxe $q'$ im Bilde. Ein zweiter Brennpunkt und seine Directrix ergeben sich dann aus der Symmetrie des Kegelschnitts in Bezug auf das Centrum. Wenn die Gegenaxe $r$ den Originalkreis $K$ nicht schneidet, so ist der Kegelschnitt $K'$ eine Ellipse (Fig. a.), wenn sie ihn berührt, eine Parabel (Fig. c.), und wenn sie ihn schneidet, eine Hyperbel (Fig. b.). In jedem Falle ist für $P$ als einen Punkt des Kreises und $P'$ als den entsprechenden des Kegelschnitts auf dem Strahl mit den Gegenpunkten $Q'$ und $R$ (Fig. 69.)

$$(\mathfrak{C}\infty PR) = (\mathfrak{C}Q'P'\infty) \text{ oder } \mathfrak{C}P : \mathfrak{C}R = \mathfrak{C}P' : Q'P',$$

und da das Verhältniss $\mathfrak{C}R : Q'P'$ gleich dem Verhältniss der Abstände von $\mathfrak{C}$ bis zur Gegenaxe $r$ — schreiben wir $(\mathfrak{C}, r)$ —

Fig. 69.



und von der Gegenaxe $q'$ oder der Directrix bis $P'$ — schreiben wir $(q', P')$ — ist, der erstere Abstand aber ebenso wie $\mathfrak{C}P$ eine Constante ist, so folgt

$$\mathfrak{C}P' : (q', P') = \mathfrak{C}P : (\mathfrak{C}, r),$$

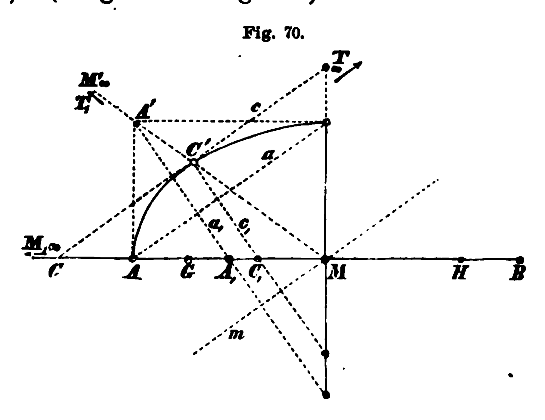
d. i. das Verhältniss der Abstände eines Punktes im Kegelschnitt von einem Brennpunkte und der entsprechenden Directrix ist constant; sein Werth ist offenbar für die Ellipse kleiner, für die Hyperbel grösser als Eins, für die Parabel gleich Eins. Der zu $q'$ normale Durchmesser $AB$ des Kreises wird zum Durchmesser und zwar zur Axe $A'B'$ des Kegelschnitts, weil er den Pol von $r$ im Kreise enthält (§ 34.; 5.) und zu seinem conjugierten Durchmesser rechtwinklig ist; nach § 15. wird sein Bild zugleich der längste Durchmesser im Falle der Ellipse und der kürzeste im Falle der Hyperbel — als solchen nennt man ihn die Hauptaxe der Curve, auch Brennpunkts-Axe. Unmittelbar fliessen dann aus derselben Construction die Sätze in 9, 10, 12, 17, 18.

Fasst man aber den Kegelschnitt nicht als Centralprojection des Kreises, sondern als Erzeugniss projectivischer Gebilde, so erhält man die Construction und die Eigenschaften der Brennpunkte auch direct aus derselben Definition — als Scheitel rechtwinkliger Involutionen harmonischer Polaren.

Da die Involution rechter Winkel keine reellen Doppelstrahlen hat, so liegen die Brennpunkte im Innern des Kegelschnitts, d. h. in dem Theile seiner Ebene, durch welchen keine Tangenten an ihn gezogen werden können, und die Directrixen haben keine reellen Punkte mit dem Kegelschnitt gemein. Da ferner die Involution rechter Winkel keine schiefwinkligen Paare zulässt, so können die Brennpunkte nur in den Axen liegen, weil sonst der entsprechende Durchmesser und die conjugierte Sehne ein schiefwinkliges Paar bilden. Man findet sie wie folgt: Einem Büschel $T_\infty$ (Fig. 70.) von parallelen zu den Axen geneigten Geraden $a, b, c, \cdots$ entspricht die ihm projectivische Reihe der Pole $A', B', C', \cdots$ im conjugierten Durchmesser, dem Durchmesser $m$ unter ihnen die Richtung $M'$ dieses conjugierten Durchmessers; der unendlich fernen Geraden, insofern sie jenem Büschel $T_\infty$ angehört, der Mittelpunkt $M$ des Kegelschnitts; fällt man von den Punkten $A', B', C', \cdots$

$M, \cdots$ die Normalen $a_1, b_1, c_1, \cdots m_1, \cdots$ zu den Sehnen $a, b, \cdots$ so ist das Büschel $T_1$ derselben dem der letztern projectivisch und die Schnittpunkte beider mit den Axen des Kegelschnitts bilden zwei projectivische Reihen $A, B, \cdots; A_1, B_1, \cdots$ in diesen, in welchen der Mittelpunkt $M$ und der bezügliche unendlich ferne Punkt $M_1$ sich vertauschbar entsprechen, also eine Involution in jeder Axe. Ist $G$ ein Doppelpunkt in einer dieser Involutionen, so bilden der durch ihn gehende Strahl $g$ des Sehnenbüschels $T$ und der entsprechende $g_1$ des Normalenbüschels $T_1$ ein Paar in der Involution harmonischer Polaren, die der Kegelschnitt an ihm bestimmt; dieselbe ist also rechtwinklig, weil sie zwei rechtwinklige Paare enthält (§ 31.; 7.). (Vergl. auch Fig. 71.)

Fig. 70.



Die Involutionen $A, A_1, \cdots$ in den Axen bestimmt — weil ihr Centralpunkt $M$ bekannt ist — je ein einziges Paar, welches durch eine Tangente $t$ ($c$ in Fig. 70.) des Kegelschnitts und die Normale $t_1$ ($c_1$ in der Fig.) zu derselben im Berührungspunkte erhalten wird. Von den Involutionen beider Axen hat immer die eine sich trennende und die andere sich nicht trennende Paare; nur die Letztere hat reelle Brennpunkte $G, H$, die vom Mittelpunkt $M$ respective von den Scheiteln $A, B$ gleichweit entfernt liegen. An diese Entwickelung schliessen sich unmittelbar die Sätze in 4, 5, 6, 7, etc.

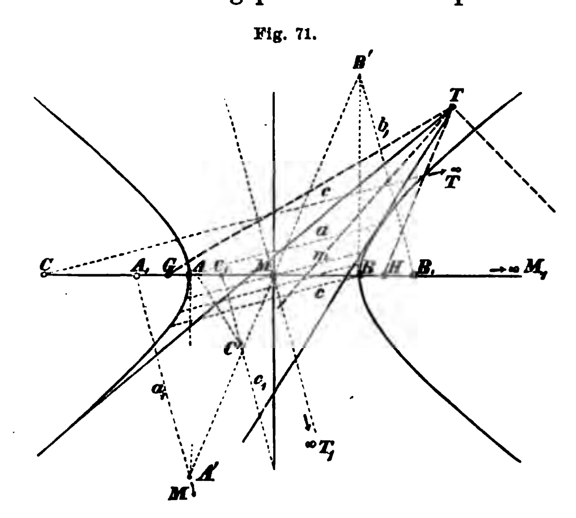
1) Ihrer Definition gemäss können die Brennpunkte angesehen werden als die beiden andern Paare der Gegenecken des nicht reellen Vierseits, welches die

Tangentenpaare von den Kreispunkten der Ebene an den Kegelschnitt mit einander bilden; die zugehörige Directrix ist die Berührungssehne der jedesmal entsprechenden beiden Tangenten (§ 31.; 8. und § 30.).

2) Wenn der Kegelschnitt die Kreispunkte der Ebene enthält, so fallen die Brennpunkte in seinem Mittelpunkt zusammen; die Involution seiner conjugierten Durchmesser ist rechtwinklig, er ist ein Kreis.

3) Die Tangente des Kreises ist rechtwinklig zum Radius des Berührungspunktes — weil parallel zum

Fig. 71.




conjugierten Durchmesser oder weil die Normale zum Mittelpunkt gehen muss als der Vereinigung der beiden Doppelpunkte der Brennpunkts-Involution in einem Durchmesser.

4) Die Brennpunkts-Involution in der Nebenaxe erscheint von jedem reellen Brennpunkte aus durch eine rechtwinklige Involution von Strahlen projiciert.

5) Ist $T$ ein Punkt in der Ebene eines Kegelschnitts, so gehen die Rechtwinkelstrahlen der ihm entsprechenden Involution harmonischer Polaren durch zwei entsprechende Punkte der Brennpunkts-Involution; sie halbieren also zugleich die von den

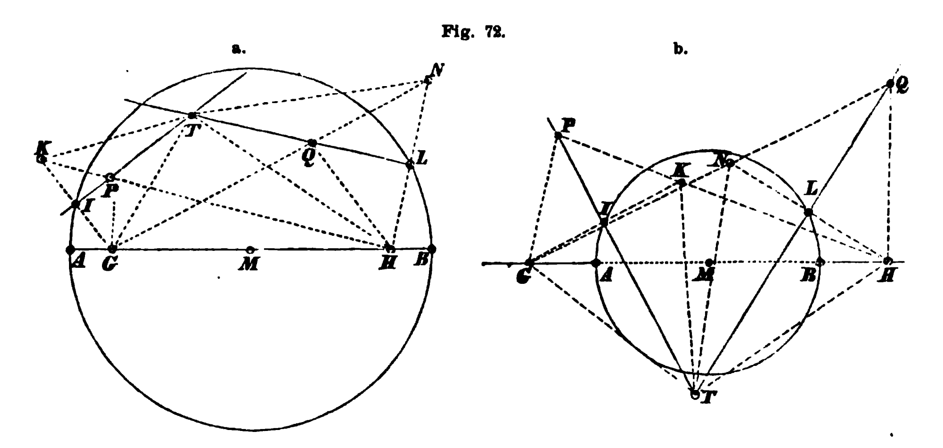
Doppelstrahlen der Involution harmonischer Polaren, d. i. den Tangenten von $T$ aus gebildeten Winkel und die Winkel der Strahlen, welche von $T$ nach den Brennpunkten $G$ und $H$ gehen, weil sie mit diesen ein harmonisches Büschel bilden müssen. Also: Die Tangenten von einem Punkte an einen Kegelschnitt und die Verbindungslinien desselben mit seinen Brennpunkten, bilden Winkel von denselben Halbierungslinien oder jene machen mit diesen gleiche Winkel.

6) Die Tangentenpaare aller Kegelschnitte mit denselben Brennpunkten aus einem Punkte ihrer Ebene bilden eine symmetrische Involution (§ 31.; 11.).
7) Die Tangente und die Normale in einem Punkte des Kegelschnitts halbieren die Winkel der Brennstrahlen (Radien vectoren) des Punktes. (Vergl. 3.).
8) Zwei Tangenten des Kreises bilden gleiche Winkel mit demjenigen Durchmesser, der nach ihrem Schnittpunkt geht.
9) Das Stück einer Kegelschnittstangente zwischen ihrem Berührungspunkt und der Directrix erscheint vom zugehörigen Brennpunkt aus unter rechtem Winkel; denn die es von da aus projicierenden Strahlen sind conjugiert in der Rechtwinkel-Involution harmonischer Polaren. Die Centralcollineation nach Maassgabe des Textes lässt diesen Satz hervorgehen aus dem Satze, dass der Radius des Berührungspunktes normal ist zu dem der Tangente parallelen Durchmesser. (Vergl. Fig. 69., p. 111.)
10) Durch die Centralcollineation im Text wird aus 8), d. i. wonach die Radien der Berührungspunkte von zwei Kreistangenten gleichgeneigt sind zu dem ihres Schnittpunktes der Satz: Die Strahlen, welche die Berührungspunkte von zwei Kegelschnittstangenten mit einem Brennpunkt verbinden, machen gleiche Winkel mit dem Strahl von diesem nach ihrem Schnittpunkt. (Vergl. 8.) Dieselbe liefert ferner den Zusatz: Der Schnittpunkt der Berüh-

rungssehne zweier Tangenten mit der Directrix und der Durchschnittspunkt der Tangenten selbst bestimmen mit dem entsprechenden Brennpunkt zwei zu einander rechtwinklige Gerade — Strahlen seiner Polar-Involution.

11) Wenn man von den Brennpunkten $G$, $H$ eines Kegelschnitts mit der Hauptaxe $AB$ und dem Mittelpunkt $M$ auf seine ihn in $P$ und $Q$ berührenden Tangenten vom Punkte $T$ aus die Normalen $GJ$ und

Fig. 72.




$HL$ fällt und dieselben nach $K$ und $N$ um ihre eigene Länge verlängert (Fig. 72., a. b.), so ist

$$\triangle HKJ \cong \triangle NGT$$

wegen $TH = TN$, $TK = TG$ und $\angle HTK = \angle NTG$;
also $HK = NG$ oder $HP \pm GP = GQ \pm HQ$.

Lässt man den Punkt $T$ die Tangente $TP$ durchlaufen, so erhellt der Satz: Die Summe der Radienvectoren eines Punktes der Ellipse respective die Differenz derselben für einen Punkt der Hyperbel ist constant; nämlich

$$= 2MJ = 2ML = HA \pm GA = AB,$$

also der Hauptaxe gleich.

12) Aus der Figur der vorigen No. folgt sofort
$\angle PGT = \angle TGQ$, der erste Satz von 10).

Fügt man eine dritte Tangente hinzu, so folgt der Satz: Das zwischen zwei festen Tangenten enthaltene Stück einer beweglichen Tangente desselben Kegelschnitts erscheint vom Brennpunkt aus unter constantem Winkel — ein Satz, der durch die Central-Collineation des Textes unmittelbar erhalten wird aus dem zweiten Fundamentalsatz über den Kreis in § 24.

Mit andern Worten: Die projectivischen Reihen, welche in zwei Tangenten eines Kegelschnitts von den übrigen gebildet werden, bestimmen mit den Brennpunkten projectivisch gleiche Büschel von gleichem Sinn; in der That gehen die Doppelstrahlen solcher Büschel nach den Kreispunkten der Ebene. (§ 31.; 10.)

13) Die Fusspunkte der Normalen von den Brennpunkten auf die Tangenten eines Kegelschnitts liegen in der Peripherie eines Kreises (Hauptkreis), der seine Hauptaxe zum Durchmesser hat; denn $MJ = ML = MA = MB$. Für die Parabel wird der Hauptkreis zur Tangente im Scheitel.

14) Man construiere den Kegelschnitt von gegebenen Brennpunkten zu einer gegebenen Tangente — durch Tangenten und deren Berührungspunkte. (13.; durch den Hauptkreis.)

15) Man construiere den durch drei Tangenten und einen Brennpunkt bestimmten Kegelschnitt (12.); insbesondere aus Scheitel, Brennpunkt und Tangente.

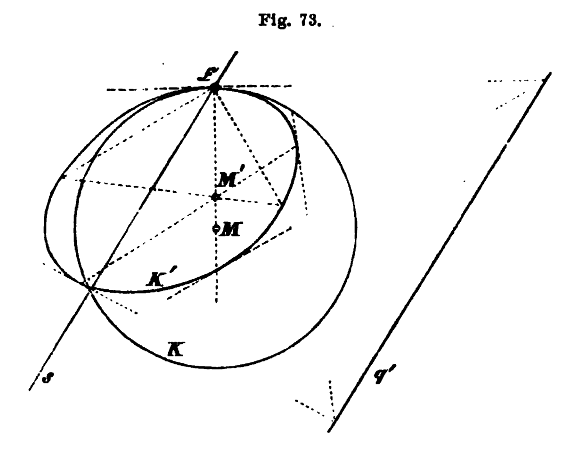
16) Durch einen Punkt gehen zwei Kegelschnitte von gegebenen Brennpunkten (Ellipse und Hyperbel), die sich rechtwinklig durchschneiden.

17) Die involutorischen Centralcollineationen eines Kreises, dessen Mittelpunkt das Centrum derselben ist, sind Kegelschnitte, die dieses zum Brennpunkt und die Linie der Gegenaxen zur entsprechenden Directrix haben; der ihr parallele Durchmesser des Kreises hat seine Endpunkte im Kegelschnitt (§ 20.; 1.).

18) Die Collinearverwandten eines Kegelschnitts für einen Brennpunkt desselben als Centrum sind Kegelschnitte, die denselben auch zu ihrem Brennpunkt haben. Je zwei Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkt sind in centrischer Collineation für diesen als Centrum.

36. Die centrische Collineation eines Kreises mit einem Kegelschnitt ist endlich noch in dem Falle von Wichtigkeit, wo das Centrum 𝔖 der Collineation ein Punkt der Kreisperipherie ist und die Collineationsaxe *s* durch diesen Punkt selbst hindurchgeht. Es ist schon in § 32.; 8. bemerkt, dass die Lage des Collineationscentrums in der Peripherie des Kreises oder Kegelschnitts die Berührung desselben mit dem collinearverwandten Kegelschnitt in ihm bedingt. Wenn dann

Fig. 73.




die entsprechenden Punkte der centrischen Collineation auf einerlei Seite des Centrums liegen, so können beide Curven zwei weitere Punkte mit einander gemein haben, die in der Collineationsaxe gelegen sind. Geht diese durch das Centrum, so fällt von ihnen noch einer mit den zwei schon in 𝔖 vereinigten gemeinsamen Punkten zusammen und es muss ein vierter gemeinsamer Punkt der Curven existiren, ihr zweiter Schnittpunkt mit der Collineationsaxe. Diese Beziehung zweier Kegelschnitte, wie sie im Punkte 𝔖 stattfindet, bezeichnet man als eine B e r ü h r u n g  z w e i t e r  O r d n u n g; ist der eine Kegel-

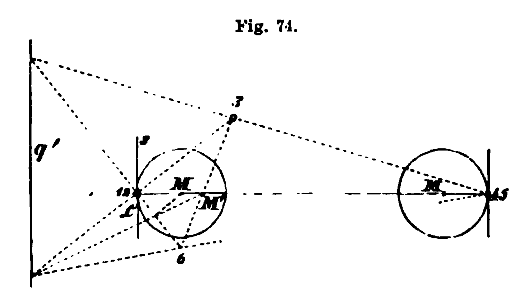
schnitt ein Kreis, so nennt man denselben den Krümmungs- oder Osculations-Kreis des Kegelschnitts in jenem Punkte und seinen Halbmesser den entsprechenden Krümmungshalbmesser desselben — denn es giebt nur einen Kreis dieser Art, weil er in 𝕮 drei unendlich nahe Punkte mit dem Kegelschnitt gemein haben und durch die Kreispunkte der Ebene gehen oder eine Rechtwinkel-Involution conjugierter Durchmesser haben muss. Die Collineation eines Kreises für einen Punkt seiner Peripherie als Centrum und eine durch diesen gehende Gerade als Axe liefert die von diesem Kreise in 𝕮 osculierten Kegelschnitte; die Lage der Collineationsaxe und einer Gegenaxe, welche zur Bestimmung der Collineation erforderlich ist, individualisieren dieselben. Die nähere Erörterung führt sofort zu Folgendem: Da der Mittelpunkt $M$ des Kreises der Pol der unendlich fernen Geraden $q$ in ihm ist, so ist sein Bild $M'$ der Pol der Gegenaxe $q'$ im Kegelschnitt; drehen wir um jenen einen Durchmesser, so dreht sich um diesen die Sehne, welche sein Bild ist und die entsprechenden Endpunkte beider liegen nothwendig in einerlei Strahl aus dem Centrum 𝕮. Beide Punkte sind also die Pole rechtwinkliger Involutionen aus 𝕮, respective im Kreis und im Kegelschnitt. Man erhält also den Punkt $M'$ im Kegelschnitt als den Pol der Involution rechter Winkel aus 𝕮 und aus ihm die Gegenaxe $q'$ als seine Polare im Kegelschnitt; damit ist die centrische Collineation bestimmt, in welcher dem als gegeben gedachten Kegelschnitt ein Kreis entspricht und die Axe $s$ durch das Centrum geht; — man erhält $s$ und $r$ für dieselbe. Darin liegt die Construction des Krümmungskreises für einen Kegelschnitt in einem gegebenen Punkte desselben, eine Construction von grosser practischer Wichtigkeit. (Fig. 73.)

1) Von einem Kegelschnitt sind fünf Punkte $A, B, C, D, E$ gegeben, man soll für einen derselben $A$ den Krümmungsmittelpunkt construieren. Man bestimmt die Schnittpunkte $B_1$, $C_1$ der zu $AB$, $AC$ normalen Geraden aus $A$ mit dem Kegelschnitt und dadurch den Pol $M'$ der Rechtwinkel-Involution aus $A$; seine Polare (§ 30.; 2.) ist die Gegenaxe $q'$, die Parallele derselben durch $A$ die Collineationsaxe $s$. Ihr zwei-

ter Schnittpunkt $F$ mit dem Kegelschnitt bestimmt den Krümmungskreis, die halbierende Normale zu $AF$ schneidet die Normale des Kegelschnitts in $A$ im Krümmungsmittelpunkt. Noch mehr direct ist derselbe der entsprechende zu $M'$.

2) Man construiere den Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel eines Kegelschnitts bei gegebenen Bestimmungsstücken. (In der Figur 74. die Scheitel der Hauptaxe und ein Punkt.) Es ergiebt sich, dass die Collineationsaxe mit der Scheiteltangente zusammen fällt, dass also alle dem Krümmungskreis und der Curve gemeinsamen Punkte im Scheitel vereinigt sind; man sagt, es finde zwischen beiden eine Berührung dritter Ordnung statt. Eine andere Construction wird uns die Untersuchung der Schraubenlinie liefern. (Vergl. Th. II., § 76.; 6.)

Fig. 74.




3) Wenn die Axenrichtungen des Kegelschnitts bekannt sind (vergl. für ihre Bestimmung aus fünf Punkten § 34.; 16.; 20.), so kann der Krümmungskreis für einen Punkt desselben auch mittelst des Satzes construiert werden, dass die gemeinsamen Sehnenpaare zwischen einem Kreis und einem Kegelschnitt die Axenrichtungen zu den Richtungen der Halbierungslinien ihrer Winkel haben. Man verzeichnet also die Tangente des Kegelschnitts im gegebenen Punkte und dann die Linie unter gleicher Neigung mit derselben zu den Axen, sowie deren zweiten Schnittpunkt mit der Curve. Der Krümmungskreis geht durch ihn und den gegebenen

Punkt und hat seinen Mittelpunkt in der dem Letzteren entsprechenden Normale. Diese Construction ist auf die Scheitel der Curve nicht anwendbar.

### C. Die centrische Collineation räumlicher Systeme als Theorie der Modellierungs-Methoden.

37. Wenn ein Centrum $C$ der Projection und eine nach drei Dimensionen ausgedehnte Originalfigur beliebig gegeben sind, so kann man auf allen durch das Centrum gehenden Ebenen, welche dieselbe schneiden, die Beziehung der centrischen Collineation ebener Systeme in der Weise hergestellt denken, dass jedem Punkte $P$ des Originals ein Punkt $P_1$ des Abbilds und umgekehrt entspricht und ebenso jeder Geraden $g$ eine Gerade $g_1$ und also jeder Ebene $\mathbf{E}$ eine Ebene $\mathbf{E}_1$; entsprechende Punktepaare liegen auf einerlei Strahl aus dem Centrum, entsprechende Paare von Geraden auf einerlei Ebene durch dasselbe. In jeder von diesen Ebenen liegen die sich selbst entsprechenden, vom Centrum selbst verschiedenen Punkte in einer geraden Linie, der entsprechenden Collineationsaxe $s$; denken wir durch denselben Strahl aus dem Centrum verschiedene Ebenen oder ein Büschel von solchen gelegt, so haben die Axen $s$ derselben nothwendig alle den Punkt jenes Strahls gemein, welcher mit seinem entsprechenden zusammenfällt; d. i. die Axen $s$ auf allen Ebenen durch das Centrum bilden ein System von Geraden, von denen je zwei einander schneiden und somit, da nicht alle durch einen Punkt gehen, eine Ebene. Sie ist die Ebene der sich selbst entsprechenden Punkte und Geraden und wir nennen sie die Collineationsebene $\mathbf{S}$ des Systems.

Denken wir ebenso in jeder Ebene durch das Centrum die beiden Gegenaxen $q_1$, $r$ der ihr entsprechenden centrischen Collineation, so bilden die ersten aus gleichen Gründen — weil dem unendlich entfernten Punkte jedes Strahls durch das Centrum ebenso als Bild wie als Original nur ein bestimmter Punkt $Q_1$, respective $R$ entsprechen kann — eine zur Collineationsebene parallele Ebene $\mathbf{Q}_1$ und die Letzteren eine ihr parallele Ebene $\mathbf{R}$; die Gegenebenen des Systems,

welche beide so liegen, dass die Mitte zwischen ihnen auf jedem Strahl durch das Centrum auch die Mitte ist zwischen Centrum und Collineationsebene auf demselben Strahl.

Der Parallelismus der Gegenebenen zur Collineationsebene kann auch direct wieder erwiesen werden, indem man drei Richtungen oder unendlich ferne Punkte $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$ des Originalraums betrachtet, die nicht derselben Stellung angehören; denselben entsprechen drei Punkte $Q_{11}$, $Q_{21}$, $Q_{31}$, welche nicht in einer Geraden liegen und die Geraden $Q_{11}Q_{21}$, $Q_{21}Q_{31}$, $Q_{31}Q_{11}$ müssen der Collineationsebene parallel sein, weil sie sich mit den entsprechenden unendlich fernen Geraden $Q_1Q_2$, $Q_2Q_3$, $Q_3Q_1$ in ihr schneiden müssen. Ist dann $Q_4$ ein beliebiger unendlich ferner Punkt, und $Q_{41}$ sein Abbild, so sind auch $Q_{11}Q_{41}$, $Q_{21}Q_{41}$, $Q_{31}Q_{41}$ der Collineationsebene parallel, d. h. den unendlich fernen Punkten des Originalraums entsprechen die Punkte einer bestimmten der Collineationsebene parallelen Ebene $\mathbf{Q}_1$ des Bildraums. Aus denselben Gründen entsprechen den unendlich fernen Punkten $R_1$ des Bildraums die Punkte einer zur Collineationsebene parallelen Ebene $\mathbf{R}$ des Originalraums.

38. Alle einander im Originalraume und im Bildraume entsprechenden Punktreihen, Strahlenbüschel und Ebenenbüschel, Strahlenbündel, Ebenenbündel und ebene Systeme sind zu einander perspectivisch, d. h. sie sind Schnitte oder Scheine des nämlichen Gebildes — z. B. die entsprechenden Punktreihen Schnitte desselben Strahlenbüschels aus dem Centrum mit entsprechenden Geraden, die entsprechenden Ebenenbüschel Scheine desselben Strahlenbüschels in der Collineationsebene aus entsprechenden Punkten, etc. Die entsprechenden Grundgebilde erster Stufe haben somit gleiches Doppelverhältniss. Insbesondere liegen in jedem Strahl aus dem Centrum zwei projectivische Reihen entsprechender Punkte $A$, $A_1$, etc., welche das Centrum $C$ und den der Collineationsebene angehörigen Punkt $S$ zu Doppelpunkten haben; durch jede in der Collineationsebene liegende Gerade $s$ gehen zwei projectivische Büschel entsprechender Ebenen $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$, etc., in denen die Collineationsebene $\mathbf{S}$ und die Ebene nach dem Centrum $\mathbf{C}$ die Doppelebenen sind; die entsprechenden Strahlen $a$, $a_1$, etc. aus einem Punkt der Collineationsebene in dersel-

ben Ebene durch das Collineationscentrum bilden zwei projectivische Büschel mit dem der Collineationsebene angehörigen Strahl $s$ und dem nach dem Centrum gehenden Strahl $c$ als Doppelstrahlen. Man hat (vergl. § 19.)

$$(CSAA_1) = (CSBB_1) = (\mathrm{CSAA}_1) = (\mathrm{CSBB}_1)$$
$$= (csaa_1) = (csbb_1) = \varDelta$$

und wir nennen diese Constante das characteristische Doppelverhältniss der centrischen Collineation der Räume.

Für die Gegenpunkte $Q_1$, $R$ eines Strahls aus dem Centrum hat man insbesondere

$$\varDelta = (CSAA_1) = (CS\infty Q_1) = (CSR\infty),$$

$$\text{d. h. } \varDelta = \frac{SQ_1}{CQ_1} = \frac{CR}{SR};$$

und durch Subtraction der Einheit auf beiden Seiten $CQ_1 = RS$. (Vergl. § 19.; 1. u. f.).

1) Eine centrische Collineation räumlicher Systeme ist durch ihre Characteristik $\varDelta$, das Centrum und die Collineationsebene oder eine Gegenebene bestimmt; ebenso durch das Centrum, die Collineationsebene und eine der Gegenebenen; endlich durch das Centrum, die Collineationsebene und ein Paar entsprechender Punkte, Strahlen oder Ebenen derselben.

2) Wenn die Ecken von zwei Tetraedern in Paaren auf vier Geraden aus einem Centrum $C$ liegen, so schneiden sich die Paare der entsprechenden Ebenen derselben in vier Geraden auf einer Ebene und umgekehrt. (Vergl. § 19.; 7.)

39. Ist $g$ eine Gerade des Originalsystems, so erhält man durch ihren Schnittpunkt $S$ mit der Collineationsebene in dem sich selbst entsprechenden Punkt derselben einen Punkt ihres Bildes $g_1$; ihr Schnittpunkt $R$ mit der Gegenebene $\mathbf{R}$ giebt durch den nach ihm gehenden Strahl aus dem Centrum die Richtung des Bildes und der zu $g$ parallele Strahl aus dem Centrum giebt im Schnittpunkt $Q_1$ mit der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ den Gegenpunkt des Bildes $g_1$, so dass man dasselbe durch



drei Punkte bestimmt hat; man bedarf zu seiner Construction somit nur der einen Gegenebene. Aus $l_1$ erhält man umgekehrt das Original $l$ durch den Schnittpunkt mit der Collineationsebene, den Schnitt $R$ des zu $l_1$ parallelen Strahls aus dem Centrum in **R** und durch die Richtung des Collineationsstrahls nach dem Durchschnitt $Q_1$ von $l_1$ mit der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$.

Zu einem Punkte $A$ in $g$ oder $B_1$ in $l_1$ findet man den entsprechenden $A_1$ respective $B$ im Durchschnitt des nach ihm gehenden Strahls aus dem Centrum mit der entsprechenden Geraden $g_1$ respective $l$. Zu einer Ebene $\mathbf{A}$ durch $g$ oder $\mathbf{B}_1$ durch $l_1$ ergiebt sich die entsprechende $\mathbf{A}_1$ respective $\mathbf{B}$, indem man ihre Spur $s$ in der Collineationsebene mit $g_1$, respective $l$ verbindet.

Die entsprechenden zu den Geraden oder Ebenen, welche der Collineationsebene parallel sind, bestimmen sich durch einen ihrer Punkte, weil sie der gegebenen Geraden oder Ebene parallel sind. Für die der Collineationsebene parallelen Ebenen wird die Characteristik $\Delta$ zu dem Verjüngungsverhältniss der Aehnlichkeit, in welcher das ebene System des Bildes und des Originals zu einander stehen.

1) Zu einer Ebene $\mathbf{A}$ bestimmt man die entsprechende $\mathbf{A}_1$, indem man ihre Schnittlinie $s$ mit der Collineationsebene, die Schnittlinie $q_1'$ der ihr parallelen Ebene aus dem Centrum mit der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ und die unendlich ferne Gerade der Ebene vom Centrum nach der Schnittlinie $r$ von $\mathbf{A}$ mit der Gegenebene $\mathbf{R}$ — diese ist die Stellung von $\mathbf{A}_1$ — bestimmt; diese drei liegen in $\mathbf{A}_1$.
2) Man construiere auf demselben Wege die entsprechende Ebene $\mathbf{B}$ zu einer gegebenen Ebene des Bildraums $\mathbf{B}_1$.
3) Die Systeme entsprechender Punkte und Strahlen in zwei entsprechenden Ebenen $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}_1$ sind centrisch collinear für ihre Schnittlinie $s$ mit der Collineationsebene als Collineationsaxe und für ihre Schnittinien $r$, $q_1$ mit den Gegenebenen $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}_1$ als Gegenaxen; alle diese centrischen Collineationen haben dieselbe Characteristik $\Delta$. (Vergl. § 19.; 5.)

4) Für welche entsprechenden ebenen Systeme findet Congruenz statt?
5) Für die durch das Centrum gehende Parallelebene **V** zur Collineationsebene findet Aehnlichkeit und ähnliche Lage der entsprechenden Systeme nach dem Verjüngungsverhältniss $\Delta$ statt.
6) Man bestimme die Region des Bildes von $A$ auf seinem Collineationsstrahl gegen Centrum, Collineationsebene und Gegenebene **R** aus der Lage von $A$ gegen dieselben Stücke. (Vergl. § 4.)
7) Man erörtere die Formen, welche einem gegebenen Tetraeder je nach seinen verschiedenen Lagen in Beziehung zur Gegenebene seines Systems entsprechen können. (Vergl. § 14.; 2., 3.)
8) Man bestimme in einer gegebenen centrischen Collineation räumlicher Systeme die Ebenen, denen eine bestimmte Bildbreite $sq_1$ zukommt.
9) Man construiere die Neigungswinkel $\alpha$, $\alpha_1$ der Ebenen **A**, **A**$_1$ gegen die Collineationsebene; wenn werden dieselben einander gleich?

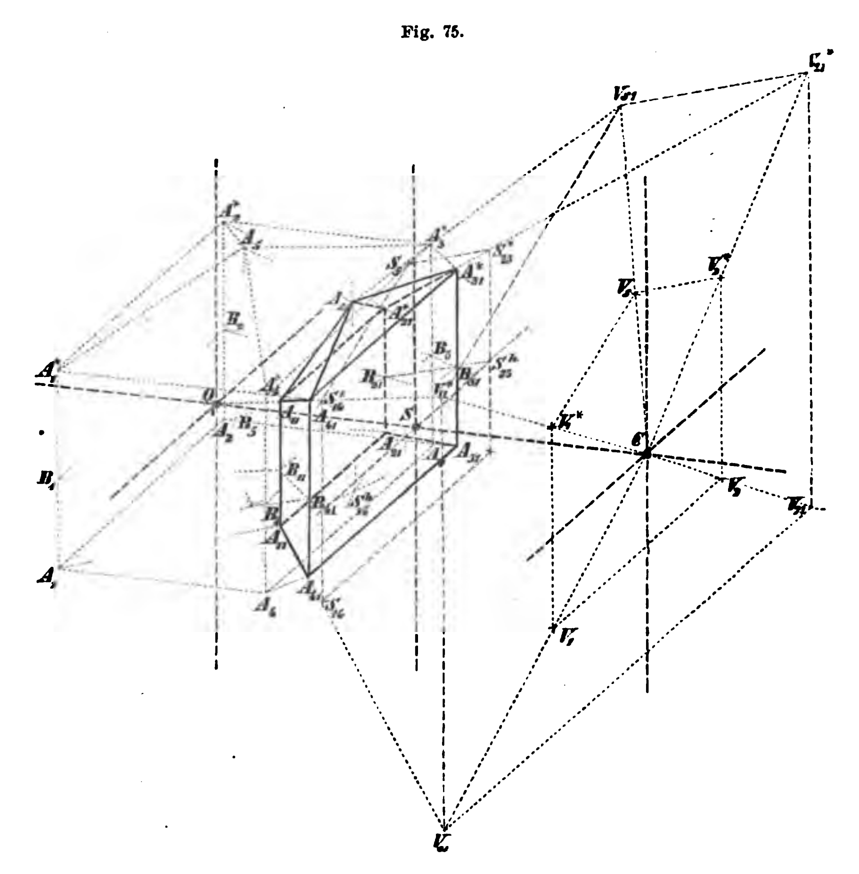
40. Wenn wir die räumlichen Systeme in centrischer Collineation als Systeme von Punkten fassen — von Punkten $A_1, A_2, \cdots$ des Originals und entsprechenden Punkten $A_{11}, A_{21}, \cdots$ des Bildes — so kann die Construction des einen aus dem andern zurückgeführt werden auf die Construction des centrisch collinearen ebenen Systems zu einem gegebenen System in derselben Ebene.

Wir denken eine durch das Collineationscentrum gehende Ebene und die Schnittpunkte $B_1, B_2, \cdots$ derselben mit den Parallelen $p_1, p_2, \cdots$ insbesondere solchen, die man zu einer festen Geraden $p$ der Collineationsebene aus den Punkten $A_1, A_2, \cdots$ des Originalsystems gezogen hat; bilden wir dann zu dem System der $B_i$ das centrisch collineare System in seiner Ebene für $C$ als Centrum und die Schnittlinien derselben mit **S**, **Q**$_1$ und **R** als Collineationsaxe $s$ und Gegenaxen $q_1$ und $r$, also das System $B_{11}, B_{21}, \cdots$, so sind die den $p_i$ entsprechenden Geraden $p_{i_1}$ die durch $B_{11}, B_{21}, \cdots$ gezogenen Strahlen nach dem Gegenpunkte $Q_1$ der $p_i$, insbesondere die durch sie gehenden Parallelen zu $p$ und die Punkte $A_{i_1}$ liegen

in den nach den entsprechenden Punkten $A_i$ gehenden Collineationsstrahlen da, wo dieselben die $p_{i1}$ durchschneiden.

In Fig. 75. ist für das Polyeder $A_1 A_2 A_3 A_4 A_4{}^* A_1{}^* A_2{}^* A_3{}^* A_5$ mit Hilfe der Normalen zu der durch das Centrum $C$ gehenden Horizontalebene als der $p_i$ durch die Punkte $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, $B_5$ und ihre entsprechenden $B_{11}$, $B_{21}$, $B_{31}$, $B_{41}$, $B_{51}$ in der centrischen Collineation auf dieser Ebene das System der

Fig. 75.

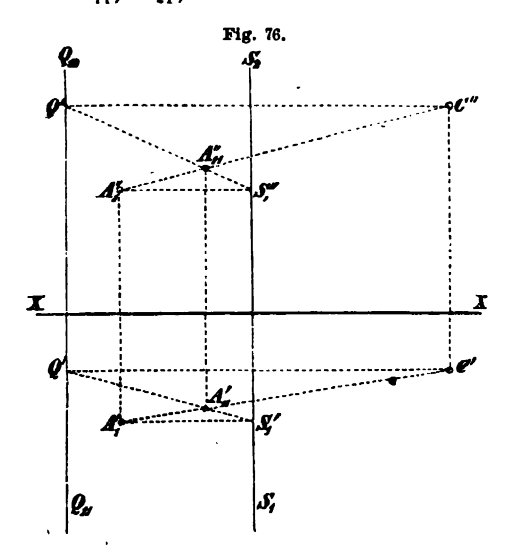


$p_{i1}$ und damit die centrisch collineare Raumfigur $A_{11} A_{21} A_{31} A_{41}$ $A_{41}{}^* A_{11}{}^* A_{21}{}^* A_{31}{}^* A_{51}{}^*$ anschaulich dargestellt.

Die Punkte $S$ und $Q_1$ und die durch sie gehenden Parallelen zu den durch $C$ gelegten Axen bezeichnen die Lage der Collineationsebene **S** und der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$.

Ist die bezeichnete Ebene parallel der Collineationsebene, so sind die Systeme der $B_i$ und $B_{i_1}$ ähnlich und in ähnlicher Lage für das Centrum $C$ und die Characteristik $\Delta$ als Aehnlichkeitspunkt und Verjüngungsverhältniss; dafür aber kann das System der $p_i$ nicht mehr aus Parallelen zu einer Geraden $p$ der Collineationsebene und das System seiner Bilder $p_i$ also nicht mehr aus Parallelen bestehen. In Fig. 75. sind die Fusspunkte $V_1$, $V_2$, $V_2^*$, $V_5$, $V_1^*$ der Normalen von den Originalpunkten auf jene Parallelebene **V** benutzt, indem ihre entsprechenden $V_{11}$, $V_{21}$, $\cdots$ construiert sind.

Fig. 76.

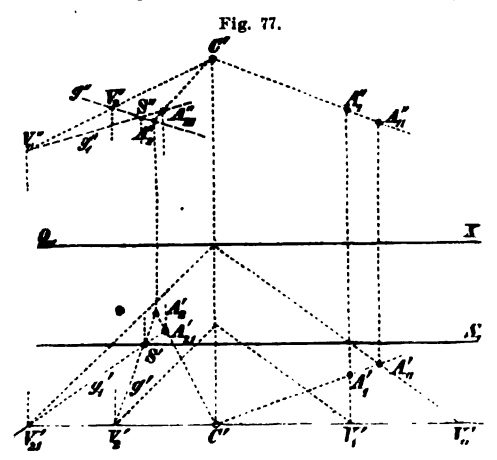


Ist dann das System der $A_i$ durch seine orthogonalen Parallelprojectionen $A_i'$, $A_i''$ auf zwei zu einander rechtwinklige Ebenen $x, y$ und $x, z$ dargestellt, die entweder beide zur Collineationsebene **S** rechtwinklig sind oder von denen die eine $x, z$ zu ihr parallel ist, so kann man das System der projicierenden Linien jeder von diesen Ebenen im ersten Falle (Fig. 76.), im zweiten Falle (Fig. 77.) das der projicierenden Linien der Ebene $x, y$ als das System der $p_i$ und die Normalebene dieser Projicierenden durch das Centrum als Ebene der $B_i$ und $B_{i_1}$ betrachten; man bildet das centrisch collineare zu dem System der zugehörigen Projectionen von $A_i$ für die gleichnamige Projection von $C$ als Centrum, die gleichnamige Spur von **S** als Axe der

Collineation und die gleichnamigen Spuren von $\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{R}$ als Gegenaxen $q_1$ und $r$ derselben und erhält damit die gleichnamigen Projectionen der $A_{i1}$; man findet endlich die andern Projectionen dieser Letzteren in denen der $p_{i1}$ mittelst der gleichnamigen Projectionen der durch das Centrum $C$ gehenden Strahlen nach den $A_i$, auf welcher sie liegen müssen.

Wählt man als das System der $p_i$ die Normalen zur Collineationsebene aus den $A_i$, so kann das System ihrer Bilder durch Benutzung der Aehnlichkeit mit dem Verhältniss $\Delta$ in der Ebene $\mathbf{V}$ bestimmt werden, so dass die Construction des Abbildes auf die Durchführung dieses speciellen Falles der Collineation ebener Systeme reduciert ist. (Fig. 77.)

Fig. 77.



1) Man kann durch die Punkte $A_i$ des Originalsystems ein Strahlenbündel aus einem Punkte $R$ der Gegenebene $\mathbf{R}$ legen, welches sich in ein Parallelenbündel von der Richtung von $CR$ im Bilde verwandelt; die Strahlen desselben gehen dann durch die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen des ersten in der Collineationsebene.

2) Welche Methode der Construction des Bildsystems ist die zweckmässigste, wenn die Collineationsebene als zusammenfallend mit der einen der beiden Projectionsebenen $(x, z)$ vorausgesetzt wird?

41. Wenn die Gegenebenen $\mathbf{Q}_1$ und $\mathbf{R}$ auf entgegengesetzten Seiten der Collineationsebene $\mathbf{S}$ und also auch des

Centrums $C$ und zwar $\mathbf{Q}_1$ näher als $\mathbf{R}$ bei $\mathbf{S}$ gelegen sind, so wird der ganze unendliche Raum auf der dem Centrum entgegengesetzten Seite der Collineationsebene in dem zwischen der Collineationsebene $\mathbf{S}$ und der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ gelegenen Raume so abgebildet, dass die vom Centrum entfernteren Punkte des Originals auch im Bilde die entfernteren sind. Diess Letztere entspricht den Bedingungen des Sehprozesses, das Gegentheil ist im Widerspruch mit denselben. Die gedachte Anordnung vorausgesetzt kann also — da ja alle entsprechenden Systeme in dem centrisch collinearen räumlichen Systeme in der Beziehung der Centralprojection zu einander stehen — das centrisch collineare System einer als gegeben gedachten Raumform für ein im Centrum befindliches Auge ebenso vollkommen täuschend diese Raumform selbst ersetzen, wie diess bei der Perspective ebener Systeme geschehen kann — sobald nur den übrigen Bedingungen des Sehprozesses genügt wird; insbesondere denen vom Sehkegel, wornach die darzustellenden Punkte ganz innerhalb eines aus dem Centrum als Spitze und mit der Normalen zur Collineationsebene als Axe beschriebenen geraden Kreiskegels von beschränktem Oeffnungswinkel gelegen sein müssen. Man mag etwa $^1/_3$ als Tangente des halben Oeffnungswinkels wählen. Sowie dann die Centralprojection Perspective genannt wird, so nennt man in diesem Falle die Construction räumlicher centrisch collinearer Systeme gemeiniglich Relief-Perspective nach ihrer Anwendung auf die Construction der Reliefs in der plastischen Kunst.

Nach denselben Grundsätzen sind aber ausser den Reliefs der Sculptur die scenischen Darstellungen der Schaubühne — die Vorhangsebene als Collineationsebene, die Hinterwand der Bühne als Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ — und die Constructionen der decorativen Kunst überhaupt, sei es in der Architectur oder in der höhern Gartenkunst, zu entwickeln. Auch die Bilder in den sphärischen Hohlspiegeln und in Linsencombinationen stehen zu den Originalen in der Beziehung der centrischen Collineation. Sie hat also, abgesehen von ihrer geometrischen Bedeutung, ein ausgedehntes Feld interessanter practischer Anwendungen.

1) Man construiere die centrisch collinearen Formen zu Würfeln, Prismen, Pyramiden in verschiedenen Stellungen hinter der Collineationsebene.

2) Man erläutere die Art, wie auf Grund der entwickelten Gesetze die Vertheilung und Anordnung der Coulissen einer Decoration von vorgeschriebener Wirkung zu machen ist.

3) Dem geraden Kreiscylinder von schräg zur Collineationsebene liegender Axe entspricht im Allgemeinen ein Kegel vom zweiten Grade; in welchem Falle wird derselbe ein gerader Kreiskegel?

4) Das Relief einer Kugel ist eine geschlossene Fläche mit elliptischen ebenen Querschnitten — denn im Falle des Reliefs wird die Kugel von der Gegenebene $\mathbf{R}$ nicht getroffen.

5) Wenn die Kugel die Gegenebene $\mathbf{R}$ berührt oder schneidet, so ist die centrisch collineare Fläche in einer Richtung oder in den Richtungen aller Strahlen eines Kreiskegels unendlich ausgedehnt.

6) Die Beleuchtung des Objects durch Sonnenlicht ist im Relief durch die Beleuchtung aus einem Punkte der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ zu ersetzen.

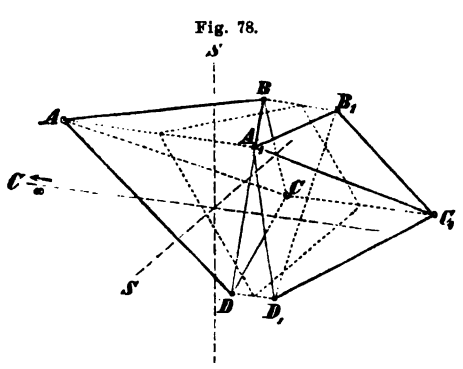
42. Ein wichtiger Specialfall der centrisch collinearen räumlichen Systeme, obwohl ohne den Character der Bildlichkeit, ist der der involutorischen oder harmonischen Collineation mit dem characteristischen Doppelverhältniss $\Delta = -1$. Dann sind die Gegenebenen $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{R}$ in der Mitte zwischen Centrum und Collineationsebene vereinigt und — wie die Construction und das Doppelverhältniss gleichmässig ergeben — die Punkte, Geraden und Ebenen beider Systeme entsprechen einander vertauschungsfähig. Die grosse Bedeutung dieses Falles für das Studium der Raumformen tritt bei weiterer Specialisierung sofort hervor.

Ist das Centrum einer räumlichen Collineation unendlich fern, so sind es die Gegenebenen auch, da die Collineationsstrahlen unendlich ferner Punkte ganz im Unendlichen liegen, d. h. parallelen Strahlen und Ebenen des einen Systems entsprechen parallele Strahlen und Ebenen des andern; entspre-

chende Gerade sind ähnlich getheilt, weil $\Delta = SA_1 : SA$ ist. (Vergl. § 21.; a).

Man nennt solche Systeme (Fig. 78.) affin in centrischer oder perspectivischer Lage. Ist insbesondere $\Delta = -1$, somit $SA_1 = -SA$, also die affine Collineation involutorisch, so erhält man die Symmetrie der räumlichen Systeme in Bezug auf eine Ebene, die Collineationsebene; man wird bei derselben eine schräge und eine normale Symmetrie unterscheiden können. (Vergl. § 21.; b.)

Fig. 78.




Ist die Collineationsebene einer centrischen Collineation räumlicher Systeme unendlich fern, so sind es auch die Gegenebenen; man erhält $\Delta = CA : CA_1$ (§ 21.; c.). Entsprechende Gerade und entsprechende Ebenen sind einander parallel und die in denselben gelegenen Systeme ähnlich und in ähnlicher Lage nach dem Verjüngungsverhältniss $\Delta$. Solche räumliche Systeme nennt man ähnlich in perspectivischer oder ähnlicher Lage. Die Beziehung der Ebene V in § 39.; 5. findet nun auf allen Ebenen statt, die das Centrum enthalten. Für $\Delta = -1$ unter der Voraussetzung der unendlich fernen Collineationsebene ist Aehnlichkeit mit Involution verbunden; man erhält $CA = -CA_1$, die Reihen entsprechender Punkte in den Collineationsstrahlen sind symmetrisch gleich, die entsprechenden Systeme in entsprechenden Ebenen symmetrisch congruent, es ist die Symmetrie der räumlichen Systeme in Bezug auf ein Centrum.

Endlich entspricht der gleichzeitigen unendlich fernen Lage des Centrums und der Collineationsebene die einfache Congruenz der räumlichen Systeme.

Es ergiebt sich also, dass die Involution die Quelle aller Symmetrieverhältnisse so im Raume wie in der Ebene ist, oder dass die Involutionsgestalten die allgemeinen

Formen der symmetrischen Gestalten jeder Art sind. Sowie ferner im ebenen System die Involution sich eng verbunden gezeigt hat mit der Theorie der Curven zweiter Ordnung und Classe, als die Quelle der manichfaltigen Symmetrien derselben, so zeigt sie sich im Raume als gleichwichtig für die Theorie der Flächen zweiter Ordnung und Classe, als Quelle aller ihrer Symmetrien.

Endlich sind alle die üblichen Darstellungsmethoden räumlicher Formen durch räumliche Formen, d.i. die Modellierungs-Methoden, als Specialfälle der Lehre von den centrisch collinearen räumlichen Systemen hervorgetreten und damit der darstellenden Geometrie organisch angeschlossen; von ihnen dient die allgemeinste ganz besonders künstlerischen Zwecken, die besondere der Aehnlichkeit hat vorzugsweise technische Verwendung in engerem Sinne.

43. Die Methoden der Abbildung auf eine Ebene, welche die darstellende Geometrie verwendet, sind endlich die äussersten Specialfälle der Construction centrisch collinearer räumlicher Systeme. Fallen die Collineationsebene **S** und die Gegenebene $\mathbf{Q}_1$, welche die entsprechenden der unendlich fernen Punkte des Originalraums enthält, in eine Ebene zusammen, so geht die andere Gegenebene **R** durch das Centrum oder fällt in die Ebene **V** und man erhält die Bestimmungsweise der Centralprojection für die Gerade und die Ebene wieder, von welcher die Entwickelung ausging; die Collineationsebene wird zur Bildebene, die Gegenebene **R** Verschwindungsebene.

Eine Gerade durch das Centrum erscheint als ein Punkt, eine Ebene durch dasselbe als eine Gerade, etc. — die Centralprojection eines Objects ist anzusehen als das in der Richtung der Collineationsstrahlen auf die Tiefe Null reducierte centrisch collineare Abbild desselben. Zur Bestimmung einer Centralprojection gehört somit die Angabe der Bildebene, der Verschwindungsebene — die Distanz bestimmt diese aus jener — und des Centrums in dieser — der Hauptpunkt $C_1$ leistet diess.

Wenn beim Zusammenfallen der Ebenen **S** und $\mathbf{Q}_1$ die Gegenebene **R** und das Centrum $C$ unendlich fern liegen, so erhält man als Specialfall der centrischen Collineation räumlicher Systeme die ebene Parallelprojection des Originalraums, als ein in der Richtung der Collineationsstrahlen auf

die Tiefe Null reduciertes — unendlich dünnes — perspectivisch affines Abbild desselben. Für die Bilder seiner ebenen Systeme gelten die Gesetze von § 21.; a. Jeder Punkt der Bildebene bestimmt die durch ihn gehende projicierende Linie und jede Gerade der Bildebene bestimmt als den Ort der projicierenden Linien aller ihrer Punkte ihre projicierende Ebene. Zu einer Geraden $g$ liefert der Schnittpunkt mit der Bildebene **S** ihren Durchstosspunkt $S$, durch welchen auch ihr Bild gehen muss und die projicierende Linie eines anderen Punktes von $g$ bestimmt dasselbe. Die zur Geraden $g$ parallele projicierende Linie liegt, als Verbindungslinie von zwei unendlich fernen Punkten $C$ und $Q$ ganz in unendlicher Ferne und trifft daher auch die Bildebene in einem unendlich fernen Punkte $Q'$, d. i. die Fluchtpunkte aller in derselben projicierenden Ebene möglichen Geraden fallen ununterscheidbar in den unendlich fernen Punkt ihrer Schnittlinie mit der Bildebene zusammen. Soll umgekehrt von dem Bilde einer Geraden zu ihrem Original übergegangen werden, so erweist sich die Angabe des Durchstosspunktes $S$ und der Richtung der projicierenden Linien nur als hinreichend zur Bestimmung der projicierenden Ebene, in welcher es liegen und des Strahlenbüschels in derselben, dem es angehören muss; aber die Richtung des Strahls, welcher als Original zu betrachten ist, bleibt unbestimmbar, weil die Gerade $Q'C$ als ganz im Unendlichen liegend oder als die Stellung der projicierenden Ebene die Richtungen aller in ihr liegenden Geraden enthält und daher keine Einzelne unter ihnen bestimmt. In Folge dessen ist auch kein Punkt der Geraden $g$ durch sein Bild im Bilde der Geraden $g$ bestimmt, sondern nur der entsprechende projicierende Strahl in der projicierenden Ebene von $g$.

Das ganz analoge Ergebniss erhält man bei der Frage nach der Bestimmung der Ebene in diesem Falle. In Allem also: Durch eine Parallelprojection in der Ebene ist eine Gerade, ein Punkt und eine Ebene nicht bestimmbar und zwar in Folge der Ununterscheidbarkeit der Fluchtelemente von Geraden und Ebenen.

Nur durch die Combination von zwei Parallelprojectionen mit verschiedenen Richtungen der projicierenden Strahlen auf dieselbe Bildebene oder von zwei Parallelprojec-

tionen mit verschiedenen Richtungen auf zwei verschiedene Bildebenen wird der Zweck der Bestimmung der räumlichen Formen mit Hilfe der ebenen Parallelprojectionen erreicht werden können. Es ist der Grundgedanke von Monge's „Géométrie descriptive" hierzu zwei orthogonale Parallelprojectionen auf zwei zu einander rechtwinkligen Projectionsebenen zu verbinden, wie diess aus den Elementen bekannt ist. Eine orthogonale und eine schräge Parallelprojection auf dieselbe Projectionsebene reichen zur Bestimmung aus, wenn die Richtung der Letztern bekannt ist; diess kommt vor in der Form der Schlagschatten, etc.

1) In Bezug auf das erste Kriterium des § 41. können alle ebenen centralprojectivischen Abbildungen als bildlich bezeichnet werden, und man hat nur das zweite des Sehkegels zu beachten, um gute perspectivische Bilder zu erhalten. Man kann im Bilde die Sichtbarkeit und Unsichtbarkeit unterscheiden, indem man die Bildebene als vielfach und ihre Lagen als in derselben Ordnung vom Centrum aus einander folgend und einander verdeckend ansieht, wie die Flächen des abgebildeten Objects: Das centralprojectivische Bild als ein unendlich dünnes Relief.

2) In der Parallelprojection muss die Seite der Bildebene bezeichnet werden, auf welcher in unendlicher Ferne das Centrum gedacht werden soll, um die gegenseitige Verdeckung der Flächen des Originals im Bilde zu bestimmen (vergl. § 55.). Dann gelten die vorigen Bemerkungen.

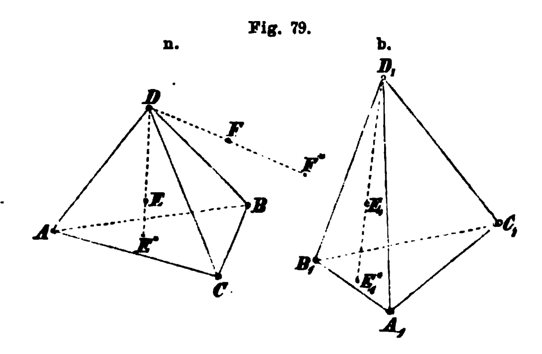
3) Der von allen Sehstrahlen normal geschnittenen Kugelfläche der Netzhaut entspricht die ebene Bildfläche der orthogonalen Parallelprojection; diese — die orthogonale — hat unter den Parallelprojectionen am meisten den Character der Bildlichkeit. Die Entwickelung darf sich im Allgemeinen auf sie beschränken, da die allgemeinen Charactere aller Parallelprojectionen in der Lehre von der Affinität doch gegeben sind.

Für den Zeichner bietet die Anwendung schiefer Parallelprojectionen besondere Vortheile (§ 61.), die

Wahrung der Bildlichkeit des Dargestellten steckt ihr jedoch sehr enge obwohl nicht im Allgemeinen, sondern nur im speciellen Fall bestimmbare Grenzen.

44. Die centrisch collinearen räumlichen Systeme sind projectivisch collineare räumliche Systeme in besonderer nämlich perspectivischer Lage, wenn man als projectivische collineare Systeme allgemein diejenigen definiert, welche dem Gesetz genügen, dass jedem Punkte ein Punkt und jeder Geraden eine Gerade im andern System entspricht. Den geradlinigen Reihen, den ebenen Strahlen büscheln und den Ebenenbüscheln des einen Systems entsprechen projectivische

Fig. 79.




Reihen, Strahlenbüschel und Ebenenbüschel des andern. (Vergl. § 38.)

Eine solche Beziehung zweier Räume ist vollkommen bestimmt durch fünf Punkte $A, B, C, D, E$ des einen, von denen keine vier in einer Ebene liegen, und die fünf entsprechenden Punkte $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1$ des andern (Fig. 79.). Denn ist $F$ ein sechster Punkt des ersten Systems, so bestimmt derselbe mit drei Kanten des Tetraeders $ABCD$, welche nicht in einer Ecke zusammenstossen, Ebenen, die nur ihn gemein haben und deren entsprechende im andern System somit den entsprechenden Punkt $F_1$ bestimmen. Diese aber construiert man nach der Bemerkung, dass die Ebenenbüschel $(AB \,.\, CDEF)$ und $(A_1 B_1 \cdot C_1 D_1 E_1 F_1)$, ebenso $(BC \cdot ADEF)$ und $(B_1 C_1 \cdot A_1 D_1 E_1 F_1)$ und $(CA \cdot BDEF)$, $(C_1 A_1 \cdot B_1 D_1 E_1 F_1)$ zu einander projectivisch sind (vergl. § 22.), mit Hülfe der einfachen Mittel der §§ 17. und 18. In derselben Weise construiert man durch Wieder-

holung entsprechende Gerade und entsprechende Ebenen beider Systeme. Den unendlich fernen Punkten $Q$ des einen Systems entsprechen die Punkte der Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ des andern und den unendlich fernen Punkten $R_1$ in diesem die der Gegenebene $\mathbf{R}$ in jenem System, welche beide man somit ebenfalls leicht ermittelt.

Ist dann im System des Bildraums $\mathbf{E}_1$ eine zur Gegenebene $\mathbf{Q}_1$ parallele Ebene, so wird die entsprechende Ebene $\mathbf{E}$ des Originalraums zu $\mathbf{R}$ parallel sein und die in beiden Ebenen enthaltenen Systeme werden zu einander affin sein, den Richtungen der einen entsprechen Richtungen der andern, ohne dass jedoch allgemein die Richtungsunterschiede hier den entsprechenden Richtungsunterschieden dort gleich sein werden. Diess Letztere ist aber der specielle Character, welchen entsprechende ebene Systeme von der Stellung der Gegenebenen in centrisch collinearen Räumen besitzen, weil ihre unendlich ferne Gerade zugleich ihre Collineationsaxe ist, d. h. Punkt für Punkt sich selbst entspricht. Damit ist erwiesen, dass collineare räumliche Systeme im Allgemeinen nicht in centrische oder perspectivische Lage übergeführt werden können (vergl. § 22.), dass vielmehr diese Möglichkeit von besondern Eigenschaften derselben abhängt. Die Darstellungsmethoden haben es stets nur mit centrisch collinearen Systemen zu thun.

Reciproken räumlichen Systemen (vergl. § 23.) werden wir später begegnen.

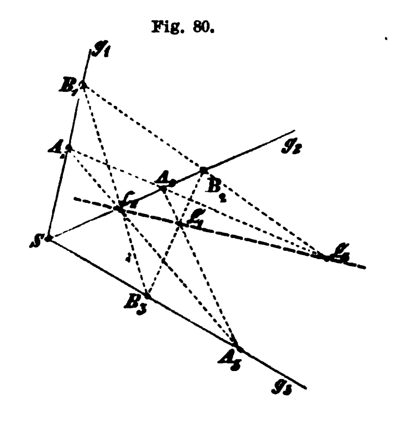
1) Wenn zwei collineare räumliche Systeme ein ebenes System entsprechend gemein haben, so haben sie auch einen Strahlenbündel entsprechend gemein und umgekehrt. Man erläutere insbesondere den Zusammenhang dieses Satzes mit dem in § 38.; 2.
2) Die Bestimmung der centrisch collinearen räumlichen Systeme durch Centrum und Ebene der Collineation sowie eine der Gegenebenen ist eine specielle Form der Bestimmung durch fünf Paare entsprechender Punkte. Das Centrum und drei Punkte der Collineationsebene, welche sie bestimmen, repräsentieren vier Paare; die Gegenebene ist durch einen weitern Punkt bestimmt, dessen entsprechen-

der die Richtung des durch ihn gehenden Strahls aus dem Centrum ist. Es ist analog, wenn die Gegenebene durch ein Paar von entsprechenden Punkten $A$, $A_1$ ersetzt wird.

3) Wenn zwei Systeme mit einem und demselben dritten System collinear sind, so sind sie es auch untereinander; wenn in einer Reihe von Systemen jedes mit dem folgenden collinear ist, so ist auch das erste mit dem letzten und jedes mit jedem collinear. Ebenso für ähnliche und für affine Systeme.

45. Von wichtigen Folgen ist der Satz: Wenn von drei räumlichen Systemen je zwei miteinander centrisch collinear sind, so liegen die drei Collineationscentra in einer geraden Linie. Denn die Systeme, die wir als erstes, zweites, drittes System bezeichnen wollen, haben paarweis mit einander eine Collineationsebene, setzen wir das erste und zweite die Ebene $\mathbf{s}_3$, das zweite und dritte die Ebene $\mathbf{s}_1$, das dritte und erste die Ebene $\mathbf{s}_2$, und diese drei Ebenen haben mit einander einen Punkt $S$ gemein; dann entspricht (Fig. 80.) jeder durch $S$ gehenden Geraden $g_1$ des ersten Systems mit zwei Punkten $A_1$, $B_1$ eine auch durch $S$ gehende Gerade $g_2$ des zweiten mit den entsprechenden Punkten $A_2$, $B_2$ und eine durch $S$ gehende Gerade $g_3$ des dritten mit den Punkten $A_3$, $B_3$ und es schneiden sich die Geraden $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ im Collineationscentrum $C_3$, $A_2 A_3$, $B_2 B_3$ im Centrum $C_1$ und $A_3 A_1$, $B_3 B_1$ in $C_2$. Die Dreiecke $A_1 A_2 A_3$ und $B_1 B_2 B_3$ haben also ihre Ecken paarweis auf Strahlen aus einem Punkt $S$ und ihre entsprechenden Seitenpaare schneiden sich daher in drei Punkten einer Geraden. (§ 19.; 7.)

Fig. 80.



Damit ist zugleich der speciellere Satz bewiesen: Wenn drei ebene Systeme paarweis centrisch collinear sind und ihre Collineationsaxen einen Punkt gemein haben, so liegen ihre Collineationscentra in einer Geraden und umgekehrt.

Und der noch speciellere: Sind zwei ebene Systeme einem dritten ebenen System ähnlich und zu ihm in perspectivischer Lage, so sind sie beides auch untereinander und die drei Aehnlichkeitscentra liegen in einer Geraden. Denn dann haben die Geraden $A_1 B_1$, $A_2 B_2$, $A_3 B_3$ als einander parallel einen unendlich fernen Punkt gemein.

1) Je zwei Kreise derselben Ebene (oder in parallelen Ebenen) sind ähnlich und in perspectivischer Lage für ihren innern Aehnlichkeitspunkt $J$ und den äussern Aehnlichkeitspunkt $E$. Sind die Aehnlichkeitspunkte von drei Kreisen $K_1$, $K_2$, $K_3$ in parallelen Ebenen oder in derselben Ebene $E_{12}$, $J_{12}$ für $K_1$ und $K_2$; $E_{23}$, $J_{23}$ für $K_2$ und $K_3$ und $E_{31}$, $J_{31}$ für $K_3$ und $K_1$, so liegen dieselben vier mal zu dreien in einer Geraden — nämlich $E_{12} E_{23} E_{31}$, $J_{12} E_{23} E_{31}$, $E_{12} J_{23} E_{31}$, $E_{12} E_{23} J_{31}$ — und bilden also ein vollständiges Vierseit.

2) Je zwei Kreise derselben Ebene sind auch centrisch collinear für dieselben beiden Punkte als Centra und für die Gerade, welche man Chordale, Potenzlinie oder Radicalaxe derselben nennt, als Collineationsaxe. Die Collineationsaxen von drei Kreisen derselben Ebene gehen durch einen Punkt.

3) Zwei Kugeln sind einander ähnlich in perspectivischer Lage für ihren innern und ihren äussern Aehnlichkeitspunkt $J$ und $E$ und sie sind zu einander centrisch collinear für dieselben Punkte als Centra und die Ebene, welche man Chordal- oder Radical-, oder Potenz-Ebene nennt, als Collineationsebene. Von den sechs Aehnlichkeitspunkten von drei Kugeln liegen viermal drei in einer Geraden und die drei Collineationsebenen schneiden sich in einer zur Ebene der Centra normalen Geraden.

4) Vier Kugeln bilden auf acht Arten sechs Paare von ähnlichen Figuren in perspectivischer Lage; von den Aehnlichkeitspunkten liegen achtmal je sechs in einer Ebene; die sechs Collineationsebenen schneiden sich in einem Punkt.

**D. Die Grundgesetze der orthogonalen Parallelprojection, ihre Transformationen und die Axonometrie.**

46. Durch die orthogonalen Parallelprojectionen auf zwei zu einander rechtwinklige Ebenen können die Raumformen im Allgemeinen bestimmt werden; unter Festsetzung eines Anfangspunktes $O$ in der Durchschnittslinie $x$ derselben (Fig. 81.) können sie nach gegebenen Maassen eingezeichnet werden, nämlich jeder Punkt aus der Angabe seiner Abstände $AA'$, $AA''$ von jenen beiden Ebenen und aus der des Abstandes von $O$ bis zu der durch ihn gelegten Normalebene $AA'A_xA''$ zur Axe $X$. Indem wir den Anfangspunkt $O$ als Schnittpunkt mit einer dritten zu den beiden ersten normalen Ebenen bestimmt denken, erhalten wir (Fig. 82.) drei Grund- oder Projectionsebenen $XOY$, $XOZ$, $YOZ$, drei zu einander normale Schnittlinien derselben oder Projectionsaxen, $OZ$, $OY$, $OX$ zur Angabe der Richtungen der projicierenden Linien, welche zu den Projectionsebenen $XOY$, $XOZ$, $YOZ$ respective gehören; es entstehen drei orthogonale Parallel-Projectionen jeder Raumfigur, nämlich auf $XOY$, $XOZ$, $YOZ$, die wir als erste, zweite, dritte Projection respective benennen und durch Beifügung von einem Strich, von zwei oder drei Strichen oben rechts zum Zeichen des Originals unterscheiden. In dieser Weise gefasst ist die Bestimmungsweise der darstellenden Geometrie mittelst der orthogonalen Parallelprojectionen identisch mit derjenigen der Coordinatengeometrie des Raumes für rechtwinklige Parallelcoordinaten; wir nennen auch die geradlinige Strecke von

Fig. 81.

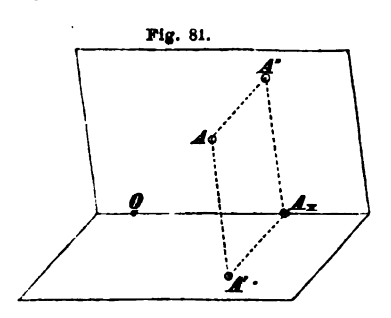
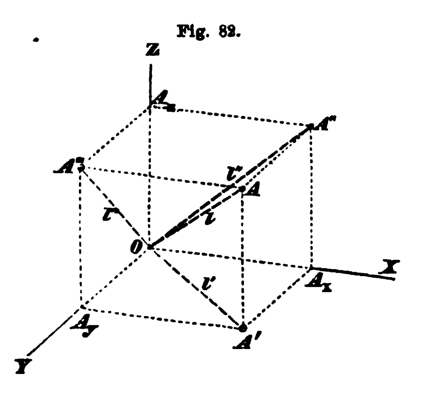



Fig. 82.



der ersten Projection $A'$ eines Punktes $A$ bis zu ihm selbst die Coordinate $z$, die von der zweiten Projection $A''$ zu ihm selbst die Coordinate $y$, und die von der dritten Projection $A'''$ zu ihm die Coordinate $x$, weil dieselben respective den Axen $OZ$, $OY$, $OX$ parallel sind; wir unterscheiden in jeder der Axen vom Anfangspunkt $O$ ausgehend den positiven und negativen Sinn der Bewegung und nennen jede Coordinate positiv oder negativ, jenachdem sie von der entsprechenden Projectionsebene aus im positiven oder negativen Sinn der dazu normalen Axe verläuft. Jeder Punkt ist durch Angabe seiner Coordinaten nach Grösse und Sinn bestimmt, d. h. durch Angabe der Grösse und des Sinnes der Strecken, welche auf seinen projicierenden Geraden zwischen der Projection und ihm selbst enthalten sind.

Die projicierenden Linien $x, y, z$ eines Punktes $A$ bestimmen paarweis drei Ebenen $xy$ parallel $XOY$, $yz$ parallel $YOZ$, $zx$ parallel $ZOX$ und diese schneiden die Axen $OZ, OX, OY$ respective in je einem Punkte $A_x$, $A_y$, $A_z$. Diese drei Ebenen umschliessen mit den drei Projectionsebenen ein rechtwinkliges Parallelepiped, welches wir als das projicierende Parallelepiped des Punktes bezeichnen; seine Flächen sind in Paaren parallel und congruent: $OA_xA'A_y$, $A_zA''AA'''$; $OA_yA'''A_z$, $A_xA'AA''$; $OA_zA''A_x$, $A_yA'''AA'$; seine Ecken in Paaren entgegengesetzt: $O, A$; $A_x, A'''$; $A_y, A''$; $A_z, A'$; seine Kanten zu vieren parallel und gleich: $OA_z$, $A_xA''$, $A'A$, $A_yA'''$ $(= z)$; $OA_y$, $A_xA'$, $A''A$, $A_zA'''$ $(= y)$; $OA_x$, $A_yA'$, $A'''A$, $A_zA''$ $(= x)$. Setzt man: $OA = l$, $OA' = l'$, $OA'' = l''$, $OA''' = l'''$ und $\angle(l, l') = \beta_1$, $\angle(l, l'') = \beta_2$, $\angle(l, l''') = \beta_3$, die Neigungswinkel der Geraden $l$ gegen die Projectionsebenen, so gelten die Relationen

$$l^2 = l'^2 + z^2 = l''^2 + y^2 = l'''^2 + x^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

$$\cos^2\beta_1 = \frac{l'^2}{l^2} = \frac{x^2+y^2}{l^2},\ \cos^2\beta_2 = \frac{l''^2}{l^2} = \frac{x^2+z^2}{l^2},\ \cos^2\beta_3 = \frac{l'''^2}{l^2} = \frac{y^2+z^2}{l^2};$$

$$\sin^2\beta_1 = \frac{z^2}{l^2},\quad \sin^2\beta_2 = \frac{y^2}{l^2},\quad \sin^2\beta_3 = \frac{x^2}{l^2};$$

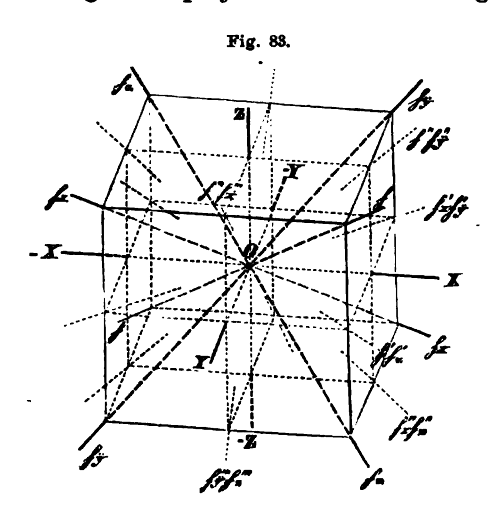
also $\cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 2$, $\sin^2\beta_1 + \sin^2\beta_2 + \sin^2\beta_3 = 1$ oder $\sum_1^3 \cos^2\beta_i = 2$, $\sum_1^3 \sin^2\beta_i = 1$; also auch $\beta_i + \beta_k \leq 90^0$ ($i, k$ verschieden und $= 1, 2, 3$).

1) Bezeichnen wir den Punkt von den Coordinaten $x = a$, $y = b$, $z = c$ kurz durch $(a, b, c)$, so bedeutet $(o, o, o)$ den Anfangspunkt $O$; $(o, o, c)$ jeden beliebigen Punkt der Axe $OZ$; $(o, b, o)$ jeden Punkt der Axe $OY$; $(a, o, o)$ jeden in der Axe $OX$.
2) Ebenso bezeichnet $(o, b, c)$ einen beliebigen Punkt der Coordinaten- oder Projectionsebene $YOZ$, $(a, o, c)$ einen solchen in $XOZ$, $(a, b, o)$ einen in $XOY$. In welcher Weise fallen die Ecken der projicierenden Parallelepipede solcher Punkte in Paaren zusammen?
3) Alle Punkte $(a, \pm a, c)$, d. h. solche, deren Coordinaten $x$ und $y$ von gleicher Länge sind, vertheilen sich in zwei durch die Axe $OZ$ gehende und die Winkel zwischen den anstossenden Projectionsebenen halbierende Ebenen, deren eine $\mathbf{H}_z$ die Punkte mit gleichem Sinn der $x$ und $y$, und die andere $\mathbf{H}_{z'}$ diejenigen mit verschiedenem Sinn der $x$ und $y$ enthält.

   Ebenso liegen die Punkte $(a, b, \pm b)$ in zwei Ebenen $\mathbf{H}_x$, $\mathbf{H}_{x'}$, die durch die Axe $OX$ gehen und die Winkel der anliegenden Projectionsebenen halbieren; endlich die Punkte $(a, b, \pm a)$ in zwei Ebenen $\mathbf{H}_y$, $\mathbf{H}_{y'}$. Wir nennen diese Ebenen die sechs Halbierungsebenen des Projectionssystems. Sie können als Diagonalebenen specieller projicierender Parallelepipede angesehen werden.
4) Die Punkte $(a, a, a)$ von gleichen Coordinaten mit übereinstimmendem Sinn, liegen in einer Geraden $\mathfrak{h}$, welche von $O$ ausgeht, mit den Projectionsaxen und Ebenen gleiche Winkel macht und die gemeinschaftliche Schnittlinie der Ebenen $\mathbf{H}_z$, $\mathbf{H}_x$, $\mathbf{H}_y$ ist, weil $x = y = z = a$ die Relationen $x = y = a$, $y = z = a$, $z = x = a$ einschliesst. Ebenso liegen die Punkte $(- a, a, a)$ in der Geraden, in welcher die Ebenen $\mathbf{H}_{z'}$, $\mathbf{H}_x$, $\mathbf{H}_{y'}$ sich schneiden; wir wollen dieselbe $\mathfrak{h}_x$ nennen. Die Punkte $(a, - a, a)$ in der Schnittlinie $\mathfrak{h}_y$ der Ebenen $\mathbf{H}_{z'}$, $\mathbf{H}_{x'}$, $\mathbf{H}_y$ und die Punkte $(a, a, - a)$ in $\mathfrak{h}_z$ auf den Ebenen $\mathbf{H}_z$,

$\mathbf{H}_{x'}$, $\mathbf{H}_{y'}$. Die sechs Halbierungsebenen schneiden sich ausser paarweis in den Projectionsaxen viermal zu je drei in vier Geraden aus $O$, welche mit den Projections-Axen und Ebenen gleiche Winkel einschliessen und die als die vier Halbierungsaxen des Systems bezeichnet werden können. Sie können als Diagonalen projicierender Würfel angesehen

Fig. 83.



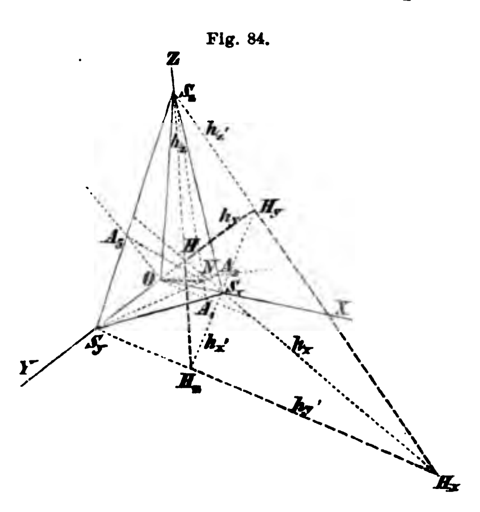

werden; in der Fig. 83. sind acht dergleichen zu einem Würfel vereinigt, die Ebenen $\mathbf{H}_x$, $\mathbf{H}_{x'}$; $\mathbf{H}_y$, $\mathbf{H}_{y'}$; $\mathbf{H}_z$, $\mathbf{H}_{z'}$ sind die Ebenen der Paare von Geraden $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_x$, $\mathfrak{h}_y\mathfrak{h}_z$; $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_y$, $\mathfrak{h}_x\mathfrak{h}_z$; $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_z$, $\mathfrak{h}_x\mathfrak{h}_y$. (Vergl. § 49; 5. und § 60. Anm.)

5) Wie gross sind die Winkel $\beta_i$ für die Halbierungsaxen?

47. Eine beliebige Ebene $\mathbf{S}$ erzeugt mit den drei Projectionsebenen Durchschnittslinien, die wir die Spuren $s_i$ derselben nennen und als erste, zweite und dritte Spur so unterscheiden, dass $s_1$ in der Ebene $XOY$, $s_2$ in $XOZ$, $s_3$ in $YOZ$ gelegen ist; sie bilden das Spurendreieck der Ebene, dessen Ecken mit $S_x$, $S_y$, $S_z$ bezeichnet werden können nach ihrer Lage in den respectiven Axen. Die Ebene schneidet ferner das System der sechs Halbierungsebenen $\mathbf{H}_i$ und der vier Halbierungsaxen $\mathfrak{h}_i$ in den sechs Seiten — schreiben wir $h_x$,

$h_{x'}$, $h_y$, $h_{y'}$, $h_z$, $h_{z'}$ — und vier Ecken — $H$, $H_x$, $H_y$, $H_z$ eines vollständigen Vierecks, für welches die drei Ecken des Spurendreiecks $S_x$, $S_y$, $S_z$ die Schnittpunkte der Gegenseitenpaare $h_x$, $h_{x'}$; $h_y$, $h_{y'}$; $h_z$, $h_{z'}$ oder Diagonalpunkte und die drei Spuren $s_1$, $s_2$, $s_3$ also die drei Diagonalen sind.

Fig. 84.



Fällt man vom Anfangspunkt $O$ auf die Ebene eine Normale $n$ und bezeichnet ihren Fusspunkt durch $N$, so erkennt man denselben als den Durchschnittspunkt der drei Höhenperpendikel des Spurendreiecks $S_x S_y S_z$, weil die Normalebenen zur gegebenen Ebene durch $OZ$, $OX$, $OY$ respective sich in $ON$ durchschneiden (vergl. § 10; 10). Sind die Winkel dieser Normale mit den Projectionsebenen (§ 46.) $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, so sind die Neigungswinkel der Ebene $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ gegen dieselben Projectionsebenen die Complemente der $\beta_i$ und man hat folglich

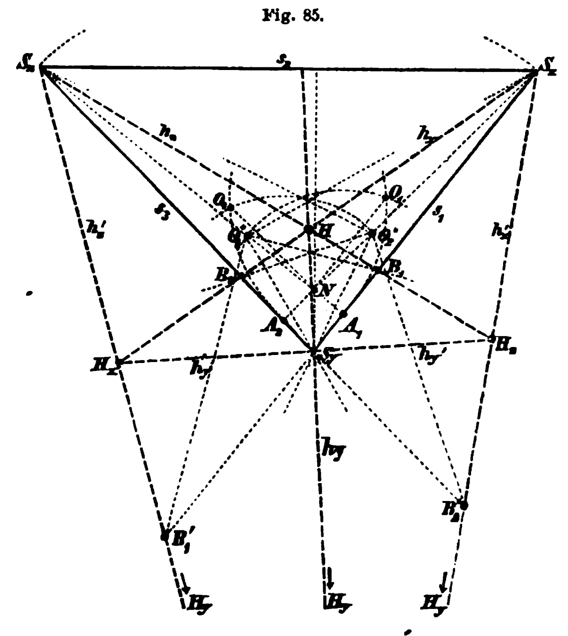
$$\sum_3^1 \cos^2\alpha_i = 1, \quad \sum_3^1 \sin^2\alpha_i = 2; \quad \alpha_i + \alpha_k \geqq 90^0$$

für $i$ und $k$ verschieden unter den Zahlen 1, 2, 3. Die Schnittlinien der Ebenen $n$, $oz$; $n$, $oy$; $n$, $ox$ mit den Projectionsebenen $xoy$, $xoz$, $yoz$ respective sind die drei Projectionen $n'$, $n''$, $n'''$ der Normalen $n$ und weil die bezeichneten Ebenen zu den Spuren $s_1$, $s_2$, $s_3$ respective normal sind, so sind auch $n'$, $n''$, $n'''$ respective normal zu $s_1$, $s_2$, $s_3$. Da endlich alle Normalen zu derselben Ebene und alle Normalebenen derselben Geraden einander parallel und die Projectionen paralleler Geraden so wie die Spuren paraller Ebenen selbst parallel sind, so gilt der Satz: Die Projectionen jeder Normale einer Ebene sind normal zu den gleichnamigen Spuren der Ebene — und der umgekehrte: Die Spuren der

Normalebene zu einer Geraden sind normal zu den gleichnamigen Projectionen der Geraden.

1) Wenn das Spurendreieck $S_x S_y S_z$ einer Ebene (Fig. 85.) gegeben ist, so kann man mittelst des Höhenschnittpunktes $N$ desselben die Längen $OS_x$, $OS_y$, $OS_z$ oder die Axenabschnitte der Ebene und die Geraden $h_i$, also auch die Punkte $H_i$ derselben verzeichnen. Ein Kreis über der Höhe $S_z A_1$ als Durchmesser schneidet auf der durch $N$ gezogenen Parallele zu $S_x S_y$ den Punkt $O_1$ so an, dass $NO_1$ die normale Entfernung der Ebene vom Anfangspunkt ist und die Abtragung von

Fig. 85.



$A_1 O_1$ auf die Höhe $A_1 S_z$ giebt (Vergl. Fig. 84.) in $O_1^*$ die Umlegung von $O$ mit $S_x S_y O$ in die Ebene; die Halbierungslinien des rechten Winkels $S_x O_1^* S_y$ geben in $S_x S_y$ zwei Schnittpunkte $B_1$, $B_1'$, welche mit $S_z$ verbunden die Geraden $h_z$, $h_{z'}$ bestimmen; und zwar giebt bei gleichem Sinne der Axenabschnitte $OS_x$, $OS_y$ der innere, bei ungleichem Sinne derselben der äussere Punkt die Linie $h_z$. Verfährt

man ebenso mit den Seiten $S_y S_z$, $S_z S_x$ des Spurendreiecks, so erhält man die Geraden $h_x$, $h_{x'}$; $h_y$, $h_{y'}$ und durch ihre vier Schnittpunkte zu dreien die Punkte $H$, $H_x$, $H_y$, $H_z$. Da die Construction die Länge aber nicht den Sinn der Axenabschnitte der Ebene bestimmt, so entsprechen acht Lagen der Ebene in den durch das System der Projectionsebenen erzeugten Octanten des Raumes demselben Spurendreieck. Man characterisiere die bezügliche Unterscheidung der Vierecke der $H_i$.

2) Man entnehme der vorigen Construction die Neigungswinkel $\alpha_i$ der Ebene.

3) Die Punkte $B_i$ in den Seiten des Spurendreiecks liegen viermal zu drei in einer Geraden. (Siehe Fig. 92.)

4) Welches ist der besondere Character des Vierecks der $H_i$ für eine Ebene mit gleichseitigem Spurendreieck?

5) Wie gross sind die Neigungswinkel $\alpha_i$ der Ebenen von gleichseitigen Spurendreiecken?

6) Jede projicierende Ebene hat zu ihrem Spurendreieck einen rechtwinkligen Parallelstreifen, dessen unendlich ferne Ecke der zu ihr parallelen Axe angehört. Das Viereck $H H_x H_y H_z$ ist dann ein gleichschenkliges Paralleltrapez mit parallelen Seiten von der Richtung der beiden parallelen Spuren und dessen nicht parallele Seiten mit der letzten Spur gleiche Winkel bilden.

7) Als erste ausgezeichnete Grenzlage der projicierenden Ebene kann ihr Parallelismus mit einer Projectionsebene betrachtet werden; dann ist eine Spur unendlich fern, das Viereck $H H_x H_y H_z$ ist ein Quadrat.

8) Die zweite ausgezeichnete Grenzlage giebt die projicierende Ebene parallel einer Halbierungsebene; dann liegen zwei der Ecken des Vierecks der $H_i$ und also eine seiner Seiten unendlich fern, die beiden andern Ecken aber in der Mitte zwischen

den parallelen Spuren und symmetrisch zur letzten Spur der Ebene.

9) Man erörtere die Unbestimmtheit des Normalenfusspunktes $N$ in 2 und die speciellen Lagen desselben in den Fällen 3 und 4.

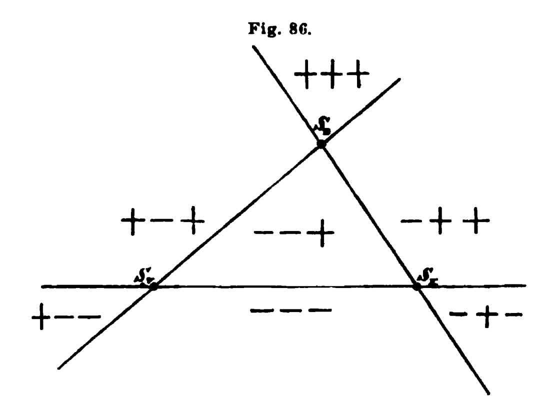
10) Wenn eine Ebene zu einer der Halbierungsaxen parallel ist, so fällt eine der Ecken des Vierecks der $H_i$ ins Unendliche und die drei zugehörigen $h_i$ werden einander parallel.

11) Eine Ebene ist zu einer der Halbierungsebenen normal, wenn zwei ihrer Axenabschnitte gleich sind; man characterisiere das Viereck der $H_i$ in diesem Falle.

12) Als weitere Specialfälle der Lage einer Ebene sind bezüglich des Dreiecks der Spuren und des Vierecks der $H_i$ die Fälle zu characterisieren, wo die Ebene eine Projectionsaxe respective eine Halbierungsaxe enthält.

13) Aus dem Sinne der Coordinaten der drei Axenschnittpunkte $S_x$, $S_y$, $S_z$ der Ebene bestimmt sich der Sinn der Coordinaten aller ihrer Punkte aus

Fig. 86.




ihrer Lage gegen das Spurendreieck. Alle Punkte innerhalb des Spurendreiecks haben ihre Coordinaten vom nämlichen Sinne, wie die Axenschnittpunkte selbst, sagen wir beispielsweise +, +, + oder (+, −, +); der Durchgang durch eine Spur

markiert den Wechsel des Sinnes der zugehörigen, d. i. zu ihrer Projectionsebene normalen Coordinate, so dass die Aussenwinkelflächen des Spurendreiecks an $s_1$ durch $++-$ $(+--)$, an $s_2$ durch $+-+$ $(+++)$, an $s_3$ durch $-++$ $(--+)$ characterisiert sind; endlich die Scheitelwinkelräume an $S_x$, $S_y$, $S_z$ respective die Zeichenfolgen $+--$ $(++-)$, $-+-$ $(---)$, $--+$ $(-++)$ erhalten. Die Figur 86. giebt einen dritten Fall. Eine Ebene geht im Allgemeinen durch sieben von den acht Octanten, in welche die Projectionsebenen den Gesammtraum theilen. Durch welchen geht sie nicht?

14) Man erörtere die in den vorher bezeichneten Specialfällen der Lage der Ebene eintretenden Besonderheiten der Discussion in 13, und füge die Untersuchung der Vertheilung der Punkte von besondern Coordinatenverhältnissen nach § 46.; 1—4 hinzu. Der Gesammtraum wird durch die Projections- und Halbierungsebenen in 48 Winkelräume (dreiseitige Ecken) zerlegt, von denen jede Ebene im Allgemeinen 33 durchsetzt.

15) Man gebe die speciellen Relationen zwischen den Winkeln $\alpha_i$ für die projicierenden und die den Projections- oder Halbierungsebenen parallelen Ebenen an; dazu die Lage ihrer Normalen.

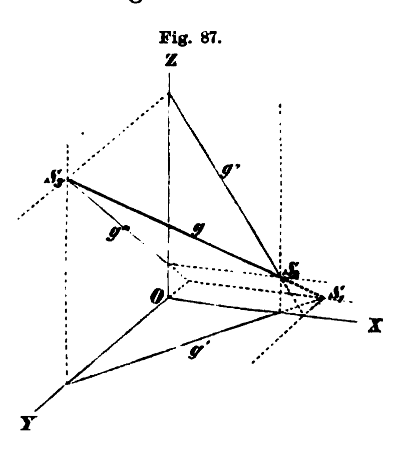
16) Wenn der eine Schenkel eines rechten Winkels einer Projectionsebene parallel ist, so ist die betreffende Projection desselben selbst ein rechter Winkel.

48. Eine Gerade $g$ bestimmt mit den Richtungen der drei Projectionsaxen $OZ$, $OY$, $OX$ drei projicierende Ebenen $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_3$, von denen jede zwei zu einander parallele Spuren und eine zu diesen rechtwinklige Spur hat; die Letzteren sind die drei Projectionen der Geraden $g'$, $g''$, $g'''$. Die Gerade schneidet die drei Projectionsebenen in drei Punkten, die wir ihre Durchstosspunkte nennen und mit $S_1$, $S_2$, $S_3$ bezeichnen wollen, nach den Projectionsebenen $XOY$, $XOZ$, $YOZ$, in welchen sie liegen. Jeder derselben liegt

in den drei Ebenen $\mathbf{G}_i$ und in einer Projectionsebene, ist also der Durchschnittspunkt der drei gleichnamigen Spuren von jenen. (Fig. 87.)

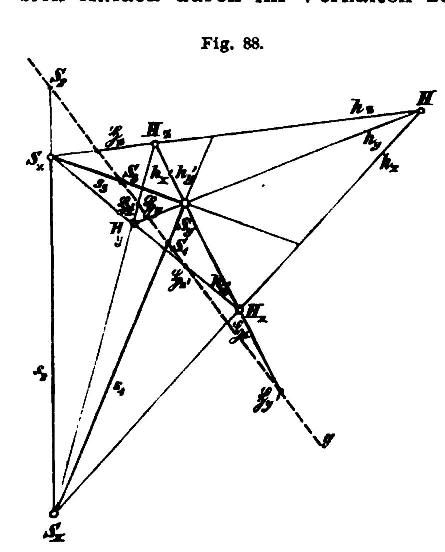
Dieselbe Gerade schneidet im Allgemeinen die sechs Halbierungsebenen in endlich gelegenen und verschiedenen Punkten, die wir als ihre Punkte $\mathfrak{H}_i$ bezeichnen wollen nach den Indices der betreffenden Halbierungsebenen. Diese Punkte sind die Durchschnittspunkte von $g$ mit den Seiten aller der Vierecke, welche die durch $g$ gehenden Ebenen mit dem System der Projections- und der Halbierungsebenen bilden (Fig. 88.); sie gehören also (§ 25.; 3.) der nämlichen Involution an, als drei Paare derselben $\mathfrak{H}_x, \mathfrak{H}_{x'}$; $\mathfrak{H}_y, \mathfrak{H}_{y'}$; $\mathfrak{H}_z, \mathfrak{H}_{z'}$.

Fig. 87.




Die speciellen Lagen der Geraden characterisieren sich einfach durch ihr Verhalten zum System der Projections- und Halbierungsebenen; sie kann einer Projectionsebene parallel sein, so dass der entsprechende Durchstosspunkt unendlich fern ist; sie kann zwei Projectionsebenen parallel sein oder einer Projectionsaxe. Eine Gerade kann zu einer Halbierungsebene parallel sein, oder zu zwei und somit zu drei solchen, d. h. zu einer Halbierungsaxe. Sie kann eine Projectionsaxe oder auch zwei Projectionsaxen schneiden, und sie kann ebenso eine Halbierungsaxe oder zwei Halbierungsaxen und damit auch eine

Fig. 88.



Projectionsaxe schneiden. Es ist sehr nützlich, für diese speciellen Fälle die Lagen der projicierenden Ebenen und die Besonderheiten der Systeme der $S_i$ und $\mathfrak{H}_i$ zu bezeichnen.

Die in jeder Geraden liegende Reihe von unendlich vielen Punkten hat ihre Projectionen in den gleichnamigen Projectionen der Geraden und die durch die Gerade gehenden Ebenen haben Spuren, welche durch die gleichnamigen Durchstosspunkte der Geraden gehen.

1) Die Durchstosspunkte $S_i$ der Geraden sind die Punkte derselben mit einer verschwindenden Coordinate $(x, y, o)$; $(x, o, z)$; $(o, y, z)$. (Vergl. § 46; 2).

2) Man bezeichne die Spuren von $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_3$, welche sich in $S_i$ durchschneiden.

3) Die Durchstosspunkte $S_1$, $S_2$ sind zu $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_{x'}$; $S_2$, $S_3$ zu $\mathfrak{H}_z$, $\mathfrak{H}_{z'}$; $S_3$, $S_1$ zu $\mathfrak{H}_y$, $\mathfrak{H}_{y'}$ conjugiert harmonisch (§ 22; 3.); wenn einer von ihnen unendlich fern ist, so ist der andere der Mittelpunkt des betreffenden Paares.

4) Durch wie viele und welche der acht Coordinatenräume geht eine Gerade $g$ im Allgemeinen? Welches sind die entsprechenden Zeichenwechsel ihrer Coordinaten?

5) Man characterisiere eine Gerade $g$, die zu einer Projectionsebene parallel ist, nach den hervorgetretenen Gesichtspunkten.

6) Man zeige, dass für die zu zwei Projectionsebenen parallele Gerade $g$ die Involution der $\mathfrak{H}_i$ eine symmetrische ist, welche den vorhandenen Durchstosspunkt zum endlichen Doppelpunkt hat.

7) Man bezeichne den Centralpunkt der Involution der $\mathfrak{H}_i$ für eine Gerade $g$, die zur Halbierungsaxe $\mathfrak{H}_z$ parallel ist.

8) Man erläutere die harmonische Relation der $\mathfrak{H}_i$ auf einer Geraden $g$, die in einer Projectionsebene liegt.

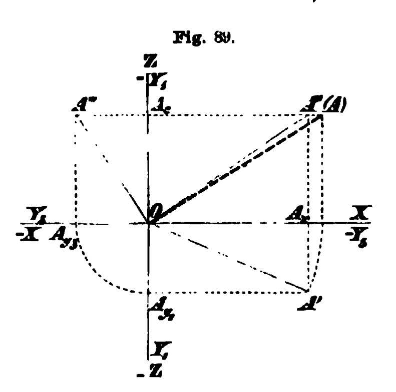
9) Man specialisiere die Involution der $\mathfrak{H}_i$ und die Lage der $S_i$ für eine Gerade, die einer Halbierungsebene parallel ist.

10) Man untersuche, ob die Relationen der Winkel $\beta_i$ für einige dieser Specialfälle besondere Ergebnisse liefern.

49. Die drei Projectionsebenen, in welchen alle die gewonnenen Bestimmungs-Elemente enthalten sind, werden zum Zwecke der Darstellung in eine Ebene, die Zeichnungsebene, gebracht; wir denken eine derselben, die wir als Ebene $XOZ$ nehmen wollen, und vertical voraussetzen, mit der Zeichnungsebene vereinigt und führen die beiden andern $XOY$ — wir denken sie horizontal — und $YOZ$, die auf ihr normal stehen, durch Drehung um die Axen $OX$ und $OZ$ respective in sie über; wir wollen festsetzen, es geschehe diess in der Weise, dass die positive Axe $OY$ durch die Drehung um $OX$ auf die negative Axe $OZ$, in $OY_1$ (Fig. 89.), und dass dieselbe positive Axe $OY$ durch die Drehung um $OZ$ auf die negative Axe $OX$ falle in $OY_3$. Dann sind alle Coordinaten $y$ sowohl auf die horizontale, wie auf die verticale Axe aufzutragen in einerlei Sinn derselben. Wir setzen fest, es sei der positive Sinn der $x$ der nach rechts und der positive Sinn der $z$ der nach oben, also der positive Sinn der $y$ nach unten und nach links respective in $XOY$ und $YOZ$.

Von den Flächen des projicierenden Parallelepipeds eines Punktes $A$ erscheinen drei, nämlich (Fig. 89.) $OA_xA'A_y$, $OA_yA'''A_z$, $OA_zA''A_x$, sie enthalten jede der Coordinaten dreimal ($y$ viermal?) und haben paarweis je eine Seite nach Richtung und Länge und somit die anstossenden Seitenpaare der Richtung nach gemein: Je zwei Projectionen desselben Punktes $A$ liegen in demselben Perpendikel zur zwischenliegenden Projectionsaxe, respective $A'A_xA''$, $A''A_zA'''$, $A'''A_{y_3}A_{y_1}A'$. Die Entfernung des Punktes $A$ $(x, y, z)$ vom Anfangspunkte $O$ ergiebt sich als Hypotenuse in jedem der rechtwinkligen Dreiecke aus den respectiven Katheten $OA'$, $z$; $OA''$, $y$; $OA'''$, $x$; der von ihr mit der Projection eingeschlossene Winkel ist der zugehörige Winkel $\beta_i$.

Fig. 89.



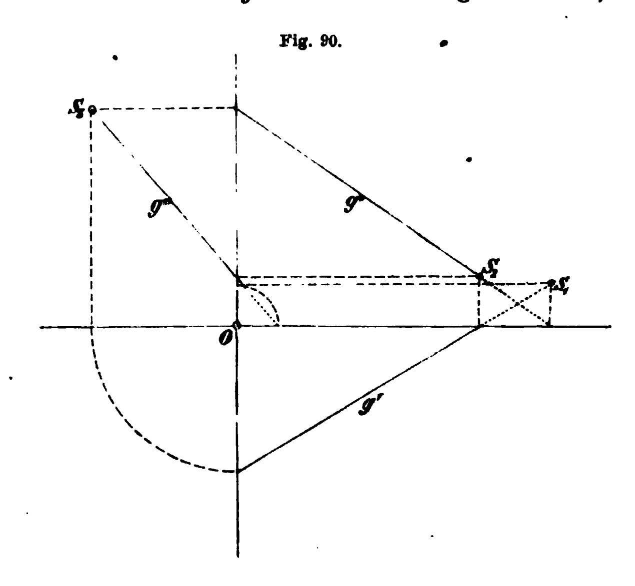
1) Man trage die Projectionen eines Punktes aus seinen Coordinaten auf und zwar mit allen Veränderungen des Sinnes, welche möglich sind. Acht Pnnkte entsprechen den acht Zeichencombinationen $\pm$, $\pm$, $\pm$.
2) Man entnehme aus den gegebenen Projectionen eines Punktes auf die Ebenen $XOY$, $XOZ$ seine drei Coordinaten und bestimme seine Lage im Raum und seine Projection auf $YOZ$.
3) Man bestimme aus $A'$, $A'''$; respective aus $A''$, $A'''$ die fehlende Projection $A''$, respective $A'$.
4) Man verzeichne die Projectionen von Punkten in allen den speciellen Coordinatenverhältnissen der Aufgabe des § 46. und erörtere insbesondere die Charactere der in den Projectionsebenen gelegenen Punkte.
5) Die Punkte der Halbierungsebenen $\mathbf{H}_{x'}$, $\mathbf{H}_{y'}$ (?) und $\mathbf{H}_{z'}$ haben je ein Paar zusammenfallender Projectionen; die entsprechenden Projectionen der Punkte der Ebenen $\mathbf{H}_x$, $\mathbf{H}_y$, $\mathbf{H}_z$ sind symmetrisch zur zwischenliegenden Projectionsaxe; eine ihrer Projectionen liegt stets in einer der Halbierungslinien der Axenwinkel aus $O$.
6) Giebt es Punkte, für welche alle drei Projectionen sich decken und wo liegen sie und ihre Projectionen?

50. Eine gerade Linie ist durch zwei ihrer Projectionen $g_i$ (Fig. 90.) bestimmt, wenn die zu denselben gehörenden projicierenden Ebenen $\mathbf{G}_i$ sich schneiden; sie ist nicht bestimmt, wenn sie sich decken, d. i. wenn jene Projectionen in demselben Perpendikel zur zwischenliegenden Projectionsaxe enthalten sind. In diesem Falle ist die Gerade zur letzten Projection parallel und wird durch zwei Projectionen bestimmt, wenn eben diese unter denselben ist. Im Allgemeinen genügen somit zwei Projectionen zur Bestimmung der Objecte und die dritte kann weggelassen werden. (§ 49; 2.)

Nehmen wir zwei Punkte $A(x_1, y_1, z_1)$ und $B(x_2, y_2, z_2)$ als durch ihre Projectionen gegeben an, so sind die Projectionen ihrer geraden Verbindungslinie $AB$ die geraden Verbindungslinien $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ ihrer gleichnamigen Projectionen. Die wahre Länge von $AB$ bildet mit der Länge der Projection $A'B'$, $A''B''$, $A'''B'''$ und der algebraischen Differenz

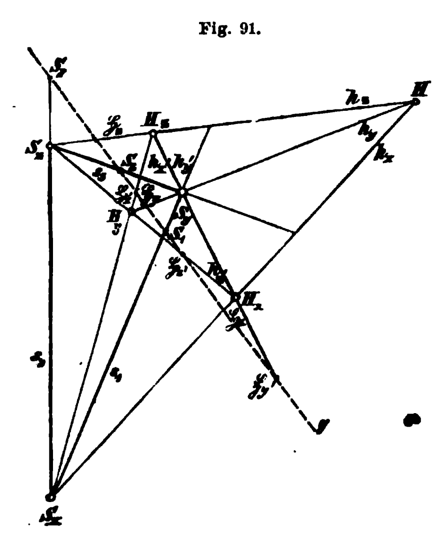
der zugehörigen projicierenden Linien $z_1 - z_2$, $y_1 - y_2$, $x_1 - x_2$ respective als Katheten je ein rechtwinkliges Dreieck, in wel-

Fig. 90.



chem sie mit der erstern den zugehörigen Winkel $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$ respective einschliesst. Man hat also $A'B' = AB \cdot \cos \beta_1$, etc.

Fig. 91.



Da die Punktreihe in $AB$ zu ihrer Parallelprojection perspectivisch ähnlich ist, so ist das Verkürzungsverhältniss $A'B' : AB = const.$, es ist nämlich $= \cos \beta_1$, etc. Für $\beta_1 = 0$ entsteht die Gleichheit der entsprechenden Reihen, für $\beta_1 = 90^0$ wird die Horizontalprojection der Geraden ein Punkt.

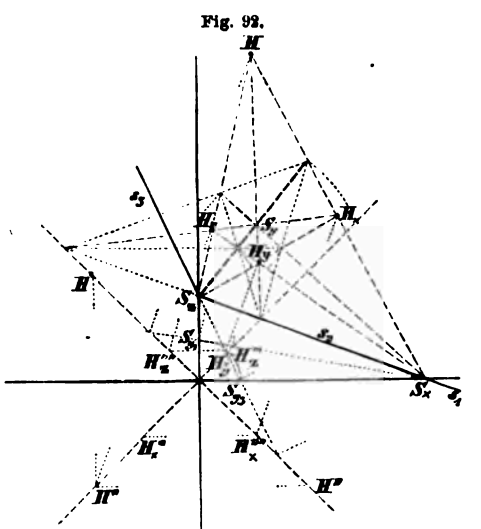
Die Durchstosspunkte $S_1$, $S_2$, $S_3$ der Geraden (Fig. 90.) fallen mit ihren gleichnamigen Projectionen zusammen und

liegen somit in den gleichnamigen Projectionen der Geraden und in den Perpendikeln, welche man auf den zugehörigen Axen in ihren Schnittpunkten mit den benachbarten Projectionen errichten kann. (Vergl. Fig. 87.)

Die Schnittpunkte der Geraden mit den Halbierungsebenen haben je eine ihren Projectionen in den Halbierungslinien der Axenwinkel, nämlich (Fig. 91.) $\mathfrak{H}_z$, $\mathfrak{H}_{z'}$ die erste, $\mathfrak{H}_x$, $\mathfrak{H}_{x'}$ die dritte und $\mathfrak{H}_{y'}$, $\mathfrak{H}_y$ die zweite und sind dadurch bestimmt.

1) Man construiere die gerade Entfernung von zwei Punkten, deren erste Projectionen nebst den Coordinaten $z_1 = 5$, $z_2 = -3$ gegeben sind; dazu die Winkel $\beta_i$ der Verbindungslinie.
2) Man projiciere eine Gerade aus der Angabe von zweien ihrer Durchstosspunkte.
3) Man lege durch denselben Punkt zwei Gerade.
4) Parallele Gerade haben parallele gleichnamige Projectionen und gleiche Verkürzungsverhältnisse.
5) Man projiciere zu drei Punkten einer durch ihre Projectionen gegebenen Geraden den oder die vierten harmonischen.
6) Man bestimme aus zwei Projectionen einer Geraden die dritte Projection derselben und ihre Durchstosspunkte.
7) Man verzeichne die Projectionen von Geraden, welche zu einer Projectionsaxe, respective Projectionsebene parallel sind, oder eine solche Axe schneiden respective in einer solchen Ebene liegen.
8) Wenn zwei Projectionen einer Geraden mit der zwischenliegenden Axe gleiche Winkel einschliessen, so ist die Gerade zu einer der Halbierungsebenen parallel; wodurch unterscheiden sich dabei die Halbierungsebenen $\mathbf{H}_z$, $\mathbf{H}_{z'}$, etc.?
9) Können alle drei Projectionen einer Geraden einander parallel sein und wie liegt eine solche Gerade?
10) Wodurch characterisieren sich die Projectionen einer Geraden, die in einer Halbierungsebene liegt? Insbesondere wenn sie zur zugehörigen Projectionsaxe parallel geht?

51. Die Spuren $s_1$, $s_2$, $s_3$ einer Ebene schneiden sich paarweis in der jedesmal zwischenliegenden Projectionsaxe. (Fig. 92.) Von den Spuren der Halbierungsebenen fallen zwei in die bezügliche Projectionsaxe, die letzte in eine der Halbierungslinien der von den beiden andern Projectionsaxen gebildeten Winkel. Von den sechs Geraden $h_i$ der Ebene ist also jede durch eine ihrer Projectionen bestimmt, nämlich $h_z$, $h_{z'}$ durch die erste, $h_y$, $h_{y'}$ durch die zweite und $h_x$, $h_{x'}$ durch die dritte Projection. Diess bestimmt die Projectionen der $h_i$ und somit auch der Punkte $H_i$. Verzeichnet man das Spurendreieck aus seinen drei Seiten durch Umlegung um die eine derselben, etwa $s_2$ in wahrer Grösse auf, so erhält man durch Beachtung ihrer Schnittpunkte mit den Gegenseiten desselben die wahre Figur der $h_i$ und $H_i$ der Ebene (Fig. 92.). Die Schnittpunkte der $h_i$ mit den Spuren liegen viermal zu drei in einer Geraden. (Vergl. Fig. 84.)

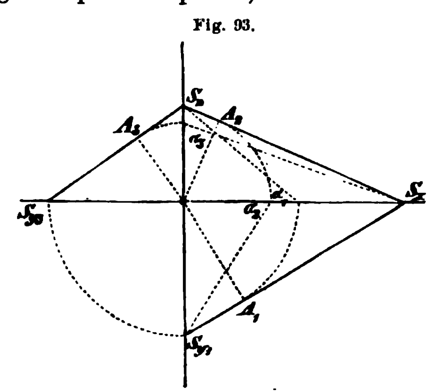

Fig. 92.

Die Normalen, die man vom Anfangspunkt $O$ auf die drei Spuren $s_1$, $s_2$, $s_3$ fällen kann, sind die Projectionen $n'$, $n''$, $n'''$ der Normale $n$ von $O$ auf die Ebene (Fig. 93.); sie sind auch Spuren und zwar erste, zweite, dritte Spur respective der Ebenen $n$, $OZ$; $n$, $OY$; $n$, $OX$, deren andere Spuren je in der bezüglichen Projectionsaxe vereinigt sind. Nennen wir die Fusspunkte dieser Perpendikel in den Spuren respective $A_1$, $A_2$, $A_3$, so enthalten die bei $O$ rechtwinkligen Dreiecke $OA_1S_z$, $OA_2S_y$, $OA_3S_x$, die man leicht in ihrer wahren Gestalt darstellt — vergleiche die Figur — bei $A_1$, $A_2$, $A_3$ respective die Winkel $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$.

Liegt auf der Ebene $S_xS_yS_z$ eine Figur von beliebiger Begrenzung und von der Fläche $F$ und denken wir sie durch

äquidistante Parallelen zu einer der Spuren und zur zugehörigen Höhe des Spurendreiecks in sehr kleine gleiche Rechtecke getheilt, so zeigt die Projection der Parallelensysteme, welche der besagten Spur entspricht, dass die Projectionen der Rechtecke in ihr dieselbe Grundlinie, wie im Original haben und dass ihre Höhen im Verhältniss $1 : \cos \alpha_1$ verjüngt sind; wir schliessen daraus, dass die Fläche der Projection der Figur zu ihr selbst in dem Verhältniss $\cos \alpha_i$ steht, d. i.

Fig. 93.



$$F : F' : F'' : F''' = 1 : \cos\alpha_1 : \cos\alpha_2 : \cos\alpha_3 .$$

Zwei beliebige Ebenen schneiden einander in einer Geraden, welche die Durchschnittspunkte der gleichnamigen Spuren derselben zu ihren Durchstosspunkten und offenbar ebenso die Durchschnittspunkte der gleichnamigen $h_i$ derselben zu ihren $\mathfrak{H}_i$ Punkten hat; diess giebt Mittel zur Angabe der Projectionen der Schnittlinie von zwei Ebenen.

1) Man bestimme aus zwei Spuren einer Ebene die fehlende Spur derselben.
2) Man trage die Spuren der nach ihrem Spurendreieck in Aufg. 1, § 47. bestimmten Ebenen nach ihren möglichen Lagen in den acht Octanten ein.
3) Man bestimme die sämmtlichen Projectionen der Geraden $h_i$ der Ebene **S** aus den Spuren derselben; damit auch die Projectionen des Vierecks der $H_i$.
4) Dasselbe insbesondere für die speciellen Fälle in 6, 7, 8 des § 47.
5) Man verzeichne die Spuren der drei projicierenden Ebenen einer Geraden, welche durch zwei ihrer Projectionen oder Durchstosspunkte bestimmt ist.
6) Man bestimme aus einer Projection einer Geraden $g$ in gegebener Ebene **S** die andern Projectionen derselben, indem man sie als die Schnittlinie der Ebene

**s** mit der durch jene Projection bestimmten projicierenden Ebene betrachtet.

7) Parallele Ebenen haben parallele gleichnamige Spuren.

8) Wenn in 6) die gegebene Projection der Geraden $g$ der gleichnamigen Spur der Ebene **s** parallel ist, so sind ihre beiden andern Projectionen den anliegenden Projectionsaxen parallel.

9) Man verzeichne zu einem Punkte $A$ in gegebener Ebene **s**, von welchem eine Projection bekannt ist, die beiden andern Projectionen — indem man durch dieselbe eine Gerade zieht, die man als gleichnamige Projection einer Geraden in der Ebene betrachtet (6); speciell durch eine Parallele zu einer Spur der Ebene (8).

10) Man verzeichne die Projectionen der Geraden $A_1 S_z$, $A_2 S_y$, $A_3 S_x$ einer durch ihre Spuren gegebenen Ebene und damit die Projectionen des Fusspunktes $N$ der Normale vom Anfangspunkt $O$ auf die Ebene, so wie die wahre Länge von $ON$.

11) Man bestimme die Projectionen des Durchschnittspunktes $D$ der durch zwei Projectionen bestimmten Geraden $g$ mit einer durch zwei ihrer Spuren bestimmten Ebene **s** — indem man eine Projection von $g$ als gleichnamige Projection einer in **s** gelegenen Geraden $g^*$ ansieht und den Schnittpunkt von $g$ mit $g^*$ ermittelt. Oder indem man eine beliebige von den durch $g$ gehenden Ebenen so benutzt, wie hier die bezügliche projicierende Ebene.

12) Man bestimme zu drei durch dieselbe Gerade $g$ gehenden Ebenen die vierte harmonische Ebene bei bestimmter Zuordnung, oder die vierten harmonischen Ebenen (§ 22; 4.); z. B. zu den drei projicierenden Ebenen der Geraden.

13) Eine Involution von Ebenen ist durch zwei Paare von entsprechenden Ebenen, respective deren Spuren, gegeben; man bestimme zu einer gegebenen fünften Ebene derselben die entsprechende. (§ 25; 5. § 31; 1.)

14) Man verzeichne die vom Punkte $A$ ausgehende Normale einer durch ihre Spuren bestimmten Ebene **s** und den Abstand der Letztern von $A$.

15) Die gleichnamigen Spuren von drei Ebenen, welche eine trirectanguläre Ecke bilden, sind die Seiten eines Dreiecks, welches die gleichbenannte Projection ihres Schnittpunktes zum Höhenschnittpunkt hat. (Vergl. § 10; 10. § 47; 1.)
16) Man verzeichne die Spuren der Ebene, welche durch zwei parallele oder sich schneidende Gerade bestimmt ist.
17) Man construiere die Spuren der durch einen gegebenen Punkt $B$ gehenden Normalebene zu einer durch ihre Projectionen bestimmten Geraden $g$, (§ 47.) — mit Hilfe der durch $B$ gehenden Parallelen zu einer Spur dieser Normalebene; analog die Parallelebene durch $B$ zu einer gegebenen Ebene.
18) Man verzeichne durch die Gerade $g$ die Normalebene zu der durch ihre Spuren $s_1$, $s_2$ bestimmten Ebene, — mit Hilfe der Normalen aus einem Punkte von $g$ auf die Ebene.
19) Man lege durch eine Gerade $g$ die Parallelebene zu einer andern gegebenen Geraden $l$ — mittelst einer Parallelen zu $l$ aus einem Punkte von $g$.
20) Man construiere die Projectionen und die wahre Länge der kürzesten Entfernung von zwei durch ihre Projectionen gegebenen Geraden $g$ und $l$. (Vergl. § 10; 9.)

52. Die Bestimmung einer Ebene durch ihre Spuren oder Axenschnittpunkte ist ein Specialfall ihrer allgemeineren Bestimmung durch drei Punkte $A$, $B$, $C$ oder durch zwei sich schneidende Gerade $g$, $l$. Die Construction

a) des Schnittpunktes $D$ der Ebene mit einer nicht in ihr liegenden Geraden $g_1$ und
b) der Schnittlinie $d$ von zwei Ebenen $g$, $l$; $g_1$, $l_1$ mit einander ist ohne Vermittelung der Spuren möglich.

Um $D$ zu construieren betrachtet man z. B. (Fig. 94.) $g_1''$ als zweite Projection einer in der Ebene $gl$ gelegenen Geraden $g_1^*$ — also als $g_1^{*''}$ — und bestimmt $g_1^{*'}$ durch Berücksichtigung ihrer Schnittpunkte mit $g$ und $l$; dann ist der Schnittpunkt von $g_1^{*'}$ mit $g'$ die erste Projection $D'$ von $D$; in ganz analoger Weise findet man $D''$, $D'''$ direct durch Be-

trachtung z. B. der ersteu Projection — sonst ergeben sie sich aus $D'$.

Man construiert sodann $d$, indem man (Fig. 95.) die Punkte $A$, $B$ bestimmt, in welchen $g_1$ und $l_1$ die Ebene $gl$ oder die Punkte $C$, $D$, in welchen $g$ und $l$ die Ebene $g_1 l_1$ schneiden — also durch zwei-, drei- oder vierfache Wiederholung des vorigen Verfahrens; unter den zur Benutzung stehenden vier Punkten liefern diejenigen ($A$, $D$ in der Figur) das genaueste Resultat, welche den grössten Abstand von einander haben.

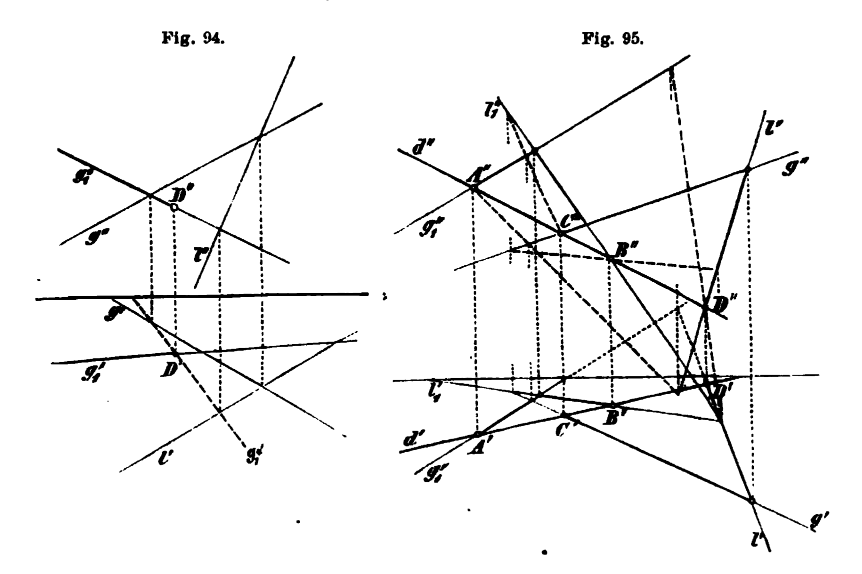


Fig. 94. Fig. 95.

Sind die Ebenen durch zwei Dreiecke von den Seitenlinien $g$, $l$, $h$; $g_1$, $l_1$, $h_1$ bestimmt und dargestellt, so liefert auf demselben Wege jede der Seiten des einen Dreiecks einen Schnittpunkt mit der Ebene des andern und man erhält die Schnittlinie der Ebenen durch zwei gut gewählte unter ihnen. Diess liefert die zweckmässigen Mittel zur Bestimmung der Durchschnittslinien begrenzter ebener Flächen; es ist offenbar, dass eine solche Durchschnittslinie dann nur erscheint, so weit sie innerhalb der beiden begrenzten Flächen zugleich liegt — in der Figur, in der $h$ und $h_1$ nur durch $d$ vertreten sind, zwischen $B$ und $C$.

1) Man construiere den Durchschnittspunkt $D$ der Drei-

ecksebene $ABC$ mit der Geraden zwischen den Punkten $E$ und $F$.

2) Man zeichne die Projectionen der Durchschnittslinie $d$ der Dreiecksebenen $ABC$ und $DEF$.

3) Man bestimme in der durch zwei sich schneidende oder zwei parallele Gerade $g$, $l$ gehenden Ebene Parallelen zu den Spuren $s_1$ und $s_2$ derselben durch einen beliebigen in ihr gelegenen Punkt $A$ und damit die Normale $n$ der Ebene in diesem Punkte.

4) Man entscheide ob ein durch seine Projectionen gegebener Punkt $A$ in der Ebene der Geraden $g, l$ liegt und in welchem Sinne und Betrag er in der Richtung der $x$, $y$ oder $z$ gemessen, von ihr entfernt ist.

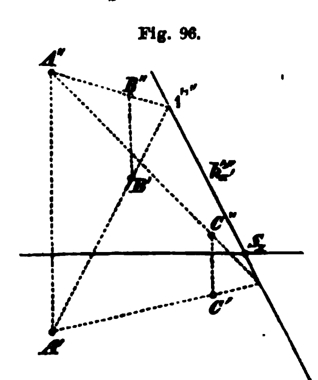
5) Man verzeichne die Geraden $h_i$ einer durch zwei Gerade $g$, $l$ bestimmten Ebene — indem man wie in § 51. die in den Halbierungslinien der Axenwinkel gelegenen Projectionen derselben benutzt.

6) Man construiere die Projectionen der Geraden $h_{z'}$, $h_{x'}$ in der Ebene $gl$, deren zweite und dritte, respective erste und zweite Projectionen sich decken.

53. Die geraden Linien $h_{x'}$, $h_{y'}$, $h_{z'}$ einer Ebene haben (die zweite in einem besondern Sinne) die Eigenschaft, dass eine ihrer Projectionen — nämlich respective die dritte, zweite, erste, — in einer Halbierungslinie der Axenwinkel liegt, und dass ihre beiden andern Projectionen sich decken, so dass alle ihre Punkte ein Paar sich deckender Projectionen zeigen — die Gerade $h_{y'}$ in der Weise, dass ihre erste und dritte Projectionen zur Deckung kommen würden, sobald man durch eine Drehung der einen um 90° die beiden Axen $OY_1$ und $OY_3$ zur Deckung bringt.

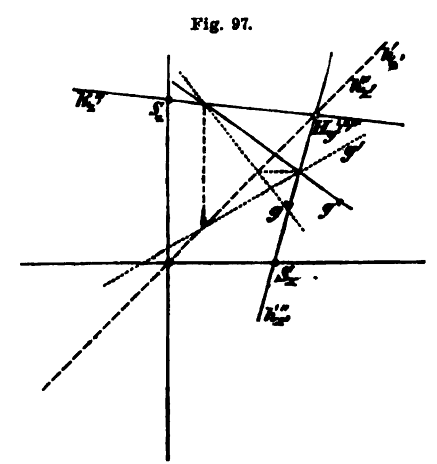
Da jede Gerade $g$ der Ebene diese Geraden $h_{x'}$, $h_{z'}$ schneiden muss — von $h_{y'}$ soll der erwähnten Besonderheit wegen abgesehen werden — so erhält man die Sätze: Die Projectionen $g'$, $g''$ einer jeden Geraden $g$ derselben Ebene schneiden sich in einem Punkte der Geraden $h_x^{\prime,\prime\prime}$, welche ihr entspricht. Die Projectionen $g''$, $g'''$ einer jeden Geraden $g$ der Ebene schneiden sich in einem Punkte der Geraden $h_z^{\prime\prime,\prime\prime\prime}$, welche derselben entspricht. Oder in andern Worten: Die beiden ersten

Projectionen eines ebenen Systems sind affine Figuren in perspectivischer Lage für die Richtung der Axe $z$ als Centrum und für die Gerade $h_x{}'^{,''}$ der Ebene des Systems als Axe der Affinität. Die zweite und dritte Projection eines ebenen Systems sind affine Figuren in perspectivischer Lage für die Richtung der Axe $x$ als Centrum und für die Gerade $h_z{}''^{,'''}$ als Axe der Affinität.


Fig. 96.

Demgemäss sind zwei Parallelprojectionen eines ebenen Systems bestimmt aus der einen Projection seiner Punkte $A$, $B$, $C$, $\cdots$, der Affinitätsaxe beider Projectionen und der andern Projection eines Punktes $A$ im System; z. B. die beiden ersten aus $A''$, $B''$, $C''$, $\cdots$; $h_x{}'^{,''}$; $A'$. Schneidet $A''B''$ (Fig. 96.) die Gerade $h_x{}'^{,''}$ in $1'^{,''}$, so liegt $B'$ in der Geraden $1'A'$ und in der Parallelen zur Axe $z$ durch $B''$.

Durch die beiden Affinitätsaxen $h_x{}'^{,''}$ und $h_z{}''^{,'''}$ ist eine Ebene bestimmt und mit Hilfe derselben construiert man daher zu einer Projection eines Punktes $A$ oder einer Geraden $g$ der Ebene (Fig. 97.) die andern Projectionen; man bemerkt, dass $h_x{}'''$ und $h_z{}'$ in der einen Halbierungslinie der Axenwinkel liegt, in welcher auch die Affinitätsaxen selbst sich schneiden müssen, da der Schnittpunkt $H_y$ derselben die Coordinaten $(a, -a, a)$ hat. (Vergl. § 49.; 6.)


Fig. 97.

Allgemein durfte man schliessen: Weil die Systeme der ersten und zweiten Projection des ebenen Systems mit diesem selbst affin sind, so sind sie auch unter einander affin

(§ 44.; 3), und da die Vereinigung der Systeme in der Zeichnungsebene dieselben in perspectivischer Lage zeigt, das Centrum in der zur Axe $OX$ normalen Richtung, so müssen sie auch eine Axe der Affinität besitzen (§ 22.; 6), die durch drei Paare entsprechender Punkte bestimmt ist und jedenfalls den bezüglichen Axenschnittpunkt der Ebene als sich selbst entsprechend und aus demselben Grunde den Punkt von drei zusammenfallenden Projectionen enthalten muss.

Da die Affinitätsaxen des Originalsystems mit seinen Projectionen die Spuren des ebenen Systems sind (vergl. § 54.), so ergiebt sich, dass die vorzugsweise bequemen Bestimmungsweisen des ebenen Systems durch Parallelprojection ohne Ausnahme die Axen dieser Affinitäten als Hauptbestimmungsstücke benutzen.

1) Man bestimme aus den Affinitätsaxen einer Ebene die Spuren derselben mittelst der in den Projectionsaxen gelegenen Projectionen derselben.
2) Man construiere den Durchschnittspunkt $D$ einer Geraden $g$ mit der durch ihre Affinitätsaxen $h_x{}^{','''}$, $h_z{}^{','''''}$ bestimmten Ebene.
3) Ebenso die Durchschnittslinie von zwei Ebenen, welche durch ihre respectiven Affinitätsaxen bestimmt sind.
4) Man construiere die Transversale der Geraden $g$ und $l$ aus dem Punkte $A$ oder in gegebener Richtung $h$ mit Benutzung der Affinitätsaxen der Ebenen $A, g$ und $A, l$. (Vergl. § 8.; 8).
5) Man verzeichne die Durchschnittslinie einer durch ihre Affinitätsaxen bestimmten Ebene mit der Ebene eines gegebenen Dreiecks $ABC$.
6) Wenn die Affinitätsaxe einer Ebene $h_x{}^{','''}$ normal zur Axe $OX$ ist, so sind die erste und zweite Projection ihres ebenen Systems nicht nur affin, sondern flächengleich, d. h. ihre entsprechenden Flächentheile sind gleich — denn die Winkel $\alpha_1$, $\alpha_2$ der Ebene sind einander gleich. (Vergl. § 47.; 11.)
7) Wenn die Affinitätsaxen $h_x{}^{','''}$ einer Ebene unendlich fern ist, so ist diese Ebene der Axe $OX$ parallel und gegen die erste und zweite Projectionsebene gleich

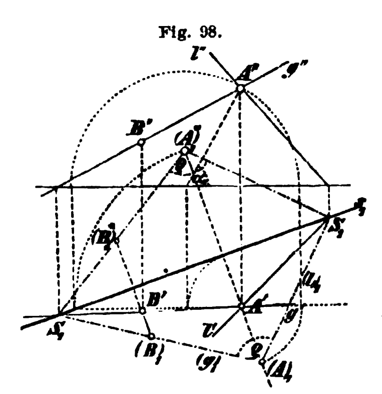
geneigt; die erste und zweite Projection ihres ebenen Systems sind congruent in perspectivischer Lage.

8) Welche Ebenen werden durch das Zusammenfallen der Affinitätsaxen $h_x{}^{','''}$, $h_z{}^{'','''}$ characterisiert?

54. Der von zwei geraden Linien $g$, $l$ in derselben Ebene eingeschlossene Winkel $\varphi$ wird durch Umlegen mit seiner Ebene in eine der Projectionsebenen oder in eine zu einer solchen parallele Ebene also durch Drehung um die betreffende Spur $s_i$ oder um eine Parallele zu derselben und um die Grösse des entsprechenden Neigungswinkels $\alpha_i$ oder seines Supplements bestimmt. Die Fig. 98. zeigt die Ausführung für die Spur $s_1$ mit $\alpha_1$ und $(180 - \alpha_1)$.

Durch dieselbe Operation erhält man die wahre Gestalt und Grösse jeder durch Projectionen bestimmten ebenen Figur. (Vergl. § 9. und § 11.) Die Punkte der Drehungsaxe bleiben dabei an ihrem Orte und dieselbe ist daher die Axe der Affinität in perspectivischer Lage, in welcher auch nach der Umlegung noch (§ 19.; 8) das Original des ebenen Systems und seine Projection zu einander stehen. Weil bei der Umlegung die Punkte des Systems Kreise in den durch sie gehenden Normalebenen zur Drehungsaxe aus den betreffenden Punkten der Axe als Mittelpunkten beschreiben, so sind die Centralstrahlen der fraglichen Affinität zur Drehungsaxe normal und die wahren Abstände der Punkte des Systems von der Drehungsaxe bestimmen ihre Umlegung. (Vergl. Fig. 99.) Bei der Umlegung eines ebenen Systems kann daher aus der Umlegung eines Punktes — wo möglich des von der Drehungsaxe entferntesten Punktes — die aller andern Punkte des Systems durch die Benutzung der Eigenschaften perspectivisch affiner Systeme (§ 21., a.) abgeleitet werden. (Vergl. § 53.)

Fig. 98.



Wenn umgekehrt ein ebenes System in seiner Umlegung

in eine Projectionsebene — oder eine zu einer solchen parallele Ebene — gegeben ist und die Drehungsaxe $s_i$ (oder die betreffende Parallele derselben), so wie der Winkel $\alpha_i$, unter welchem es gegen jene geneigt ist, bekannt sind, so können seine Projectionen verzeichnet werden (vergl. Fig. 98., die Punkte $A$ und $B$); die Angabe des Winkels $\alpha_i$ kann dabei durch die Projectionen eines in der Umlegung bekannten möglichst weit von der Drehungsaxe entfernten Punktes ersetzt werden.

In der Regel erfordert die Lösung der constructiven Probleme die successive Anwendung beider Uebergänge — so unten in 7), 10), 11), etc.

Die Umlegungen der Punkte und Geraden des Systems sind durch Einschluss ihrer Zeichen in Klammer unter Beifügung des die Projectionsebene und den Winkel $\alpha_i$ bezeichnenden Index unterschieden.

1) Man bestimme den von den Geraden $h_{x'}$, $h_{z'}$ einer Ebene eingeschlossenen Winkel.

2) Man construiere den Neigungswinkel einer Geraden $g$ gegen eine Ebene **S** — als Complement des Winkels von $g$ mit der von einem seiner Punkte auf **S** gefällten Normale $n$.

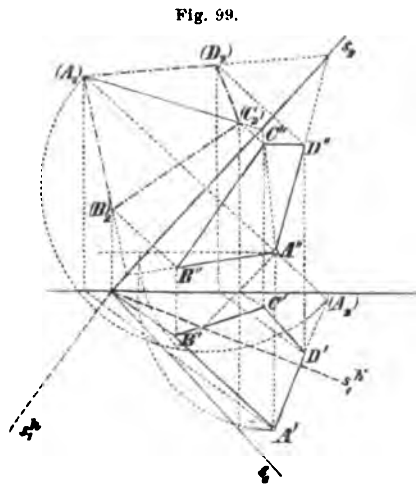
3) Man bestimme den Neigungswinkel von zwei Ebenen **S**, **S*** als den Winkel der von einem beliebigen Punkte $A$ auf sie gefällten Normalen $n$, $n^*$. Anderseits durch die Umlegung des Dreiecks, welches von einer Spur der Normalebene zur Scheitelkante mit den Schnittlinien derselben in beiden Ebenen gebildet wird, in die gleichnamige Projectionsebene und mittelst der zur besagten Spur gehörigen Höhe.

4) Für ein ebenes System ist die erste Projection aller Punkte und dazu die zweite Projection von drei bestimmten Punkten desselben gegeben; man soll dasselbe darstellen — durch Umlegung in eine zur ersten Projectionsebene parallele Ebene; insbesondere das System der Geraden $h_i$ der Ebene.

5) Wenn man die Umlegungen $(A)_i$, $(B)_i$, $\cdots$ der Punkte eines ebenen Systems in eine Projectionsebene oder eine ihr parallele Ebene mit den Punkten $A$, $B$, $\cdots$

des Systems selbst durch gerade Linien verbindet, so bilden die Geraden $A(A)_i$, $B(B)_i$, $\cdots$ ein Bündel von Parallelen, normal zu derjenigen Ebene, welche den Neigungswinkel $\alpha_i$ der Ebene des Systems gegen die bezügliche Projectionsebene halbiert. (Vergl. §14.; 4). Man kann diess einerseits zur Vermittelung des Ueberganges von der Projection des Systems zur Umlegung oder umgekehrt verwenden; man kann anderseits durch die Umlegungen $(A)_i$, $(A)_i^*$ eines Punktes die beiden Halbierungsebenen der Winkel $\alpha_i$ und $180^0 - \alpha_i$ bestimmen. In Fig. 99. ist diess für die

Fig. 99.



beiden ersten Projectionen und den Winkel $\alpha_2$ durchgeführt; $s_1^h$ und $s_1^{h*}$ sind die ersten Spuren der beiden Halbierungsebenen.

6) Man bestimme die Lage der parallelen Lichtstrahlen, für welche der Schlagschatten einer gegebenen Figur (in einer Ebene) auf eine Projectionsebene ihr selbst congruent wird.

7) Man verzeichne die Projectionen des Kreises, welcher durch drei gegebene Punkte $A$, $B$, $C$ geht.

a) Man legt das Dreieck $ABC$ um, bestimmt in der Umlegung den ihm umgeschriebenen Kreis $K$ und verzeichnet seine Projectionen; dieselben sind Ellipsen

und je zwei rechtwinklige Durchmesser des Kreises liefern durch ihre Projectionen ein Paar conjugierte Durchmesser dieser Ellipsen — man wählt den zur Drehungsaxe parallelen und den zu ihr normalen Durchmesser, weil sie die Axen der Ellipse in der gleichnamigen Projection liefern. Aus solchen zwei Durchmessern construiert man die Ellipse nach § 34.; 17, oder man bestimmt weitere Punkte und Tangenten der Projectionen durch die bekannten Punkte und Tangenten des Kreises in der Umlegung, natürlich unter Benutzung der Relationen der perspectivisch affinen Systeme und der axialen Symmetrie der Ellipse (§ 21., b.; § 34.; 1, 9).

b) Man bestimmt die Projectionen des Mittelpunkts $M$ des Kreises $ABC$ als des Durchschnittspunktes der Normalebenen zu den Seiten durch ihre Mittelpunkte mit seiner Ebene, vollzieht dann die Umlegung in die Parallelebene zu einer Projectionsebene durch diesen Mittelpunkt, d. h. macht den zu dieser Projectionsebene parallelen Durchmesser zur Drehungsaxe; verfährt aber übrigens wie bei a).

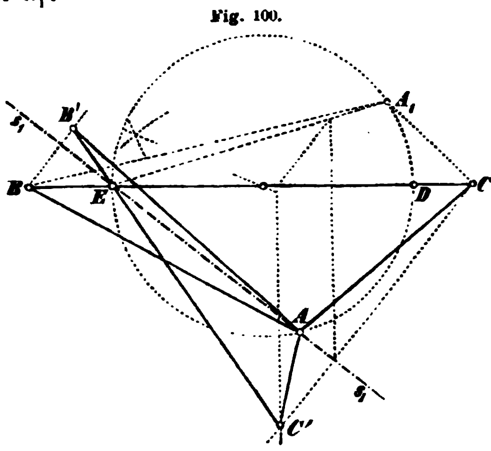
Die Projection eines Kreises aus Ebene, Mittelpunkt und Halbmesser ist hieran zu knüpfen.

8) Die eine Orthogonalprojection eines Kreises ist durch zwei conjugierte Durchmesser z. B. $A''B''$, $C''D''$ bestimmt und die Lage des Mittelpunktes $M$ überdiess durch die zugehörige Coordinate desselben festgesetzt; man soll die Ebene des Kreises bestimmen. Man erhält sie aus der einen Projection eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks $AMC$ und beiden Projectionen seiner Rechtwinkelecke $M$ nach dem Verfahren der folgenden Aufgabe. Man kann sie auch durch Uebergang zu den Axen der elliptischen Projection ohne directe Benutzung des Folgenden erhalten.

9) Man projiciere ein Dreieck $ABC$ orthogonal so, dass sein Bild einem gegebenen Dreiecke ähnlich werde — mittelst der Bemerkung über die Rechtwinkligkeit der Doppelstrahlen der projectivischen Büschel aus Punkten der Affinitätsaxe zwischen Umlegung und

Projection. Man trage an $ABC$ (Fig. 100.) etwa in $A_1BC$ ein dem gegebenen ähnliches Dreieck an und lege den Kreis aus einem Punkte von $BC$ durch die Punkte $A$, $A_1$, welcher die erstere Gerade in $D$ und $E$ durchschneidet. Ist dann $\angle AED > \angle A_1ED$, so kann $AE$ die Affinitätsaxe $s_1$ und $AD$ die Richtung der entsprechenden parallelen Projectionsstrahlen bezeichnen. Das Verhältniss $\tan AED : \tan A_1ED$ ist das Verjüngungsverhältniss und bestimmt also den Winkel $\alpha_1$.

Fig. 100.



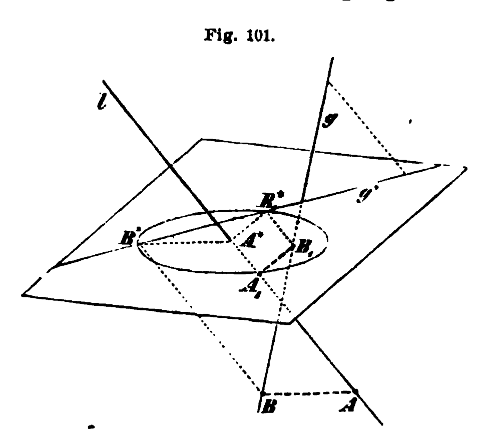

10) Man construiere eine Gerade $l$ durch den gegebenen Punkt $A$, welche die Gerade $g$ so schneidet, dass von $A$ bis zum Schnittpunkt $B$ eine gegebene Länge oder dass der Winkel $(g, l)$ von einer gegebenen Grösse sei — durch Umlegung der Ebene $A$, $g$.

11) Man bestimme denjenigen Punkt $B$ der Geraden $l$, der von der Geraden $g$ die vorgeschriebene Entfernung $e$ hat — oder allgemeiner die einer gegebenen Ebene **S** parallele Transversale $t$ zweier gegebenen Geraden $g$ und $l$, welche die Länge $e$ hat. Man verzeichnet (Fig. 101.) dazu den Schnittpunkt $A^*$ von $l$ mit **S** und die Schnittlinie $g^*$ der durch $g$ gehenden Parallelebene zu $l$ mit **S**, markiert in $g^*$ die Punkte $B^*$, $B_1^*$ in der Distanz $e$ von $A^*$ und führt durch sie die Parallelen zu $l$ bis $g$.

12) Man bestimme die kürzeste der Ebene **S** parallele Transversale $t$ der Geraden $g$ und $l$.

13) Man soll durch einen Punkt $A$ eine Gerade $d$ so ziehen, dass sie eine Gerade $g$ schneidet und mit der Ebene **S** einen vorgeschriebenen Winkel $\beta$ macht — insbesondere wenn $g$ in **S** liegt oder wenn **S** respective $g$ specielle Lagen gegen das Projectionssystem haben. Man benutzt den Kreis $K$ der Durchschnittspunkte aller gegen **S** unter $\beta$ geneigten Geraden durch $A$ (§ 1.) — natürlich in der Umlegung.

Fig. 101.



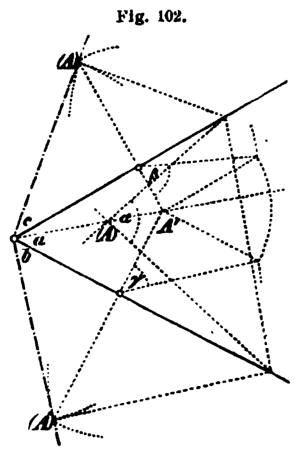

14) Man lege durch die Gerade $g$ eine Ebene so, dass sie mit der gegebenen Ebene **S** einen Winkel von vorgeschriebener Grösse $\alpha$ bildet; insbesondere für specielle Lagen der Geraden $g$ oder der Ebene **S** oder beider gegen das Projectionssystem. Man benutzt den Kreis $K$ der Durchschnittslinien aller gegen **S** unter $\alpha$ geneigten Ebenen durch $A$ (§ 2.; vergl. § 10.; 8).

15) Man lege durch eine Gerade $g$ eine Ebene, die mit der festen Geraden $l$ den Winkel $\beta$ bildet — mittelst der Normalebene von $l$ und dem Complement von $\beta$.

16) Man construiere und projiciere die dreiseitige Ecke aus den drei Kantenwinkeln $a$, $b$, $c$, d. i. bestimme ihre Flächenwinkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ und ihre Projectionen, indem man die eine Fläche der Ecke mit der ersten Projectionsebene zusammenlegt und die eine ihrer

Kanten zur zweiten Projectionsebene normal macht. Ohne Zuziehung der zweiten Projection ist die Bestimmung der Flächenwinkel aus den Kantenwinkeln in Fig. 102. gegeben, die nöthigen Ergänzungen sind einzufügen.

Fig. 102.



17) Bestimme die fehlenden Stücke einer dreiseitigen Ecke aus den Kantenwinkeln $a$, $c$ und dem eingeschlossenen Flächenwinkel $\beta$.

18) Ebenso aus den Kantenwinkeln $a$, $b$ und dem nicht eingeschlossenen Flächenwinkel $\beta$; man discutiere die mögliche Zweideutigkeit der Lösung.

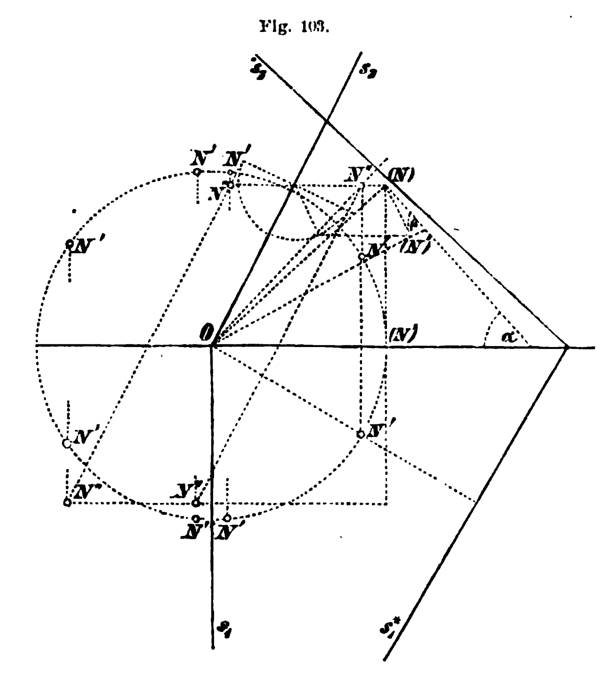
19) Man bestimme zwei Ebenen aus einem Paar gleichnamiger Spuren derselben und den Winkeln, welche diese mit ihrer Durchschnittslinie bilden.

20) Man construiere die dreiseitige Ecke aus ihren Flächenwinkeln, z. B. bestimme eine Ebene aus einem Punkte $P$ in ihr, ihrem Winkel $\alpha$ gegen die erste Projectionsebene und dem Winkel $\beta$, den sie mit einer zweiten projicierenden Ebene einschliesst — ohne Zuhilfenahme der Polarecke (Fig. 103.)

Sei **S*** die gesuchte Ebene mit den Spuren $s_1{}^*$ und $s_2{}^*$, $O$ der Axenschnittpunkt der gegebenen Ebene und $ON$ die von ihm auf **S*** gefällte Normale mit dem Fusspunkt $N$, so legen wir durch $ON$ die Normalebene zu $s_1$, welche $s_1$ in $A$ schneide und haben in $ONA$ ein bei $N$ rechtwinkliges Dreieck, welches bei $A$ den Winkel $\alpha$ enthält und dessen Höhe $NN'$ die Coordinate $z$ des Punktes $N$ giebt, während $ON'$ die Entfernung seiner ersten Projection von $O$ ist. Denken wir dann durch $ON$ die Normalebene zur gegebenen zweiten projicierenden Ebene, welche die Schnittlinie von dieser mit der gesuchten Ebene in $B$ schneidet, so ist $\triangle ONB$ bei $N$ rechtwinklig und enthält bei $B$ den Winkel $\beta$. Seine Höhe aus $N$ ist der Ab-

stand des Punktes $N$ von dieser projicierenden Ebene und vollendet damit die Bestimmung von $N$. Die Normalebene zu $ON$ durch $P$ ist die gesuchte Ebene. Man discutiere die Zulässigkeit der verschiedenen Lösungen.

Fig. 103.




21) Man lege durch den Punkt $P$ die Ebenen, welche gegebene Winkel $\alpha_1$, $\alpha_2$ oder $\alpha_2$, $\alpha_3$ besitzen.

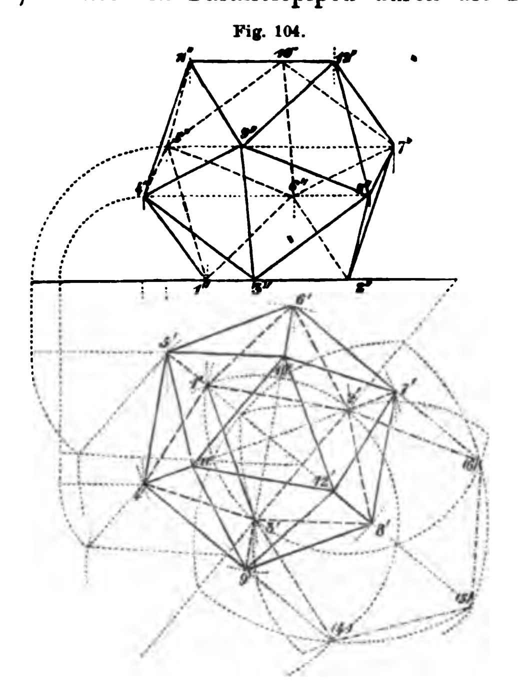
22) Man projiciere ein reguläres Dodekaeder mit einer zur ersten Projectionsebene parallelen Fläche aus einer gegebenen Kante $AB$ in dieser mit Benutzung der Regelmässigkeit seiner dreiseitigen Ecken und deduciere die Symmetrieverhältnisse seiner Projectionen.

23) Man stelle ebenso die andern regulären Körper dar, insbesondere das Ikosaeder. Die Fig. 104. giebt es in der Lage, in welcher zwei seiner Flächen parallel $xoy$ sind; es ist aus der dreiseitigen Ecke an einer derselben 1 2 3, 2 3 4 5 6, 1 2 6 construiert. Die Figur enthält die Zirkel-Construction des regulären Fünfecks aus seiner Seite.

24) Man projiciere einen Würfel so, dass die Verbindungslinie zweier Gegenecken parallel zur Axe $OZ$ sei. (Vergl. den Würfel in der Durchdringung der Fig. 107.)

25) Man projiciere eine sechsseitige Pyramide aus der Grundfläche in gegebener Ebene und den Winkeln, welche die von einer bestimmten Ecke derselben nach der Spitze gehende Kante mit den benachbarten Grundflächenkanten einschliesst, so wie der Länge dieser Kante; ebenso ein Parallelepiped durch die Längen

Fig. 104.



und Winkel der in einer Ecke zusammenstossenden Kanten bei Parallelismus einer Fläche mit $XOY$ und gegebener Richtung einer ihrer Kanten.

55) Wenn ein Polyeder durch seine Parallelprojectionen gegeben ist, so construiert man seine Schnittfigur mit einer gleichfalls bestimmten Ebene im Allgemeinen durch die Folge der Schnittlinien seiner Flächen mit derselben — in der Weise, dass jede dieser Schnittlinien die nächstfolgende als diejenige bestimmt, mit welcher sie in einer Kante ihrer

Fläche zusammentrifft, natürlich innerhalb der Endpunkte dieser Kante. Man benutzt hierbei die Spuren der Polyederflächen im Allgemeinen nicht, sondern bedient sich des allgemeinern Verfahrens von § 52., welches für begrenzte Ebenen vorzugsweise geeignet ist.

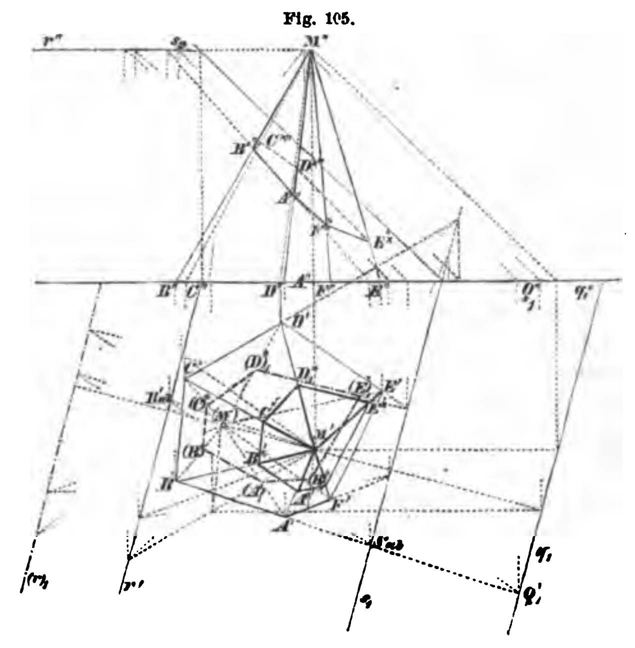
Für die Ausführung denken wir das Polyeder als undurchsichtig und unterscheiden an demselben die sichtbaren von den unsichtbaren Kanten als mit ausgezogenen und mit punktierten Projectionen dargestellt, indem wir festsetzen, die Sichtbarkeit werde in jeder Projection für ein Auge beurtheilt, das sich in der Richtung und auf der positiven Seite der zu ihrer Ebene normalen Projectionsaxe befindet. (Vergl. § 43.; 2.) Jede Seite der Schnittfigur ist unsichtbar, von der ein Endpunkt oder beide Endpunkte einer unsichtbaren Kante des Polyeders angehören.

Das häufige Vorkommen von Pyramiden und Prismen als selbständige Formen, so wie als Theilformen von zusammengesetzteren Polyedern macht es werthvoll, die speciellere Behandlung der ebenen Schnitte derselben zu erörtern. Wir denken die polygonale Basis einer Pyramide $ABC\cdots$ in einer Ebene **S**, speciell der ersten Projectionsebene und die Spitze $M$ derselben gegeben, dazu die Schnittebene **E**. Dann ist die Schnittfigur $A^*B^*C^*\cdots$ derselben mit dem Mantel der Pyramide anzusehen als die Centralprojection der Grundfläche $ABC\cdots$ aus dem Centrum $M$ auf die Ebene **E** oder umgekehrt diese als Bild von jener und kann also — da die Parallelprojectionen centrisch collinearer ebener Systeme selbst centrisch collineare Figuren sind — als die centrisch collineare Figur zu jener construiert werden mit Benutzung der Collineationsaxe und der Gegenaxen des Systems.

Denken wir die Ebene der Basis als erste Projectionsebene (Fig. 105.), so ist die centrisch collineare Beziehung der Basis als Bild zur Schnittfigur als Original auch in der ersten Projection für die erste Projection $M'$ des Centrums $M$ als Centrum, für die erste Spur $s_1$ der Ebene **S** als Axe der Collineation und für die erste Spur der durch $M$ gehenden Parallelebene zur Schnittebene als Gegenaxe $q_1$ erfüllt. Daraus ergiebt sich bekanntlich die Gegenaxe $r'$ (vergl. § 19.; 1. etc.), welche auch die erste Projection der Schnittlinie der Ebene **E**

mit der durch $M$ gehenden Parallelebene zur Basisebene $XOY$ ist. Man erhält dann die erste Projection der Schnittkante $AB$, indem man den Schnittpunkt $S_{ab}$ von $A'B'$ mit $s_1$ mit dem Schnittpunkt $R'_{ab}$ der aus $M'$ gezogenen Parallelen zu $A'B'$ in $r'$ verbindet und diese Gerade in $M'A'$ und $M'B'$ begrenzt; auf der ihr Parallelen durch $M'$ liegt auch $Q_1{}^*$, der Schnittpunkt von $A'B'$ mit $q_1$. Man fügt die zweite Projection hinzu, indem man die zweiten Projectionen der $R$ in $r''$ und die der $S$ auf der Axe $OX_1$ verbindet und bemerkt, dass die zweiten Projectionen der Punkte $Q_1$ in derselben Axe mit $M''$ Parallelen zu $A^{*''}B^{*''}, \cdots$ bestimmen.

Fig. 105.



Man construiert auch die wahre Gestalt der Schnittfigur $A^*B^*C^* \cdots$ direct aus ihrer centrischen Collineation zu $ABC \cdots$ als die Umlegung derselben in die erste Projectionsebene (Fig. 105.); die centrische Collineation zwischen $(A^*B^*C^* \cdots)$ und $A'B'C' \cdots$ hat die Spur $s_1$ zur Collineationsaxe, die Umlegung $(M)$ von $M$ mit der zu **S** parallelen Ebene $Mq_1$ zum Collineationscentrum und die Umlegung $(r)_1$ von $r$ mit der Ebene **S** zur Gegenaxe, indess die Gegenaxe $q_1$ ungeändert bleibt.

Auf diese Constructionen gehen somit alle die in der Theorie der centrisch collinearen ebenen Systeme entwickelten Hilfsmittel über.

1) Man untersuche, in wie weit sich die Hilfsmittel der centrischen Collineation auf eine Pyramide mit schräger Basisebene **E** mit Vortheil anwenden lassen.
2) Man benutze sie für die Darstellung des Schnittes, den ein reguläres Dodecaeder mit einer Ebene erzeugt.
3) Man erörtere die Identität dieser Methode mit der der directen Construction der Schnittlinien der Pyramidenflächen mit der Schnittebene.
4) Man erläutere die Modificationen, welche diese Methoden für die Bestimmung der Projectionen und der wahren Gestalt des ebenen Schnittes der Prismen bedürfen — wo an Stelle der Collineation die Affinität tritt.
5) Man bestimme den Normalschnitt und das Netz — d. i. die möglichst zusammenhängende Ausbreitung seiner Flächen in einer Ebene — für ein schräges fünfseitiges Prisma mit einer zur ersten Projectionsebene parallelen Grundfläche.

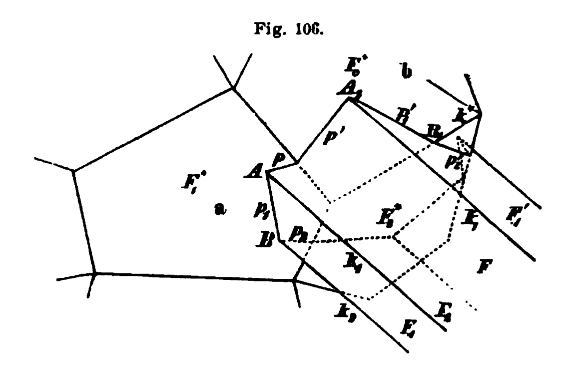
56. Zwei Polyeder erzeugen mit einander als ihre Durchdringung ein nicht ebenes oder windschiefes Vieleck, dessen Seiten die Durchschnittslinien der Flächen des einen Polyeders mit den Flächen des andern innerhalb ihrer Begrenzungen sind, während es die Durchschnittspunkte der Kanten des einen mit den Flächen des andern zu seinen Ecken hat.

Die Durchdringungsfigur kann jedoch auch in mehrere von einander getrennte windschiefe Vielecke zerfallen — bei Euler'schen Polyedern in zwei, die man dann als Eintritts- und Austritts-Figur unterscheiden kann.

Für die Construction derselben benutzt man offenbar ihre Ecken oder Seiten mit gleichem Erfolg, natürlich in dem für begrenzte Figuren entwickelten Verfahren des § 52. Nehmen wir an, es sei (Fig. 106.) als Seite des Durchdringungspolygons die Gerade $p_1$ durch den Schnitt der Flächen $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_1^*$ der beiden Polyeder gefunden worden, so liegen ihre beiden Endpunkte $A$ und $B$ entweder a) beide in Kanten $k_1$, $k_2$ der

einen Fläche, sagen wir $\mathbf{F}_1$ oder b) der eine $A_1$ liegt in einer Kante $k_1'$ von $\mathbf{F}_1'$ und der andere $B_1$ in einer Kante $k_1^*$ von $\mathbf{F}_0^*$. Dann stösst im ersten Falle in $A$ die Durchschnittslinie $p$ der längs $k_1$ an $\mathbf{F}_1$ benachbarten Fläche $\mathbf{F}$ mit $\mathbf{F}_1^*$, in $B$ die Durchschnittslinie $p_2$ der längs $k_2$ an $\mathbf{F}_1$ benachbarten Fläche $\mathbf{F}_2$ mit $\mathbf{F}_1^*$ an. Im zweiten Falle dagegen schliesst

Fig. 106.



sich in $A'$ die Durchschnittslinie $p'$ der an $\mathbf{F}_1'$ in $k_1'$ benachbarten Fläche $\mathbf{F}$ mit der Ebene $\mathbf{F}_0^*$ und in $B_1$ die Durchschnittslinie $p_2'$ der an $\mathbf{F}_0^*$ in $k_1^*$ benachbarten Fläche $\mathbf{F}_2^*$ mit $\mathbf{F}_1$ an.

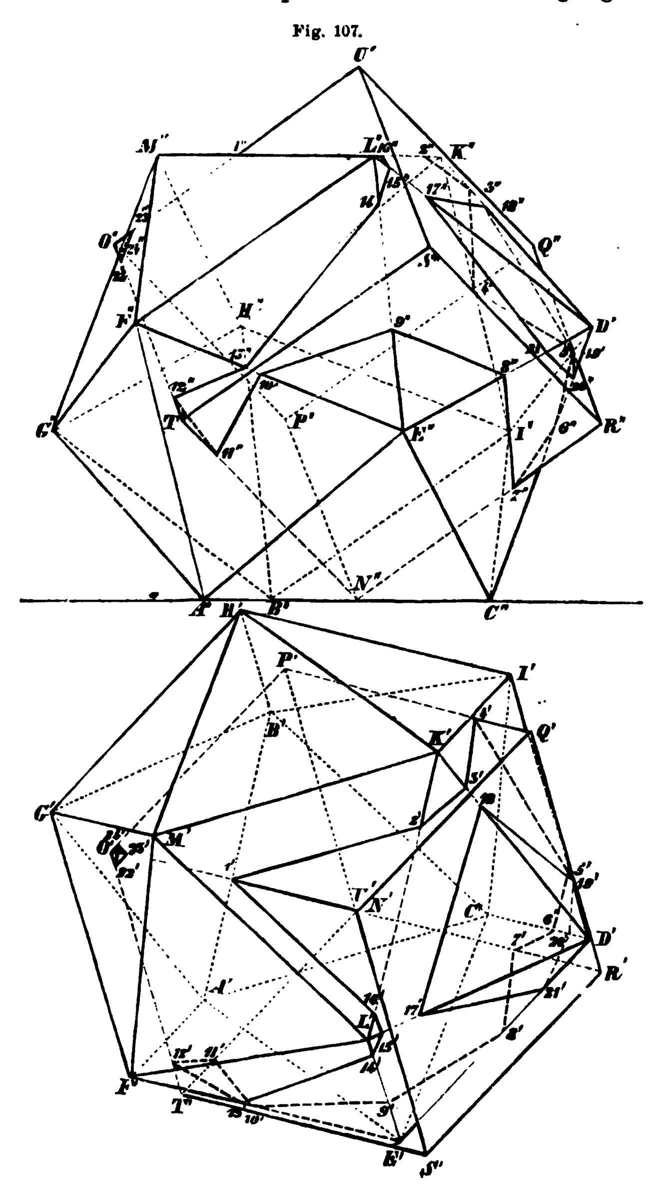
Geht man von einer bereits ermittelten Seite des Durchdringungspolygons aus nach diesem Gesetze weiter, so erhält man ohne erfolglose Versuche die Durchdringung, respective die Eindringung. Im letztern Falle hat man für die Ausdringung nach der gleichen Methode vorzugehen.

Die Sichtbarkeit des Durchdringungspolygons bestimmt nach dem vorigen § das Gesetz: Jede Seite desselben ist unsichtbar, von der ein Endpunkt in einer unsichtbaren Kante oder Fläche des einen oder andern Polyeders liegt.

Die Figur 107. zeigt die Durchdringung eines regulären Ikosaeders $AB \cdots LM$ mit zwei horizontalen Flächen mit einem Würfel $N \cdots U$ von verticaler Diagonale, deren unterer Endpunkt $N$ in einer jener Flächen $ABC$ liegt. Das Durchdringungspolygon zerfällt in die drei Theile: das windschiefe Polygon $1, 2, \cdots 16$, das ebene Fünfeck $17, \cdots 21$ und das Dreieck $22, \cdot 24$. Die Construction beginnt zweckmässig mit den Punkten 1, 2, 16 der obern Ikosaederfläche.

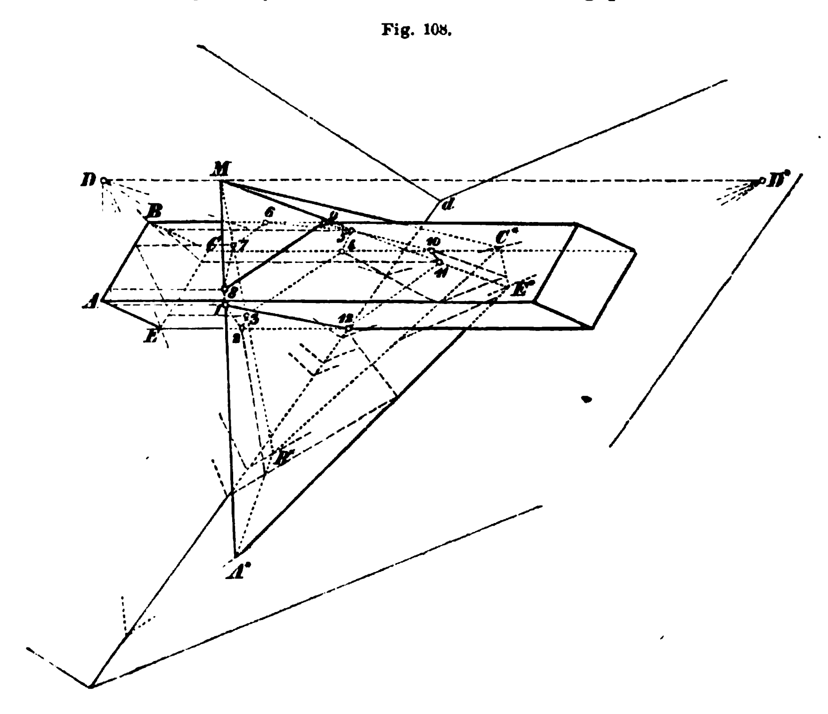
1) **Man construiere die Durchdringung eines regulären Ikosaeders mit einem vierseitigen Prisma und bilde die Netze der Körper mit der Durchdringung.**

Fig. 107.



2) Man construiere die Durchdringung einer sechsseitigen Pyramide mit einem schrägen Parallelepiped und bilde ihre Netze — indem man Ebenen parallel den Kanten des Prisma's durch die Scheitelkanten der Pyramide und Ebenen durch die Prismenkanten aus der Spitze der Pyramide benutzt. Welche Vortheile bringt es mit sich, dass diese Ebenen ein Büschel bilden? Die Figur 108. erläutert sie an dem Beispiel der vierseitigen Pyramide und des Parallelepipeds..

Fig. 108.

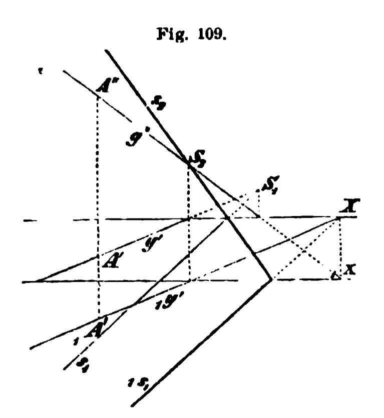



57. Die Einfachheit und Genauigkeit einer constructiven Lösung hängt oft ab von der Lage des projicierten Objects gegen die Projectionsebenen und die Ueberführung in eine andere Lage ist zuweilen von Vortheil für die Construction. In manchen Fällen ist es nothwendig, Elemente der Darstellung, welche über die Grenzen des Zeichenblattes hinaus gefallen sind, in dasselbe zurückzuführen, um die Ausführbarkeit zu sichern; schleifende Schnitte, Darstellungen von zu geringer

Breite zu vermeiden, ist oft sehr wünschenswerth. Deshalb bilden die Transformationen ein wichtiges Mittelglied zwischen der Theorie und der Praxis der darstellenden Geometrie. (Vergl. § 12.) Sie sind, wenn man an der Orthogonalität der Parallelprojectionen festhält, entweder Verschiebungen und Drehungen der Projectionsebenen — die Letztern nothwendig in Paaren — oder Verschiebungen und Drehungen der darzustellenden Objecte. Verschiebungen respective Drehungen der erstern sind Verschiebungen oder Drehungen der Letztern äquivalent, wenn sie sich nur durch ihren Sinn unterschieden, während ihre Grössen und die Axen nach welchen oder um welche sie erfolgen dieselben sind.

Die Parallelverschiebung einer Projectionsebene oder die des Objects nach den zugehörigen projicierenden Linien seiner Punkte hat nur eine algebraische Vermehrung dieser Letztern um die Verschiebungsgrösse, also eine gleichmässige Vermehrung der Abstände der durch sie bestimmten Projectionen von den zugehörigen Axen zur Folge. Wir wollen die Projectionen nach der Transformation dadurch bezeichnen, dass wir ihren Buchstaben unten links den Index der betreffenden Projectionsebene oder projicierenden Linie beifügen. (Fig. 109.)

Fig. 109.

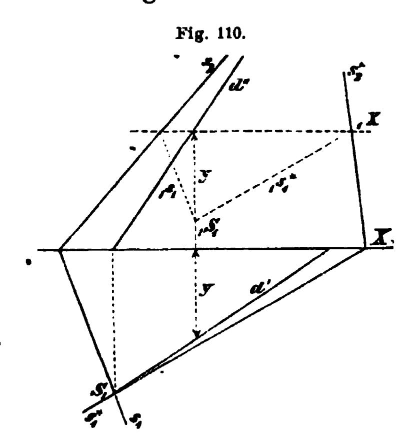


Die Gestalt und Richtung der Projectionen wird durch beliebige Parallelverschiebungen nicht geändert; Parallelverschiebungen können Raumersparniss nur erzielen, wenn sie das Ineinanderschieben der verschiedenen Projectionen bewirken, sie lassen das Maximum derselben erreichen, indem man den Mittelpunkt der dargestellten Raumfigur zum Anfangspunkt $O$ des Systems oder zu einem Punkte der Halbierungsaxe $\mathfrak{h}_y$ desselben macht (§ 46.; 4. § 53.). Grössere Deutlichkeit kann durch Parallelverschiebungen nur erreicht werden, insofern es sich um ein

Auseinanderhalten der verschiedenen Projectionen des Objects handeln kann.

1) Man bestimme die Schnittlinie von zwei Ebenen aus den Spuren derselben, wenn der Schnittpunkt der zweiten Spuren nicht auf dem Blatte liegt. Die Figur 110. giebt die Lösung.

Fig. 110.



Sie ist zugleich eine Auflösung der oft vorkommenden Aufgabe, die Verbindungslinie von einem Punkte nach dem unzugänglichen Schnittpunkte von zwei Geraden zu construieren. (Vergl. § 30.; 1.) Ein weiteres Mittel giebt der Satz, dass die drei Höhenperpendikel eines Dreiecks durch einen Punkt gehen.

2) Man bestimme die Schnittlinie von zwei Ebenen aus den Spuren, wenn kein Paar derselben sich auf dem Blatte schneidet.

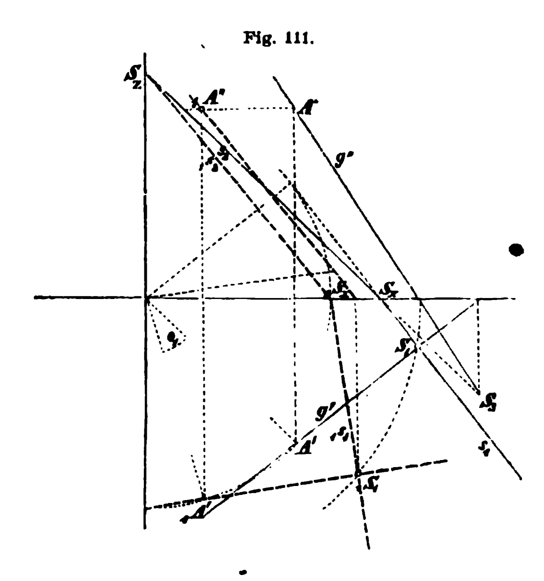
58. Die Drehung einer projicierten Raumfigur um eine Projectionsaxe oder eine Parallele zu einer solchen in bestimmtem Sinne um einen Winkel $\theta_i$ ($i$ als Index der projicierenden Linie, zu welcher diese Axe parallel läuft), d. i. die Darstellung ihrer Projectionen in der am Ende der Drehung erreichten Lage, ergiebt sich aus den beiden Bemerkungen: In den zur Drehungsaxe parallelen Projectionen schreiten die Punkte in Normalen zu ihr fort; in der zu ihr normalen Projection drehen sie sich in dem Sinne und um den Betrag des Winkels $\theta_i$ um den Punkt, welcher die Drehungsaxe projiciert.

Wir wollen dabei den Drehungssinn durch ein aus dem positiven Ende der Drehungsaxe oder der ihr parallelen Projectionsaxe nach der Projectionsebene blickendes Auge beurtheilt denken und als positiv die im Sinne des Uhrzeigers verlaufende bezeichnen.

Die Drehung um eine schräg im Raume liegende Axe ist durch die Methode dieses oder des nächsten § ebenfalls leicht auszuführen. (Man vergl. § 123., ferner § 59., Aufg. 8.)

1) Man drehe einen Punkt $A$, eine Gerade $g$ und eine Ebene **E** um die Axe $OZ$ um $\theta_1 = +30^0$. Die Figur 111. giebt diese Drehung.

Fig. 111.



2) Man leite aus den gegebenen Projectionen eines Polyeders in seiner einfachsten Stellung zu den Projectionsebenen diejenigen ab, welche ihm am Ende von zwei successiven Drehungen um die Axen $OZ$ und $OY$ — oder um mit dem Polyeder selbst verbundene Axen, parallel $OZ$ respective $OY$ — mit den Beträgen $\theta_1 = +60^0$, $\theta_2 = -15^0$ zukommen.
3) Man soll eine Ebene durch Drehungen um zwei Projectionsaxen zu einer Projectionsebene parallel machen. Man macht sie durch eine erste Drehung normal zu

einer der beiden andern Projectionsebenen und erreicht dann den vorgesetzten Zweck durch eine zweite Drehung. Um welche Axen, um welche Winkel und und in welchem Sinne hat man zu drehen? Für ein in besagter Ebene liegendes System erhält man dabei aus den ursprünglichen Projectionen die wahre Grösse und Gestalt.

4) Man mache eine Gerade durch Drehungen um zwei Projectionsaxen zu einer Projectionsaxe parallel und erörtere die analogen Fragen.

5) Ein Punkt $A$ soll durch Drehung um die Axe $OZ$ in eine gegebene Ebene **E** gebracht werden; welche Drehung ist dazu erforderlich?

6) Man bringe einen Würfel, dessen Kanten den Projectionsaxen parallel sind, durch Drehung um die durch seinen Mittelpunkt gehenden Parallelen zu diesen in die Lage, in welcher die Verbindungslinie von zwei Gegenecken der Axe $OZ$ parallel ist.

7) Man zeichne die neue erste Projection eines durch seine Projectionen bestimmten Objects, nachdem eine ihm fest verbundene durch ihre Spuren bestimmte Ebene zur ersten Projectionsebene parallel gemacht worden ist.

59. Dreht man statt des Objects die Projectionsebenen um dieselben Axen um gleiche Winkel aber im entgegengesetzten Sinn, so erhält man analoge Aenderungen der Projectionen. Denken wir die erste Projectionsebene und mit ihr die dritte um die Axe $OY$ um den Winkel $\theta_2$ gedreht, während die zweite Projectionsebene und das Object ungeändert bleiben, so ändern sich die Coordinaten $y$ seiner Punkte und die zweiten Projectionen derselben nicht und man bestimmt daraus die neuen ersten Projectionen durch Abtragen der alten $y$ aus den Fusspunkten der Normalen zur neuen Axe $OX$ in dieser, welche von den zweiten Projectionen gefällt werden können. (Fig. 112.)

Analog im Falle der Drehung der zweiten Projectionsebene um die Axe $OZ$ mit Vertauschung der ersten und zweiten Projectionen und Projicierenden.

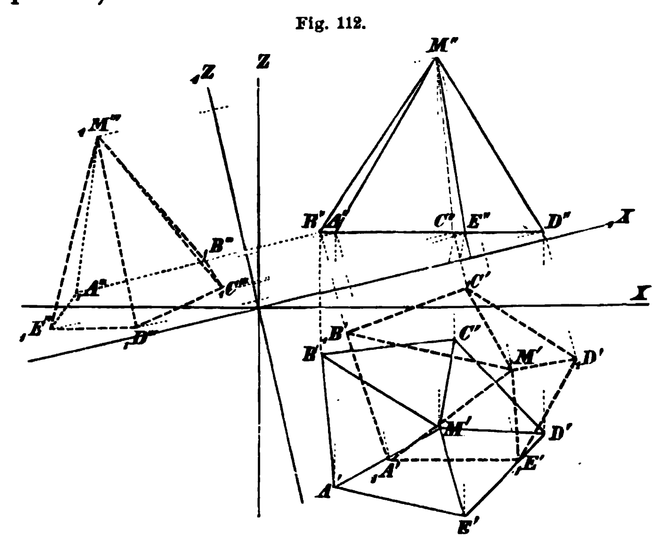
Die bildliche Anschaulichkeit des Ergebnisses wird dabei

— und diess ist gewöhnlich mit den Erfolgen der Transformationen verbunden — verringert, ganz ebenso wie die Symmetrie der analytischen Ausdrucksformen geometrischer Untersuchungen in der Regel verringert wird durch die Coordinaten-Transformationen, welche sie vereinfachen. (Vergl. unten 11.)

1) Man erläutere die dritte Projection als Projection auf eine neue erste oder zweite Projectionsebene.

2) Man bestimme den Winkel $\alpha_1$ einer Ebene (oder $\beta_1$ einer Geraden und die wahre Länge derselben) durch Transformation — indem man die neue zweite Projectionsebene zur Ebene normal (oder zur Geraden parallel) macht.

Fig. 112.




3) Man mache durch Drehung des Projectionssystems eine Gerade parallel zu einer Projectionsaxe, respective eine Ebene parallel zu einer Projectionsebene, — indem man zuerst eine neue erste oder zweite Projectionsebene parallel der Geraden respective normal der Ebene und sodann eine neue zweite oder erste Projectionsebene parallel der Geraden respective der Ebene einführt.

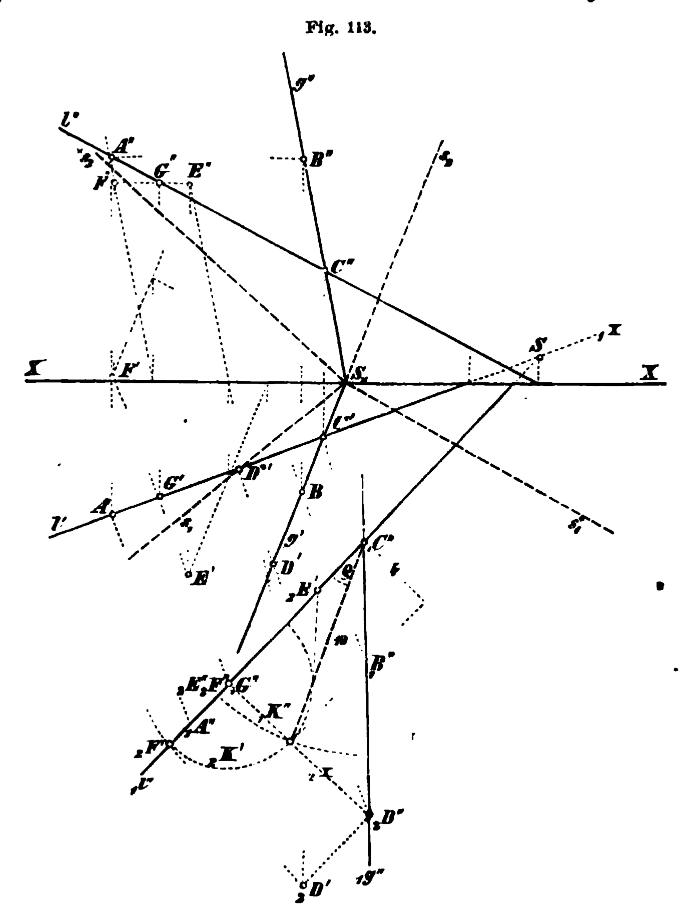
4) Die Identität der Umlegung eines ebenen Systems in

eine Projectionsebene mit einer solchen Transformation ist zu erörtern.

5) Man soll den Abstand des Punktes $A$ von der Ebene **E** respective der Geraden $g$ durch Transformation bestimmen.

6) Ebenso den kürzesten Abstand zweier Geraden $g$ und $l$.

Fig. 113.



7) Man bestimme durch Transformation die Grösse des Winkels von zwei Geraden oder Ebenen und den Winkel einer Geraden mit einer Ebene; insbesondere den Winkel von zwei Ebenen, die durch ihre Schnittlinie und je einen Punkt ausser dieser bestimmt sind.

8) Man lege durch eine Gerade $g$ die Ebenen **S**, **S***  unter vorgeschriebenem Winkel $\varphi$ zu einer Geraden $l$ unter Benutzung der Transformation. Die Figur 113. giebt die Ebenen vom Sinus des Winkels $\varphi$ gegen $l$ gleich 0,4; sie haben für Licht von der Richtung $l$ die durch diese Zahl gemessene Helligkeit. (Vergl. § 113.; 5. und §§ 125—127.) Mittelst der Punkte $A$, $B$, $C$ ist die neue Verticalprojection ${}_1l''$, $\cdots$ mit $l'$ als Axe ${}_1X$ gefunden, in ihr $\varphi$ angetragen und durch Uebergang zu einer neuen Horizontalprojection an ${}_2X$ sind mittelst des Punktes $D$ von $g$ die bezüglichen Spuren ${}_2D'\,{}_2E'$, ${}_2D'\,{}_2F'$ der gewünschten Ebenen gefunden. Die mittelst $G$ in der ursprünglichen Lage bestimmten Punkte $E$ und $F$ bestimmen die Ebenen **S**, **S***, nämlich $gE$, $gF$ respective. Das Büschel der den verschiedenen Werthen von $\varphi$ oder $\sin\varphi$ entsprechenden Ebenen bestimmt man nun leicht.

9) Man hat in der vorigen Aufgabe angenommen, dass $g$ und $l$ sich schneiden und dass $g$ durch die Axe $X$ gehe. Warum sind diese Annahmen allgemein zulässig?

10) Wie bestimmt man in der Figur von Aufg. 8 den Winkel, welchen eine gegebene Ebene durch $g$ mit $l$ einschliesst — also die Helligkeiten der verschiedenen Ebenen des Büschels durch $g$?

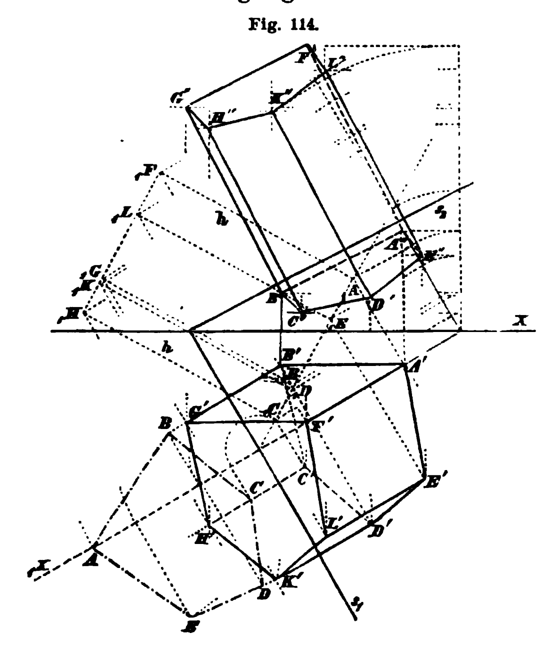
11) Man vereinfacht die Construction der Aufgabe, die Transversalen zu drei Geraden zu construieren, indem man durch Transformation eine Projectionsaxe zu einer der Geraden parallel macht; in der zugehörigen, d. i. zu ihr normalen Projectionsebene erscheint diese Letztere dann als Punkt und die Transversalen gehen durch denselben.

12) Man bestimme den Normalschnitt eines prismatischen Mantels in wahrer Grösse durch Transformation; eventuell die dritte Kante eines dreieckig gleichseitigen prismatischen Mantels, von welchem zwei schräge Parallelen als Kanten gegeben sind.

13) Von einem geraden fünfseitigen Prisma ist die erste Spur $s_1$ und die Neigung $\alpha_1$ der Grundebene, so wie die Gestalt und Grösse der Grundfläche sammt ihrer

Lage gegen $s_1$, endlich die Höhe $h$ gegeben; man soll dasselbe projicieren, unter Einführung einer neuen zu $s_1$ normalen Projectionsebene. Die Figur 114. zeigt die Ausführung. Man erörtere ihre Beziehung zur Methode der Umlegung.

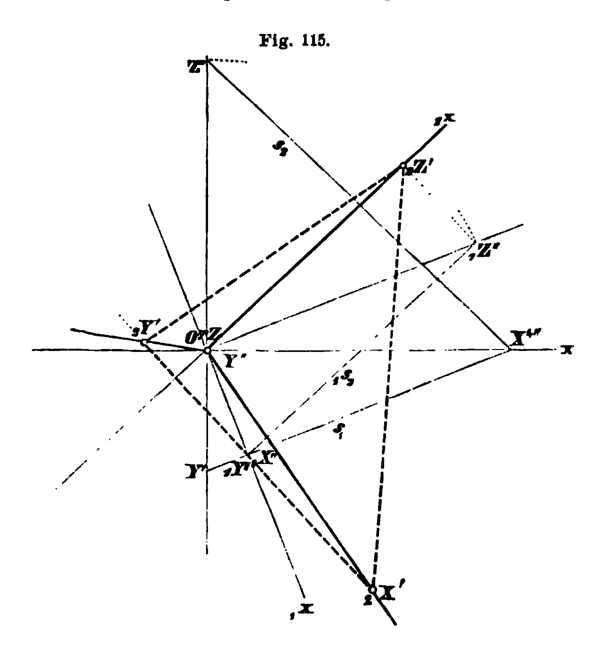
Fig. 114.



60. Die Aufg. 7) des § 58., die auch nach der Methode des vorigen § gelöst werden kann, ist in wenig veränderter Fassung das Problem der Axonometrie. In der Annahme, dass ein beliebiges Raumgebilde durch die Coordinaten seiner Punkte in Bezug auf ein dreirechtwinkliges Axensystem — wir setzen fest mit lothrechter Axe $OZ$, gemäss der practischen Bestimmung des Verfahrens — gegeben sei, kann offenbar seine orthogonale Parallelprojection auf eine in Bezug auf dieses Axensystem gleichfalls bestimmte Ebene ermittelt werden, nämlich in verschiedenen Arten durch Transformation nach den vorigen Entwickelungen. Es ist die Aufgabe der Axonometrie, diess nicht auf dem Umwege der Transformationen, sondern direct zu vollziehen, indem man die Richtungen ermittelt, in

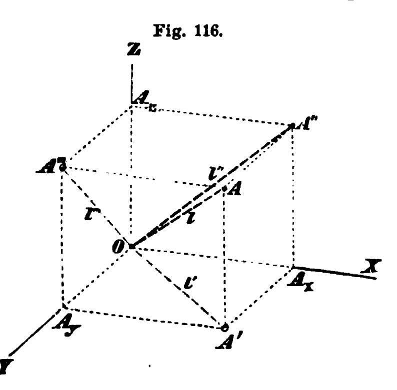
welchen alle Parallelen zu den Coordinatenaxen in dieser Projection erscheinen und die Verkürzungsverhältnisse, welche ihnen respective zukommen. Und diess letztere kann allerdings durch Transformation geschehen, wie es die Figur. 115. zeigt, in der **S** die Ebene

Fig. 115.



der axonometrischen Projection und $O_2X'$, $O_2Y'$, $O_2Z'$ die Axen derselben sind; während die Verhältnisse der Längen $OX : O_2X'$, $OY : O_2Y'$, $OZ : O_2Z'$ die zugehörigen Verkürzungsverhältnisse geben. In der That wäre $A$ (Fig. 116.) die Projection eines Punktes auf die fragliche Ebene, wenn $OX$, $OY$, $OZ$ die Projectionen der drei Coordinatenaxen und $OA_x$, $OA_y$, $OA_z$ die Projectionen der drei vom Anfangspunkte $O$ aus in ihnen aufgetragenen Coordinaten $x$, $y$, $z$

Fig. 116.



des Punktes $A$ repräsentieren — diess bliebe selbst für jede schiefe Parallelprojection unverändert gültig.

Für die Ermittelung der Richtungen der Axenprojectionen und der entsprechenden Verkürzungsverhältnisse für die Orthogonalprojection auf eine beliebige Ebene **S** ist aber auch in § 47., Aufg. 1) alles Nöthige enthalten. Ist $S_x S_y S_z$ das Spurendreieck der Ebene der axonometrischen Projection (Fig. 117.), so ist der Höhenschnittpunkt $N$ desselben die Projection des Anfangspunktes $O$ der Coordinaten und $NS_x$, $NS_y$, $NS_z$ sind die Projectionen der Axen, insbesondere die Projectionen der Axenabschnitte der neuen Projectionsebenen. Man erhält aus der Kenntniss der wahren Längen $OS_z$, $OS_y$, $OS_x$ derselben die Verkürzungsmaassstäbe $cos\beta_1$, $cos\beta_2$, $cos\beta_3$, welche den Coordinaten $z$, $y$, $x$ entsprechen, oder die Winkel $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, welche die Axen $OZ$, $OY$, $OX$ mit der neuen Projectionsebene einschliessen. Das rechtwinklige Dreieck $S_z O A_1$ (Fig. 118.), welches in $N$ den Höhenfusspunkt auf seiner Hypothenuse hat, oder also das Dreieck $NOS_z$ (Fig. 117.) giebt in $OS_z$ die Länge des einen Axenabschnitts und durch die bei $N$ rechtwinkligen Dreiecke $NOS_x$, $NOS_y$ erhält man die Längen der andern $OS_x$, $OS_y$. (Vergl. Fig. 85.)

Fig 117.

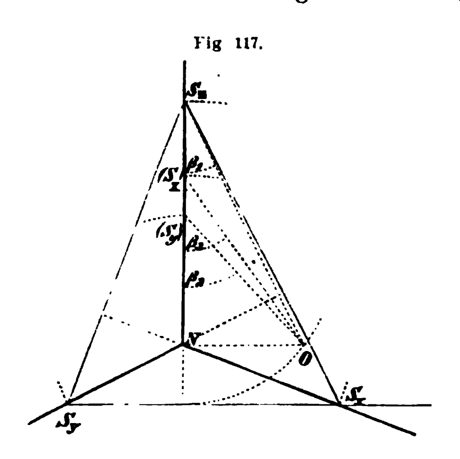
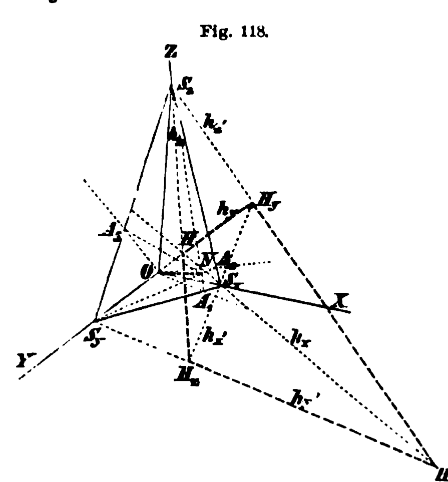


Fig. 118.



Bemerkt man dann, dass die $\beta_i$ die Complemente der Winkel $\alpha_i$ der Projectionsebene $S_x S_y S_z$ gegen die Coordinatenebenen $XOY$, $XOZ$, $YOZ$ sind, so erkennt man (§ 47.), dass ihre Cosinus-Quadrate die Summe zwei geben müssen; oder wenn die Längeneinheit $e$ nach den drei Axen $z$, $y$, $x$ aufgetragen Projectionen von den respectiven Längen $e_1$, $e_2$, $e_3$ giebt, dass

$$e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 2e^2 \text{ und } \cos^2\beta_i = \frac{2e_i^2}{e_1^2 + e_2^2 + e_3^2}$$

ist. Die erste Relation genügt, um das Problem in der der practischen Verwendung am meisten entsprechenden Form zu lösen. (Vergl. Aufg. 1.)

Zugleich knüpft sich daran die einfache Berechnung desselben. Die dreiseitige Ecke vom Scheitel $O$ und den Kanten $ON$, $OS_x$, $OS_y$ oder $O \cdot NS_x S_y$ (Fig. 118.) und analog die Ecken $O \cdot NS_y S_z$, $ONS_z S_x$ — liefert für den durch die Projectionen der Axen $OS_x$, $OS_y$ eingeschlossenen Winkel $S_x N S_y$ oder $\varphi_1$ die Formel

$$\cos\varphi_1 = -\tan\beta_2 \cdot \tan\beta_3 = -\frac{1}{2e_2 e_3}\sqrt{(e_1 + e_3^2 - e_2^2)(e_1^2 + e_2^2 - e_3^2)}$$

und zwei analoge entspringen für $\cos\varphi_2$, $\cos\varphi_3$.

Es ist für die Anwendung besonders bequem, zwischen den drei Projectionen $e_i$ der Längeneinheit $e$ nach den Axen einfache Verhältnisse vorauszusetzen, weil man dadurch im Stande ist, die drei sonst nöthigen Massstäbe durch einen einzigen unter einfachen Reductionen zu ersetzen. Die Resultate für die brauchbarsten Verhältnisse der $e_i$ sind hier tabellarisch zusammen gestellt.

| | $e_1 : e_2 : e_3$ | $\cos\beta_1$ | $\cos\beta_2$ | $\cos\beta_3$ | $\varphi_1$ | $\varphi_2$ | $\varphi_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a) | 1 : 1 : 1 | 0,816 | 0,816 | 0,816 | 120° | 120° | 120° |
| b) | 2 : 1 : 2 | 943 | 471 | 943 | 131° 24½′ | 97° 11′ | 131° 24½′ |
| | 3 : 1 : 3 | 973 | 324 | 973 | 133° 24½′ | 93° 11′ | 133° 24½′ |
| c) | 5 : 4 : 6 | 806 | 645 | 967 | 108° 13′ | 101° 10′ | 150° 37′ |
| | 9 : 5 : 10 | 887 | 493 | 985 | 107° 49′ | 95° 11′ | 157° |
| | 7 : 6 : 8 | 811 | 695 | 927 | 114° 46′ | 106° 59½′ | 138° 14½′ |

Man hat den ersten Fall wegen der Gleichheit der drei Maassstäbe als die isometrische Projection, die Fälle b) nach der Uebereinstimmung zweier Maassstäbe, die vom

dritten Maassstab verschieden sind, als monodimetrische Projectionen benannt und ihnen die letzten Fälle c) als anisometrische Projectionen entgegengesetzt.

Es ist zu bemerken, dass für die isometrische Projection die Projectionsebene normal zu einer der Halbierungsaxen des Coordinatensystems (vergl. § 46.; 4), für die monodimetrischen Projectionen aber normal zu einer der Halbierungsebenen desselben ist (§ 46.; 11) und nur für die anisometrischen eine allgemeine Lage gegen dieses System besitzt. Diess hat zur Folge, dass in isometrischen Projectionen Gerade und Ebenen, die zu jener Halbierungsaxe parallel sind, als Punkte und Gerade respective erscheinen, in monodimetrischen Projectionen aber alle die Ebenen sich als Gerade abbilden, welche jener Halbierungsebene parallel sind. Da Linien und Ebenen von solcher Lage besonders oft an denjenigen Körperformen auftreten, welche eine besonders reiche Symmetrie besitzen, so gewähren die bezüglichen Projectionen für solche nicht vorzugsweise die Bildlichkeit der Darstellung; z. B. also nicht für die Krystallformen des regulären Systems.*)

Bei der practischen Anwendung wird man endlich beachten, dass Darstellungen mit starker Verkürzung der Axe $OZ$, wie im ersten, vierten und sechsten Falle der Tabelle nicht für Gegenstände von solcher Art Verwendung finden sollen, die man nicht wohl z. B. von oben herab unter starker Neigung der projicierenden Strahlen gegen den Horizont sehen kann, weil sonst die Abweichung der axonometrischen Darstellung derselben von dem gewohnten Gesichtsbilde einen Theil ihres Werthes zerstört.

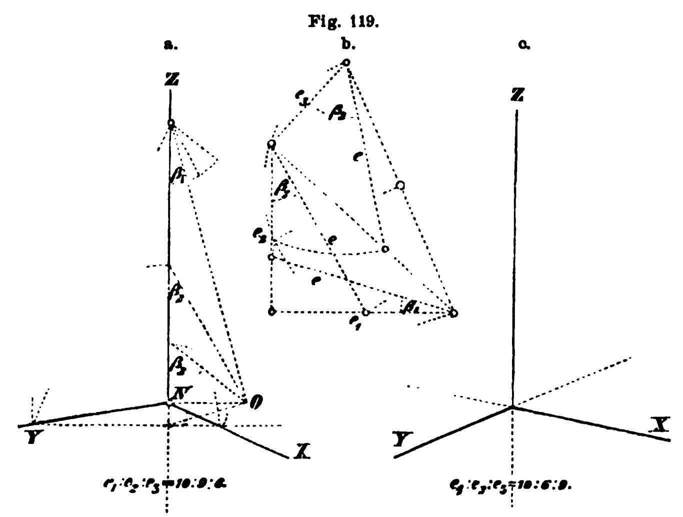
1) Man construiere aus den Verhältnissen der $e_1 : e_2 : e_3$ [Figur 119., a. b. $= 10:9:6$; c. $= 10:6:9$] die $\beta_i$ und das Spurendreieck mit den Axenprojectionen.

Man bildet (Fig. 119., b.) aus $e_1$ und $e_2$ als Katheten ein rechtwinkliges Dreieck und aus der Hypothenuse desselben mit $e_3$ ein zweites, dessen Hypothenuse daher der Durchmesser des Kreises ist, für den die Seite des eingeschriebenen Quadrates die

*) Die Fig. 83. des § 46.; 3, 4 ist nach dem Verhältniss $9:5:10$, die meisten übrigen schematischen Figuren sind nach $2:1:2$ construiert.

Länge $e$ hat. Diese bestimmt als Hypothenuse mit $e_1$, respective $e_2$, $e_3$ als der anliegenden Kathete die Winkel $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, deren cosinus die Verkürzungsverhältnisse sind. Mit denselben bildet man (Fig. 119.; a.) rechtwinklige Dreiecke von einer Kathete $NO$ an der Verticalen $NZ$, schneidet diese Verticale durch die Normale aus $O$ zum schrägen Schenkel von $\beta_1$ und legt durch den Schnittpunkt eine Horizontale, welche von den aus $N$ als Centrum durch die Scheitel von $\beta_2$ und $\beta_3$ beschriebenen Kreisen in Punkten von $NY$ respective $NX$ geschnitten wird. (Vergl. Fig. 117.)

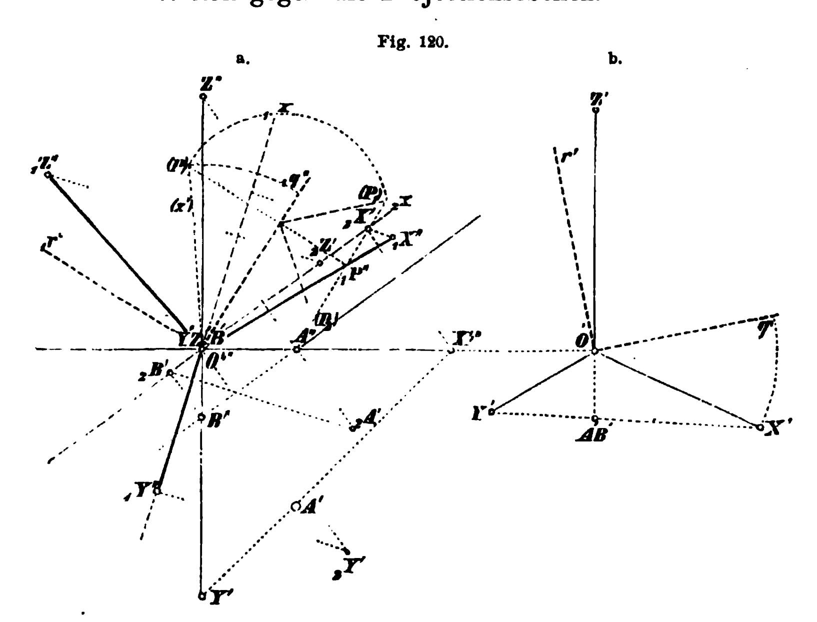
Fig. 119.




2) Die Möglichkeit der axonometrischen Darstellung nach gegebenen $e_i$ fordert, dass die Quadratsumme von zweien derselben grösser sei als das Quadrat des dritten.
3) Welchen Grenzwerthen der $e_i$ entsprechen die Projectionen auf die drei Coordinatenebenen?
4) Die isometrische Projection des Würfels ist das reguläre Sechseck mit seinen Diagonalen. (Vergl. Fig. 106.)
5) Man stelle die Formen des regulären Krystallsystems für gegebene Parameterverhältnisse anisometrisch dar.
6) Man zeichne die axonometrischen Bilder von Kreisen in den drei Coordinatenebenen und aus dem Anfangspunkt als Mittelpunkt.

7) Man zeichne das axonometrische Bild eines Kreises in gegebener Ebene und bei gegebenem Mittelpunkt und Halbmesser — unter Benutzung seines unverkürzten d. h. der Projectionsebene parallelen Durchmessers.
8) Man zeichne axonometrisch die Durchdringung eines regulären Dodekaeders mit einem Tetraeder.
9) Man entwickele nach derselben Methode die orthogonalen Parallelprojectionen von Polyedern mit drei rechtwinkligen Symmetrieaxen bei schräger Lage dieser Letztern gegen die Projectionsebenen.

Fig. 120.




61. Wenn man auch schiefe Parallelprojectionen zulässt (vergl. § 43.; 3), so gilt als höchst bequeme Grundlage der axonometrischen Projection der Satz: Drei Strecken von beliebigen Längen und Richtungen, die in einer Ebene von einem Punkte ausgehen, bilden eine Parallelprojection des Systems von drei gleichlangen zu einander rechtwinkligen und von einem Punkte ausgehenden Axen $OX$, $OY$, $OZ$. Darnach können die Richtungen der Axenbilder und die Verkürzungsverhältnisse

derselben willkürlich angenommen werden — nur dass nicht die drei ersten zusammenfallen und nicht zwei der letztern Null sein dürfen.

Wir denken das Tetraeder $OXYZ$ mit drei gleichlangen zu einander rechtwinkligen Kanten im Raum bestimmt, wie es diess im Falle der Anwendung ist und nehmen an, das Viereck $O'X'Y'Z'$ in der Bildebene (Fig. 120., b.) sei eine Parallelprojection desselben oder genauer gesprochen einer solchen ähnlich (§ 21., c); die Richtung der entsprechenden projicierenden Strahlen bestimmt sich wie folgt: Der Schnittpunkt von zwei Gegenseiten im Bildviereck z. B. von $X'Y'$ und $O'Z'$ ist das Bild $A'$ eines Punktes $A$ in der Diagonale $XY$ und das $B'$ eines Punktes $B$ in der Diagonale $OZ$; die Punkte $A$ und $B$ in $XY$ und $OZ$ respective sind durch die Theilverhältnisse bestimmt, nach welchen sie diese Strecken theilen und welche (§ 21., a) den Theilverhältnissen gleich sind, nach welchen der Punkt $A'B'$ die Strecken $X'Y'$, respective $O'Z'$ theilt. Die Gerade $AB$ im Original erscheint als ein Punkt im Bilde und giebt die Richtung der projicierenden Strahlen an, welche von diesem Original zu diesem Bilde führen.

Legen wir dann durch die Kanten $OX$, $OY$, $OZ$ des Originals die projicierenden Ebenen von der Richtung $R$ von $AB$, so bilden dieselben einen Ebenenbüschel $OR \cdot XYZ$, dessen Schnitt mit der Projectionsebene dem gegebenen Strahlenbüschel $O' \cdot X'Y'Z'$ gleich sein muss. Diess bestimmt die Lagen, welche für die Projectionsebene möglich sind.

Sei das durch die Normalebene zur Scheitelkante aus dem Ebenenbüschel $OR \cdot XYZ$ geschnittene Strahlenbüschel $O \cdot xyz$, so ist das Büschel $O' \cdot X'Y'Z'$ so zu legen, dass $O \cdot xyz$ die Orthogonalprojection desselben ist. Denken wir die entsprechenden Rechtwinkelpaare $q'r'$, $qr$ beider sonach projectivischen Büschel, so giebt die Bemerkung das Mittel zur Bestimmung der Lage der Ebene des Büschels $O' \cdot X'Y'Z'$ oder der Projectionsebene, dass die Orthogonalprojection eines rechten Winkels nur dann ein rechter Winkel ist, wenn einer seiner Schenkel der Projectionsebene parallel ist oder in derselben liegt. Wir ermitteln daher in den durch drei entsprechende Paare bestimmten Büscheln $O' \cdot X'Y'Z'$ und $O \cdot xyz$

die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel $q'$, $r'$ und $q$, $r$ (§ 18.; 4) und bringen $q$ mit $q'$ zur Deckung. Da nun von den spitzen Winkeln $(q, x)$ und $(x, r)$ der eine grösser und der andere kleiner sein muss als der ihm entsprechende Winkel $(q', x')$ respective $(x', r')$, weil die Summe beiderseits einem Rechten gleich ist, also z. B. $\angle(q, x) < \angle(q', x')$, so sind zwei Stellungen der Ebene des Büschels $O' \cdot X'Y'Z'$ möglich, für welche $q'$ in $q$ fällt und zugleich $x'$ in die ihm entsprechende Ebene $ORX$ kommt. Offenbar sind dieselben zur Richtung der projicierenden Strahlen oder zur Ebene $qq'R$ symmetrisch.

Man construiert somit zwei Lagen der Projectionsebene, welche allen Bedingungen genügen. Dieselben fallen in eine zusammen, wenn die Projection eine orthogonale wird.

Die Figur 120. enthält die vollständige Durchführung für das Axenkreuz $O' \cdot X'Y'Z'$. Durch die Theilverhältnisse von $A'$ in $X'Y'$ und von $B'$ in $O'Z'$ (Fig. 120., b.) sind die Punkte $A$, $B$ und die Richtung der projicierenden Strahlen als Richtung der Geraden $A'B'$, $A''B''$ (Fig. 120., a.) bestimmt. Dann ist der Normalschnitt des Ebenenbüschels, welches diese Richtung mit den Coordinatenaxen liefert, auf dem Wege der Transformation ermittelt, indem die Projectionen der Axen auf eine Ebene construiert sind, die zu $AB$ normal ist (Fig. 120., a.); die successiven Transformationen um die Axe $y$ mit der neuen Axe ${}_2x$ und nach ihr um die Axe $z$ mit der neuen Axe ${}_1x$ führen dazu, $O_1X''$, $O_1Y''$ und $O_1Z''$ sind die Endprojectionen und bilden das Büschel des Normalschnitts, das Büschel $O \cdot xyz$ des Vorigen.

Die Rechtwinkelpaare sind $q'$, $r'$; ${}_1q''$, ${}_1r''$ — ihre Construction ist als bekannt unterdrückt — und es ist wie im Vorigen $\angle(q', x') > \angle({}_1q'', {}_1x'')$. Daher ist $\angle(q', x')$ in ${}_1q''\, O(x')$ angetragen und ein Punkt $P$ seines Schenkels $x'$ durch Drehung um $O_1q''$ in die Ebene gebracht, welche in ${}_1x''$ normal zur Tafel ist; $P_1$, $P_2$ sind die beiden in Umlegung eingezeichneten entsprechenden Lagen, deren jede eine Projectionsebene bestimmt, respective $P_1$, ${}_1q''$; $P_2$, ${}_2q''$. Wie man daraus die Richtung der projicierenden Strahlen in Bezug auf die Ebene des Bildes $O' \cdot X'Y'Z'$ erhält, ist evident.

Es ist noch zu bemerken, dass diese Construction die

Rechtwinkligkeit der Coordinatenaxen $OX$, $OY$, $OZ$, die wir voraussetzten, nicht fordert, dass sie also den Satz auch für die Ausmessung in irgend einem schiefwinkligen Axensystem begründet. So ist derselbe die wahrhaft allgemeine Grundlage der Axonometrie. Wenn man das Dreieck der Diagonalpunkte des Vierecks $O'X'Y'Z'$ betrachtet, also das Dreieck der Punkte $X'Y'$, $O'Z'$; $Y'Z'$, $O'X'$; $Z'X'$, $O'Y'$ — so liefert es in der oben entwickelten Weise drei Kanten $AB$, $CD$, $EF$ eines prismatischen Mantels im Tetraeder und die Aufgabe der Bestimmung der Projectionsebene lässt sich auch so aussprechen: Man soll die Lage der Ebenen bestimmen, welche diesen Mantel in einem dem besagten Diagonaldreieck ähnlichen Dreieck schneiden. (Vergl. § 54.; 9.)

Allgemein gefasst ist der Hauptsatz dieses § ein Specialfall der allgemeinen Bestimmung collinearer Systeme. Wir sahen (§ 44.), dass durch fünf Ebenen oder Punkte des einen und die entsprechenden des andern Systems solche bestimmt sind; sollen sie affin sein, so entspricht der unendlich fernen Ebene des einen die unendlich ferne Ebene im andern; zwei Tetraeder, welche Ecke für Ecke einander entsprechen, bestimmen somit zwei affine Systeme. Ist das eine der Systeme eine ebene Abbildung oder ein unendlich dünnes Relief (§ 43.), so haben wir ein Viereck in demselben als entsprechend einem Tetraeder des Originalraums.

1) Man construiere den Normalschnitt des Ebenenbüschels $OR \cdot XYZ$ durch das Spurendreieck und die Höhen desselben für eine zu $OR$ oder $AB$ normale Ebene — durch Umlegung statt durch Transformation.
2) Wenn die Axen $O'X'$ und $O'Z'$ oder $O'Y'$ und $O'Z'$ im Bilde rectangulär sind, so wird die Projectionsebene parallel der Ebene $XOZ$, $YOZ$ respective; man erhält eine hieraus zu erläuternde schiefe Parallelprojection, die man als Cavalierperspective bezeichnet.
3) Nur in der Richtung der projicierenden Strahlen gesehen ist die Darstellung eines Objects nach dem hier entwickelten Verfahren bildlich; die Vortheile, die sie dem Zeichner bietet, sind begleitet von der Gefahr der Verzerrung beim normalen Betrachten.
4) Man erläutere, wie ein gegebenes Tetraeder durch

schiefe Parallelprojection ähnlich einem beliebig gegebenen Viereck abgebildet wird.

5) Man erläutere den Uebergang von einem beliebigen Tetraeder und seinem Bildviereck zu einem solchen mit rechtwinkliger Ecke und gleichlangen Kanten an derselben und dem Bildviereck, welches ihm entspricht.

6) Man bestimme die beiden Stellungen der Ebenen, durch welche aus einem vierseitig prismatischen Mantel von gegebenem Normalschnitt als Parallelogramm Quadrate geschnitten werden; oder allgemeiner Rhomben von gegebenem Winkel.

7) Es ist zu untersuchen, welche Geltung und Bedeutung die Lehre von der Affinität für die Darstellung ebener Systeme (§ 21., a.; § 53.) in der schrägen Parallelprojection besitzt.

8) Die freie axonometrische Darstellung, welche die schiefe Projection gewährt, ist insbesondere geeignet für die Darstellung projectivischer Beziehungen; jeder geänderten Richtung der Beschauung entspricht zwar ein anderes Original zu der dargestellten Figur, aber alle diese Originale haben die projectivischen Eigenschaften mit einander gemein — ebenso wie bei Constructionen der Centralprojection, welche den Distanzkreis nicht fordern, eine Zeichnung für jedes Auge richtig die gleiche Beziehung für unendlich viele individuelle Lagen veranschaulicht. Der besondere Character, welcher die Originale der nämlichen schiefen Parallelprojection verbindet, ist offenbar.

# Zweiter Theil.

## Die constructive Theorie der krummen Linien und Flächen.

### A. Von den Curven und den developpabeln Flächen.

62. Das Studium der Kegelschnitte hat zunächst für Curven, die in einer Ebene liegen, die gleiche Wichtigkeit zweier Erzeugungsweisen und der daraus entspringenden Eigenschaften gezeigt: Der Erzeugung als Ort eines gesetzmässig bewegten Punktes und der Erzeugung als Enveloppe einer gesetzmässig bewegten Geraden, und in Folge dessen der Eigenschaften der Punkte und der Tangenten der Curven. Diese Elemente sind verbunden durch die reciproken (§ 23.; § 33.) Definitionen:

Die Tangente einer Curve als Ort eines bewegten Punktes ist die gerade Verbindungslinie von zwei unendlich nahe benachbarten Lagen desselben. Oder: Wenn eine Gerade sich um einen festen Punkt der Curve so dreht, dass einer von den Punkten, die sie ausser ihm noch mit derselben gemein hat, sich jenem unbegrenzt nähert, so ist die Grenzlage dieser Bewegung die Tangente der Curve in diesem Punkte.

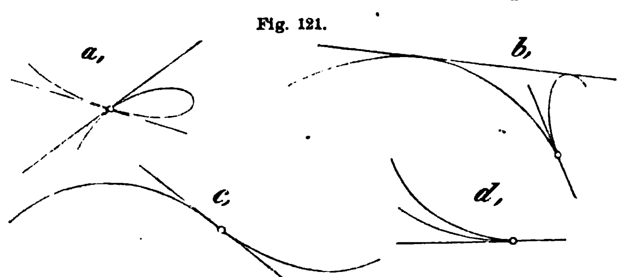
Der Punkt einer Curve als Enveloppe einer bewegten Geraden ist der Schnittpunkt von zwei unendlich nahe benachbarten Lagen derselben. Oder: Wenn ein Punkt sich auf einer festen Tangente der Curve so bewegt, dass eine von den Tangenten, die ausser ihr noch von ihm an die Curve gehen, sich ihr unbegrenzt nähert, so ist die Grenzlage dieser Bewegung der Berührungspunkt der Curve in dieser Tangente.

Mit diesen Arten der Erzeugung der Curven als Ort und als Enveloppe sind folgende regelmässige Singularitäten naturgemäss verbunden:

Der erzeugende Punkt kann zweimal (oder auch mehrmals) durch denselben Punkt der Ebene hindurch gehen und dieser heisst dann ein Doppelpunkt (vielfacher Punkt) der Curve (Fig. 121., a.). Der erzeugende Punkt gelangt im Allgemeinen das erstemal zum Doppelpunkt von einem andern Nachbarpunkte aus als das zweitemal, d. h. die Curve besitzt im Doppelpunkt zwei verschiedene Tangenten.

Die erzeugende Gerade kann zweimal (oder auch mehrmals) mit derselben Geraden der Ebene zusammen fallen und diese heisst dann eine Doppel- (vielfache) Tangente der Curve (Fig. 121., b.). Die erzeugende Gerade gelangt im Allgemeinen daserstemal zur Doppeltangente von einer andern Nachbargeraden aus als das zweitemal, d. h. die Curve besitzt in der Doppeltangente zwei verschiedene Berührungspunkte.

Fig. 121.




Wenn aber der zweite Durchgang unmittelbar nach dem ersten stattfindet, und der Punkt, von welchem aus der beschreibende Punkt zum Doppelpunkt gelangt, der nämliche ist, wie der, zu dem hin er von ihm aus geht, so nennt man diesen Punkt insbesondere einen Rückkehr-, Cuspidal- oder stationären Punkt (Fig. 121., b. d.).

Wenn aber das zweite Zusammenfallen unmittelbar nach dem ersten stattfindet, und die Gerade, von welcher aus die beschreibende Gerade zur Doppeltangente gelangt, die nämliche ist, wie die, zu der hin sie von ihr aus geht, so nennt man diese Tangente insbesondere eine Wende-, Inflexions- oder stationäre Tangente (Fig. 121., c.).

Die letztere Benennung beruht auf folgender Anschauung:

Der erzeugende Punkt schreitet mit einer gewissen veränderlichen Geschwindigkeit in der Tangente fort, indess diese gleichförmig ihre Richtung ändert, von einer seiner Lagen zur nächsten unendlich wenig. Wird die Geschwindigkeit seines Fortschreitens in irgend einem Momente Null und ändert er dann den Sinn der Bewegung in der Tangente, so ist der entsprechende Punkt ein stationärer Punkt und die entsprechende Tangente die zugehörige Rückkehrtangente.

Die erzeugende Gerade dreht sich mit einer gewissen veränderlichen Geschwindigkeit, indess der Berührungspunkt in ihr gleichförmig fortschreitet, von einer ihrer Lagen zur nächsten unendlich wenig. Wird die Geschwindigkeit ihrer Drehung in irgend einem Momente Null und ändert sie dann den Sinn der Drehung, so ist die entsprechende Tangente eine stationäre Tangente und der entsprechende Berührungspunkt der zugehörige Wendepunkt.

Wenn das Bewegungsgesetz des Punktes respective der Tangente algebraisch, d. i. durch eine Gleichung von bestimmtem Grade zwischen den Coordinaten des Punktes oder der Tangente ausdrückbar ist (algebraische Curven), so ist die Zahl der Punkte, die sie mit einer Geraden ihrer Ebene, respective die Zahl der Tangenten, die sie mit einem Punkte ihrer Ebene gemein haben kann, begrenzt, oder wenn man nicht nur die reellen sondern auch die nicht reellen Lösungen ihrer und der bezüglichen linearen Gleichung zählt, bestimmt, nämlich dem Grade der Gleichung in Punkt- oder Linien-Coordinaten gleich; man nennt diese Zahl die Ordnung $\mu$, respective die Classe $\nu$ der Curve.*)

---

*) Zugleich bestehen zwischen den Zahlen $\mu$, $\nu$ und den Anzahlen der Doppelpunkte $\delta$, der Doppeltangenten $\tau$, der Rückkehrpunkte $\varkappa$, der Inflexionstangenten $\iota$, Relationen, die man nach ihrem Entdecker die Plücker'schen Formeln nennt; wir geben sie in der sich leicht einprägenden Form

$$\nu = \mu(\mu - 1) - 2\delta - 3\varkappa, \quad \mu = \nu(\nu - 1) - 2\tau - 3\iota, \quad \iota - \varkappa = 3(\nu - \mu).$$

Höchst wichtig hat sich neueren Untersuchungen die Zahl

$$p = \frac{(\mu - 1)(\mu - 2)}{2} - \delta - \varkappa = \frac{(\nu - 1)(\nu - 2)}{2} - \tau - \iota$$

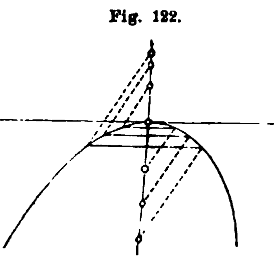
Diese analytische Betrachtungsweise (vergl. Abschnitt *E*) unten) führt dann auch auf die Existenz von isolierten Punkten, d. i. von Doppelpunkten, durch die nur nicht reelle Curvenäste und daher nicht reelle Tangenten gehen; etc. Wir werden der geometrischen Entstehung solcher Elemente bei der Betrachtung der Flächen begegnen.

Der Kreis, welchen ein Punkt der Curve mit dem vorhergehenden und dem nächstfolgenden Nachbarpunkte derselben bestimmt, heisst der Krümmungskreis der Curve für diesen Punkt (§ 36.). Er geht für die Inflexionsstellen der Curve in die entsprechende Inflexionstangente selbst, als einen Kreis mit unendlich grossem Halbmesser, für jeden Rückkehrpunkt in diesen selbst als einen Kreis mit dem Halbmesser Null über.

1) Wenn das geometrische Gesetz einer Curve nicht bekannt und keine Construction ihrer Tangente anzugeben ist, aber die Curve gezeichnet vorliegt, so soll man a) für eine gegebene Tangente den Berührpunkt, b) für einen gegebenen Punkt der Curve die Tangente, c) für einen solchen Punkt den Krümmungskreis bestimmen, d) die Normale zur Curve von einem gegebenen Punkte ausser ihr construieren.

a) Man ziehe (Fig. 122.) zur Tangente parallel und ihr sehr nahe Secanten, lege durch die Enden *A*, *B* von jeder derselben Parallelen von entgegengesetztem Sinn, die man ihr selbst (oder einem bestimmten Theile von ihr) gleich macht; die durch die so erhaltenen Endpunkte bestimmte Curve muss durch den Berührungspunkt *P* gehen.

Fig. 122.

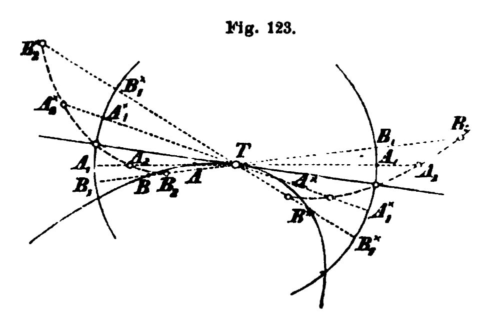


b) Man beschreibe (Fig. 123.) aus dem Punkte *T* als Centrum einen Kreis *K* und ziehe durch ihn

erwiesen, nach welcher man die Curven in Geschlechter theilt — nach den Abel'schen Integralen, welche ihnen entsprechen. Alle diese Formeln können hier nur erläutert, aber nicht entwickelt werden.

Gerade, welche in der Nähe die Curve zum zweitenmale schneiden und zwar auf der einen Seite nach $A$, $B$, $\cdots$, auf der andern nach $A^*$, $B^*$, $\cdots$, markiere aber überdiess ihre Schnitte $A_1$, $B_1$, $\cdots$ mit dem Kreise $K$; man trage dann die Längen $TA$, $TB$, $\cdots$ von $A_1$, $B_1$, $\cdots$

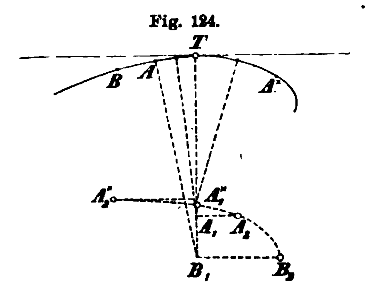
Fig. 123.



auf die Geraden nach $P$ hin und ebenso $TA^*$, $TB^*$, $\cdots$ von $A_1$, $B_1$, $\cdots$ auf die entsprechenden Geraden von $T$ weg auf und verbinde die Endpunkte $A_2$, $\cdots$; $A_2^*\cdots$ durch eine Curve; dieselbe schneidet den Kreis $K$ in einem Punkte der Tangente von $T$.

c) Man zeichne (Fig. 124.) die Normale der Curve in $T$ als rechtwinklig zur bezüglichen Tangente; lege dann von $T$ aus Sehnen der Curve nach $A$, $B$, $\cdots$ einerseits und $A^*$, $B^*$, $\cdots$ anderseits, verlängere ihre

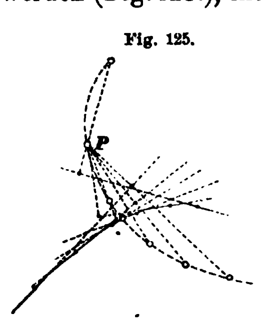
Fig. 124.



senkrechten Halbierungslinien bis zur Normale und trage auf dort zur Normale errichtete Perpendikel die Längen $TA_1$, $\cdots$; $TA^*$, $\cdots$ zur einen und zur andern Seite auf; die Curve der so erhaltenen Punkte schneidet die Normale im Krümmungsmittelpunkte.

d) Die Normale von einem Punkte $P$ ausserhalb kann durch ihren Fusspunkt $N$ in der Curve ermittelt werden (Fig. 125.), indem man denselben als der Curve mit einer andern Curve gemeinsam characterisiert, welche durch die Fusspunkte der Normalen von $P$ auf die Tangenten von jener hindurchgeht. Sie sind Berührungspunkte von beiden. Als Schnittpunkte erhält man sie, wenn man die Abstände von Berührungspunkt und Normalenfusspunkt in der Tangente je nach ihrem Sinne in der Normale von $P$ zur Tangente vom Fusspunkt in der Letztern aus abträgt. Diese Curve geht auch durch $P$.

Fig. 125.




2) Der Krümmungskreis durchsetzt die Curve in seinem Berührungspunkte; die Wendetangente zeigt damit den Character des Krümmungskreises.

3) Eine Curve dritter Ordnung kann nicht mehr als einen Doppelpunkt oder einen Rückkehrpunkt haben; sie ist dann von der vierten respective dritten Classe; sie lässt keine Doppeltangente zu, weil diese vier Punkte mit ihr gemein hätte; also ist im ersten Falle die Zahl der Inflexionstangenten $\iota = 3$, im letzten $\iota = 1$. Denn $\nu = 6 - 2\delta - 3\varkappa$, $3 = \nu(\nu - 1) - 3\iota$, $\iota - \varkappa = 3\nu - 9$ geben

a) für $\delta = 1$, $\varkappa = 0$, $\nu = 4$, $\iota = 3$;
b) für $\delta = 0$, $\varkappa = 1$, $\nu = 3$, $\iota = 1$.
Dazu tritt c) für $\delta = 0$, $\varkappa = 0$, $\nu = 6$, $\iota = 9$.

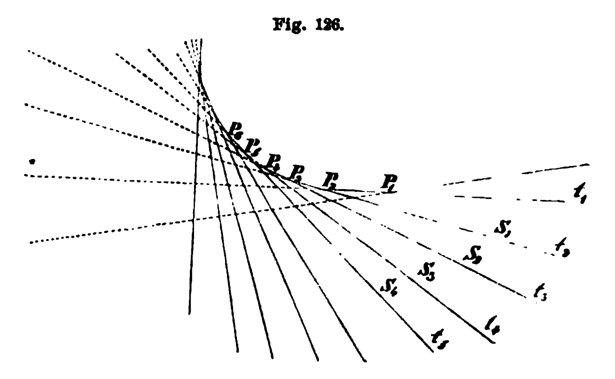
4) Eine Curve der Ordnung $\mu$ hat im Allgemeinen $\mu$ unendlich ferne Punkte und demgemäss $\mu$ nach diesen hingehende unendliche Aeste, dazu auch $\mu$ Asymptoten als die zugehörigen Tangenten; dieselben können in Paaren nicht reell sein.

5) Jeder Berührung der Curve mit der unendlich fernen Geraden ihrer Ebene entspricht ein parabolischer Ast derselben.

6) Jede Projection einer ebenen Curve ist eine Curve derselben Ordnung und Classe und mit denselben Singularitäten, wie sie selbst; die Projection eines Doppelpunktes ist ein Doppelpunkt der Projection, etc. Für jede Parallelprojection sind auch die Projectionen der Asymptoten die Asymptoten der Projection. Wie gestaltet sich diess für eine centrale Projection? (Vergl. § 26.)

63. Fassen wir eine nicht ebene Curve (gewundene, doppelt gekrümmte Curve, Raumcurve) zunächst als den Ort eines bewegten Punktes $P$ auf, so liefern die geraden Verbindungslinien der aufeinander folgenden unendlich nahe benachbarten Lagen $P_1, P_2, P_3, \cdots$ desselben, d. h. die Geraden $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \cdots$ die Tangenten der Curve in $P_1, P_2, P_3, \cdots$ (Fig. 126.) und die Verbindungsebene von je zwei aufeinander folgenden Tangenten $P_1P_2, P_2P_3; P_2P_3, P_3P_4; \cdots$ oder von je drei auf einander folgenden Punkten

Fig. 126.



$P_1P_2P_3, P_2P_3P_4, \cdots$ die Schmiegungsebenen oder Osculationsebenen der Curve. Die zwischen den bezüglichen Nachbartangenten in diesen Ebenen gelegenen Flächenstreifen unendlich kleiner Winkel (Contingenzwinkel) bilden eine Fläche, die man die developpable Fläche der Curve nennt (Tangentenfläche derselben); developpabel, weil sie offenbar durch successive Ueberführung jedes dieser Streifen in die Ebene des folgenden und mit diesem in die des dritten, vierten, etc. ohne Trennung des Zusammenhangs und ebenso ohne Faltung in eine Ebene übergeführt werden kann.

Eine Biegung oder Transformation in andere developpable Flächen ist auf demselben Wege möglich oder kann indirect durch die Entwickelung in die Ebene und Rückbiegung vermittelt werden.

Die Tangenten der Raumcurve werden als erzeugende Gerade und die Schmiegungsebenen derselben als Tangentialebenen der developpabeln Fläche benannt; und die letztere Benennung hat ihren Grund darin, dass jede Gerade in einer solchen Schmiegungsebene zwei unendlich nahe Nachbarpunkte mit der Fläche gemein hat, d. h. als Tangente derselben zu betrachten ist. Die Tangenten der developpabeln Fläche in allen Punkten einer Erzeugenden bilden die zugehörige Schmiegungsebene der Raumcurve, dieselbe berührt die developpable Fläche in allen Punkten dieser Erzeugenden.

Sonach erzeugt die Bewegung eines Punktes, bei welcher derselbe aus jeder seiner Lagen in eine einzige bestimmte nächstfolgende, d. i. von ihr unendlich wenig abweichende Lage übergeht, die Raumcurve als Ort, die Bewegung einer Ebene, die aus jeder ihrer Lagen in eine bestimmte einzige nächstfolgende Lage übergeht, die developpable Fläche als Enveloppe; im ersten Falle geben die Verbindungsgeraden benachbarter Punkte, im letztern Falle die Durchschnittsgeraden benachbarter Ebenen die Tangenten der Curve und die Erzeugenden der developpabeln Fläche. Die Curve hat die Verbindungsebenen von je drei Nachbarpunkten zu Schmiegungsebenen und die Durchschnittspunkte von je drei Nachbarebenen zu Punkten.

Denken wir die Schmiegungsebene in einer Anfangslage mit der zugehörigen Tangente und dem entsprechenden Punkte der Curve, so entspricht der Drehung dieser Ebene die Drehung der Tangente in ihr und das Fortrücken des Punktes in dieser und umgekehrt der Bewegung des letztern die Bewegungen der ersteren. Bleibt bei der Bewegung des Punktes derselbe einen Moment in Ruhe, so dass zwei folgende Punkte sich decken, also drei folgende Tangenten und vier folgende Schmiegungsebenen durch einen Punkt gehen, so nennt man solchen Punkt einen stationären Punkt. Und wenn bei der Bewegung der Ebene dieselbe einen Moment stillsteht, so dass

zwei auf einander folgende Schmiegungsebenen sich decken, also drei folgende Tangenten und vier folgende Punkte in einer Ebene liegen, so nennt man diese Ebene eine stationäre Ebene. Diese Anschauungen werden sich an den Beispielen weiter erläutern. Doppelpunkte, etc. erscheinen nicht als regelmässige Singularitäten der Raumcurven aus sehr einfachem Grunde. Aber wir können von der Darstellung eines Doppelpunktes und einer Doppeltangentialebene aus die Anschauung eines stationären Punktes und einer stationären Ebene verdeutlichen. Gehen durch den Doppelpunkt $P$ die zwei Zweige der Curve mit den Nachbarpunkten $P_2$, $P_1$ der eine und $P_2^*$, $P_1^*$ der andere, so sind $P_2P$, $P_2^*P$ die Tangenten und $P_1P_2P$, $P_1^*P_2^*P$ die Schmiegungsebenen für denselben. Dem Zusammenfallen der Tangenten $P_2P$, $P_2^*P$ entspricht der stationäre Punkt.

Die Doppeltangentialebene wird ebenso zur stationären Ebene, wenn die beiden Erzeugenden, längs deren sie berührt, zu Nachbarn in der developpabeln Fläche werden.

Behalten wir den Begriff des Krümmungskreises bei, wie er für ebene Curven festgesetzt ist, so fügen wir doch hier naturgemäss den weitern Begriff einer Schmiegungskugel hinzu, d. h. der Kugel durch vier auf einander folgende unendlich nahe Punkte der Curve. Für die stationären Elemente wird sie zum Punkt, respective zur Ebene.

Zu eingehenderer Betrachtung der Raumcurven soll uns ihr Auftreten in bestimmten Fällen führen.

1) Soll eine Fläche developpabel sein, so muss sie durch die Bewegung einer Geraden entstehen können, welche in jeder ihrer Lagen von der nächstfolgenden Lage geschnitten wird; am einfachsten wird dieser Bedingung genügt, wenn die erzeugende Gerade sich um einen festen Punkt dreht.
2) Die developpable Fläche einer ebenen Curve ist ihre Ebene selbst.
3) Der Kreis der Schmiegungskugel, welcher in der zugehörigen Schmiegungsebene liegt, ist der entsprechende Krümmungskreis der Curve.
4) Die Krümmungsradien einer gewundenen Curve ändern sich bei der Entwickelung derselben mit ihrer

developpablen Fläche nicht. Den stationären Elementen derselben entsprechen immer wieder stationäre Elemente der Transformierten.

5) Die Projection der Tangente einer Raumcurve ist die Tangente ihrer Projection in der gleichnamigen Projection ihres Berührungspunktes.

6) Projiciert man central oder parallel eine Raumcurve auf die Schmiegungsebene eines ihrer Punkte $P$, so hat diese Projection für den Punkt $P$ denselben Krümmungskreis wie die gegebene Curve.

7) Die Schmiegungsebene der Raumcurve ist die Tangentialebene der developpabeln Fläche längs der zugehörigen Tangente der Curve; die dem Punkte $P$ der Curve entsprechende enthält also die Tangente $t$ der Curve in $P$ und die Tangente derjenigen Curve im Durchstosspunkt $S_i$ von $t$, welche die gleichnamigen Durchstosspunkte der Tangenten der Raumcurve in den vor $P$ und nach $P$ folgenden Punkten enthält.

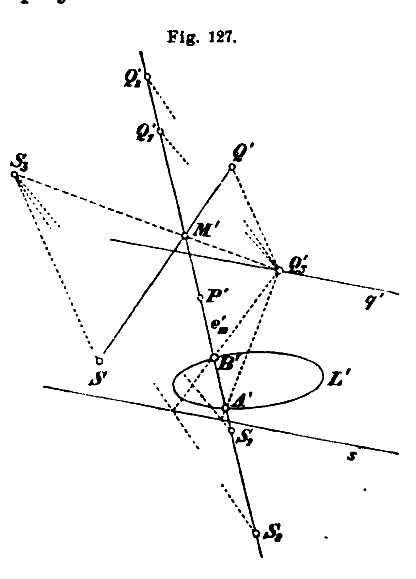
64. Die einfachste Art eine developpable Fläche hervorzubringen, besteht nach dem Vorigen darin, dass man eine gerade Linie sich um einen festen Punkt drehen und zugleich längs einer festen Curve gleiten lässt. Solche Flächen nennt man Kegelflächen, der feste Punkt wird als Spitze oder Mittelpunkt, die feste Curve als Leitcurve, die Gerade als Erzeugende, insbesondere auch in jeder ihrer Lagen als eine Kegelseite bezeichnet. Im Falle, dass der feste Punkt unendlich fern liegt, heisst die Fläche eine Cylinderfläche; er ist die Richtung ihrer Erzeugenden. Denkt man die Tangenten der Leitcurve mit der Spitze durch Ebenen verbunden, so umhüllen diese die nämliche Kegelfläche; jede von ihnen ist die Tangentialebene derselben längs der Erzeugenden, welche den Berührungspunkt der Tangente in der Leitcurve mit der Spitze verbindet.

Die Kegelfläche ist wesentlich unbegrenzt diesseits und jenseits der Spitze $M$; man kann sie als aus zwei Hälften aus den beiden einfachen Kegelflächen auf der einen und der andern Seite der Spitze zusammengesetzt denken.

Die Leitcurve kann als ebene Curve vorausge-

setzt werden, da ein ebener Schnitt, der die Spitze nicht enthält, mit der Erzeugenden in jeder Lage einen und nur einen Punkt gemein hat. (Für die Fortsetzung der Betrachtung über die gewundenen Leitcurven vgl. namentlich §. 78. f.) Wir nehmen an, die Kegelfläche sei durch eine ebene Leitcurve $L$ und die Spitze $M$, die Cylinderfläche durch eine ebene Leitcurve und die Richtung der Erzeugenden bestimmt. Insbesondere wird in Centralprojection die Leitcurve durch ihr Bild $L'$ und ihre Ebene $sq'$ und die Spitze durch ihr Bild $M'$ und eine sie enthaltende Gerade $SQ'$ gegeben sein; in Parallelprojection wird die Leitcurve durch zwei Spuren $s_1$, $s_2$ ihrer Ebene und z. B. ihre erste Projection $L'$ — oder ihr axonometrisches Bild, etc. — die Spitze aber durch ihre Projectionen $M'$, $M''$, etc. gegeben sein; die Abweichungen für die Cylinderflächen sind evident. Dann kann jede Erzeugende $e$ der Fläche, jeder Punkt $P$ und die entsprechende Tangentialebene $\mathbf{T}$ der Fläche projiciert werden.

Fig. 127.




a) Ist $e'$ das Bild der Erzeugenden (Fig. 127.), so repräsentiert diess Bild beispielsweis zwei Erzeugende $e_1$, $e_2$, die die Leitcurve $L$ in den in $A'$, $B'$ respective abgebildeten Punkten treffen und durch $M$, $A$, respective $M$, $B$ bestimmt sind; $S_1$, $S_2$ sind ihre Durchstosspunkte, $Q_1'$, $Q_2'$ die entsprechenden Fluchtpunkte.

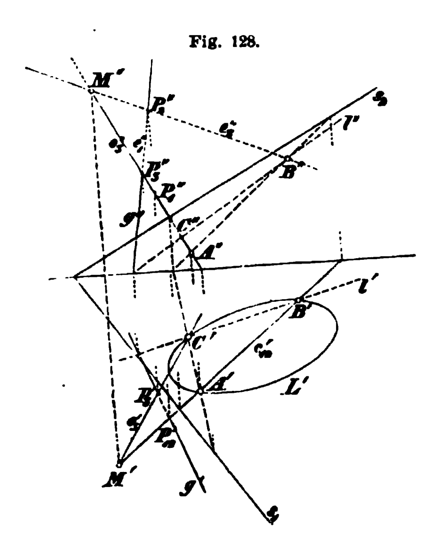
Ist in Fig. 128. $e_{12}'$ die erste Projection, so schneidet die Erzeugende die Leitcurve entweder in $A$ oder in $B$, deren erste Projectionen die Schnitte von $e'$ mit $L'$ sind, so dass ihre zweiten Projectionen und damit $e_1''$, $e_2''$ sich ergeben; wäre dagegen $e_1''$ ihre zweite Projection, so schneidet sie $L$ in den beiden Punkten

$A$ und $C$, welche derjenigen Geraden der Ebene von $L$ angehören, die mit $e_1$ dieselbe zweite Projection hat, und damit sind ihre ersten Projectionen $e_1'$, $e'_2$ bestimmt.

b) Ist das Bild eines Punktes $P$ der Kegelfläche in Centralprojection oder eine seiner Parallelprojectionen, z. B. $P'$ gegeben, so bestimmt man diesen Punkt mittelst der Erzeugenden $MP$, von welcher respective ihr Bild oder die eine ihrer Parallelprojectionen bekannt ist, nach dem Vorigen.

c) Man bestimmt damit auch die Schnittpunkte einer geraden Linie $g$ mit der Kegelfläche $M, L$; denn durch jeden derselben geht eine Erzeugende $e_1$ der Fläche und alle diese Erzeugenden müssen sowohl $M$ enthalten als $g$ schneiden, also in der durch $M$ und $g$ bestimmten Ebene liegen. Wenn diese Ebene die Ebene der Leitcurve $L$ in einer Geraden $l$ schneidet (Fig. 128.), so liegen in dieser die Punkte der Leitcurve, nach welchen jene Erzeugenden $e_1$ hingehen und diese Letzteren sind somit bestimmt. Sie liefern durch ihren Schnitt mit $g$ die Punkte $P_1$. Die Figur zeigt $P_2$, $P_3$ als Schnittpunkte der Kegelfläche $M$, $L$ mit der Geraden $g$.

Fig. 128.

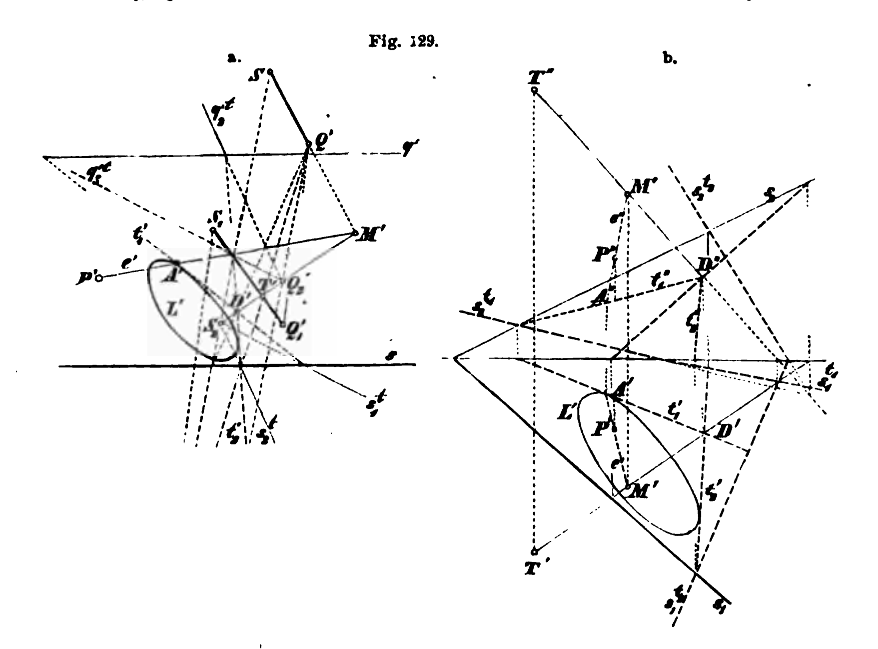



d) Die Tangentialebene der Kegelfläche im Punkte $P$ und in allen Punkten der Erzeugenden $MP$ ist bestimmt durch diese Erzeugende $MP$ oder $e$ selbst und die Tangente $t$ der Curve $L$ in dem Punkte $A$, welchen $MP$ mit dieser Curve gemein hat.

e) Die Construction der Tangentialebenen der Kegelfläche durch einen beliebigen Punkt $T$ des Raumes oder parallel einer gegebenen Geraden $g$ ergiebt sich daraus; da sie die Gerade aus der Spitze $M$

nach dem Punkte $T$ (Fig. 129., a. u. b.) oder in der Richtung von $g$ enthalten müssen, so verlängert man diese bis zum Schnittpunkt $D$ mit der Ebene der Leitcurve $L$ und zieht von $D$ aus an $L$ die möglichen Tangenten $t_1, t_2, \cdots$ Jede derselben bestimmt mit $MT$ oder $MD$

Fig. 129.



zusammen eine der Aufgabe entsprechende Tangentialebene.

f) Denkt man auf der Kegelfläche eine Reihe von Punkten $P_1, P_2, \cdots$, welche eine Curve $C$ bilden, sämmtlich durch die eine ihrer Projectionen — die somit die eine Projection von $C$ bilden — gegeben, so kann man diese Punkte und damit die Curve $C$ als dadurch bestimmt ansehn und insbesondere ihre anderen Projectionen ermitteln. Jede Raumcurve wird durch ihr Bild oder ihre Projection und ihre Lage auf einer gegebenen Kegel- oder Cylinderfläche bestimmt.

g) Einen besondern Eall dieser Art bilden die in den Projectionsebenen gelegenen Leitcurven, die man als

die erste, zweite, dritte Spur der Fläche im Falle der Parallelprojection bezeichnet. Man bestimmt durch die Bemerkung, dass für jede derselben zwei ihrer Projectionen in die ihrer Ebene angehörigen Axe fallen, — die letzte mit der Spur selbst identische Projection derselben; also z. B. die erste Spur $S_1$ aus der Bemerkung, dass ihre zweite Projection in der Axe $x$ liegt, indem man zu den Punkten dieser Axe als zu zweiten Projectionen von Punkten der Kegelfläche die ersten Projectionen sucht. Die zweckmässigste Methode dafür siehe in § 66.; vergl. Fig. 135. in § 66.; 1.

Die Spuren bieten die zur Bestimmung der Kegel und Glieder-Flächen bequemsten Leitcurven dar, weil jede derselben durch die eine mit ihr selbst zusammenfallende Projection gegeben ist (vergl. § 51.), da ihre andern Projectionen in die anliegenden Axen fallen. Durch Transformation kann jede ebene Leitcurve zu einer Spur der Fläche gemacht werden (vergl. § 59.).

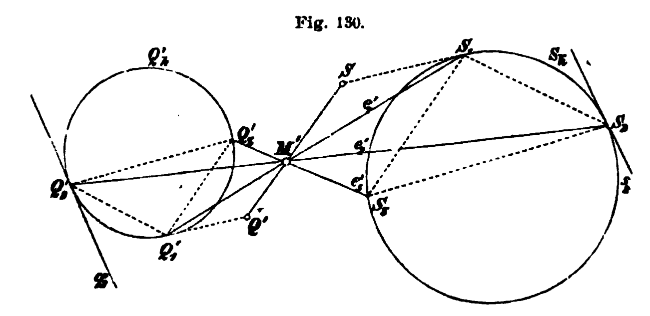
1) Die Spuren einer Kegelfläche sind die Oerter der gleichnamigen Durchstosspunkte der Erzeugenden und zugleich die Enveloppen der gleichnamigen Spuren der Tangentialebenen der Fläche; im Falle der Centralprojection definiert sich ebenso die Spur der Fläche in der Bildebene.

2) Der Ort der Fluchtpunkte der Erzeugenden und zugleich die Enveloppe der Fluchtlinien der Tangentialebenen der Kegelfläche ist die Fluchtcurve derselben. Weil alle Erzeugenden und alle Tangentialebenen durch den festen Punkt $M$, die Spitze, gehen, (§ 6.; 5. und § 7.) so sind Spur- und Flucht-Curve desselben Kegels in einer Centralprojection einander ähnlich und ähnlich gelegen (Fig. 130.), für das Bild der Spitze als Aehnlichkeitspunkt. (§ 21., c.) Die Bestimmung der Kegelflächen entspricht der Bestimmung entsprechender Curven in ähnlichen Systemen von ähnlicher Lage aus der einen, dem Centrum und dem einen Paar ent-

sprechender Punkte, nebst ihren Specialfällen.

3) Man verzeichne die Centralprojection durch Spur, Fluchtcurve und Spitze a) für einen Kegel, dessen Spitze in der Bildebene liegt — man unterscheidet dabei, ob die Spur aus reellen Geraden oder nur der Spitze besteht; b) für einen Kegel, dessen Spitze in der zweiten Parallelebene enthalten ist; c) für einen, dessen Spitze in der Verschwindungsebene liegt; d) für einen Cylinder; e) für einen Kegel, dessen Spitze zwischen Bildebene und Verschwindungsebene oder f) vor der Verschwindungsebene gelegen ist.

Fig. 130.



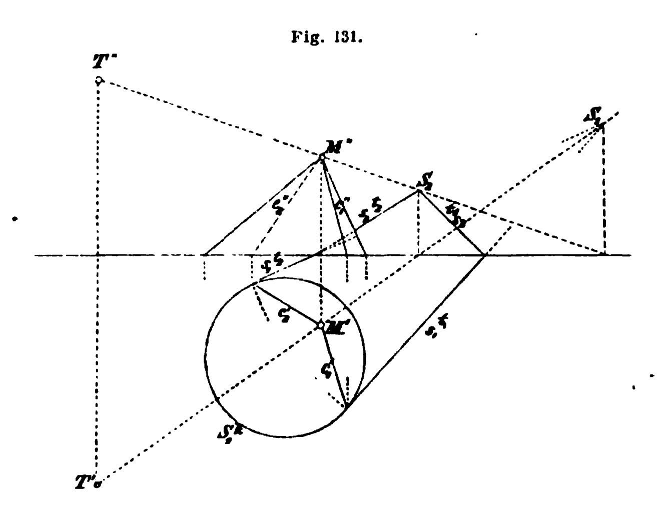
4) Wenn man die ersten und zweiten Projectionen der Erzeugenden einer Kegelfläche bis zum jedesmaligen Durchschnittspunkt verlängert, so erhält man (§ 53.) als die Aufeinanderfolge dieser Punkte die vereinigte erste und zweite Projection der Curve, welche diese Kegelfläche mit der Halbierungsebene $\mathbf{H}_{x'}$ gemein hat. Diese Curve $L_{x'}$ oder die analoge $L_{z'}$ in $\mathbf{H}_{z'}$ für die zweite und dritte Projection kann als Leitcurve gleichfalls mit Vortheil verwendet werden.

5) Man bestimme die Durchschnittspunkte $D_1, D_2, \cdots$ einer Geraden $g$ oder $SQ'$ mit der durch Spitze und Spur gegebenen Kegelfläche in Centralprojection — indem man die Parallele zu $g$ aus der Spitze $M$ construiert. Ebenso für die Kegelfläche $M, L_{x'}$. (Vergl. 4.) Man vergleiche diese Construction mit der centralprojectivischen Bestimmung einer Geraden für das Centrum $M$ und die Ebene der Leitcurve als Bildebene.

6) Man construiere in Orthogonalprojection für drei rechtwinklige Ebenen diejenigen Punkte einer durch Spitze und ebene Leitcurve gegebenen Kegelfläche, welche drei zusammenfallende Projectionen haben. (§ 53.)

7) Man verzeichne die Spuren $s_i'$ der Tangentialebenen einer durch Spitze $M$ und erste Spur $S_1$ gegebenen Kegelfläche aus dem Punkte $T$. Dieselben bilden die der Kegelfläche entsprechenden Schlagschattengrenzen in den Projectionsebenen für Licht aus dem Punkte $T$; die Berührungs-Erzeugenden sind die Grenzen des Selbstschattens. (Fig. 131.)

Fig. 131.



8) Ebenso und insbesondere für die durch die Leitcurve $L_{x'}$ in $\mathbf{H}_{x'}$ und die Richtung ihrer Erzeugenden gegebene Cylinderfläche die Spuren der Tangentialebenen, welche einer Geraden $g$ parallel sind.

9) Die Grenzlagen der von einer Projection der Spitze ausgehenden, die gleichnamige Projection der Leitcurve treffenden Geraden bilden die Grenzen oder Umrisse der Kegelfläche in der betreffenden Projection. In dem von ihnen ausgeschlossenen Theil der Projectionsebene kann kein Punkt der Fläche seine gleichnamige Projection haben. Man spricht in diesem Sinne von einem ersten, zweiten etc. Um-

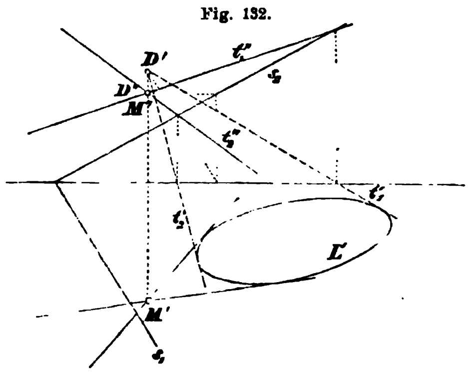
riss der Kegelfläche, ebenso von ihrem Umriss in Centralprojection.

10) Wenn die Leitcurve eine geschlossene Curve ist, so fallen die Umrisse in die Tangenten, welche von den Projectionen der Spitze an die gleichnamigen Projectionen der Leitcurve gehen. In welchem Falle bedeckt eine Projection der Kegelfläche die ganze Tafel?

11) Bei geschlossener Leitcurve sind die Umrisse der Kegelfläche in Parallelprojection die Spuren solcher Tangentialebenen derselben, welche zugleich projicierende Ebenen sind, in den zu ihnen normalen Projectionsebenen; sie enthalten also die Richtung der zu dieser Projectionsebene normalen Geraden.

Man bestimmt somit die zweiten Umrisse einer durch die erste und zweite Projection der Spitze $M$ und die erste Projection einer ebenen Leitcurve $L$ in der durch ihre zwei ersten Spuren $s_1$, $s_2$, gegebenen Ebene **E** bestimmten Kegelfläche (Fig. 132.), indem

Fig. 132.




man den Durchschnittspunkt $D$ der zur Axe $OY$ parallelen Geraden aus $M$ mit der Ebene **E** bestimmt, von seiner ersten Projection $D'$ an $L'$ die äussersten Tangenten $t_1'$, $t_2'$ zieht und die zweiten durch $M''$ gehenden Projectionen derselben $t_1''$, $t_2''$ angiebt; diese sind die gesuchten Umrisse.

12) Wie werden die Umrisse gefunden, wenn die Fläche durch zwei Projectionen der Spitze $M$ und eine Spur gegeben ist?

13) Welche Regel ergiebt sich für die Verzeichnung der Umrisse in Centralprojection? Ist dieselbe davon abhängig, ob die Bestimmung durch eine ebene Leitcurve $L$ oder insbesondere durch eine Spur geschieht?
14) Man soll eine Kegelfläche so bestimmen, dass sie keinen Umriss hat — a) in Centralprojection, b) in Parallelprojection in den zwei ersten Projectionen.
15) Warum muss eine Cylinderfläche in Parallelprojection im Allgemeinen Umrisse haben und in welchem Falle findet eine Ausnahme statt?
16) Man discutiere des Näheren die Bestimmung einer Raum-Curve durch zwei orthogonale Parallelprojectionen derselben oder in Centralprojection durch ihr Bild und eine sie enthaltende Kegel- oder Cylinder-Fläche, z. B. die zur Bildebene normale; man zeige, wie dadurch ihre Schnittpunkte mit einer gegebenen Ebene construiert werden können.

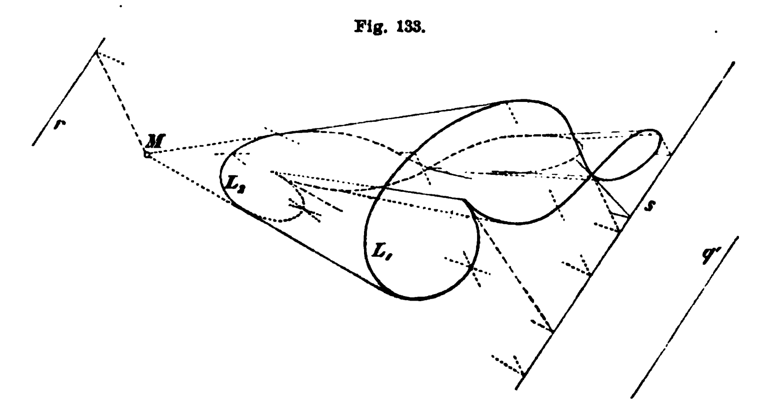
65. Irgend zwei ebene Leitcurven $L_1, L_2$ oder Querschnitte des nämlichen Kegels von der Spitze $M$ (also nicht durch die Spitze) sind collineare ebene Figuren in perspectivischer Lage; jede von ihnen ist das perspectivische Bild der andern aus dem Centrum der Projection $M$ auf ihre Ebene; die Durchschnittslinien der Ebenen von $L_1$ und $L_2$ ist die Collineationsaxe, die Schnitte der zu ihnen parallelen Ebenen aus $M$ mit der jedesmaligen andern sind die Gegenaxen der Systeme. (Vergl. § 24.; 55.)

Diese Sätze sind der unmittelbare Ausdruck des Sachverhalts im Sinne der Centralprojection, wobei die Kegelfläche als projicierende Kegelfläche (§ 2.) aller ihrer Leitcurven erscheint.

Infolge dessen entspricht jedem Punkte und jeder Tangente des einen Schnittes ein Punkt und eine Tangente jedes andern, den Punkten auf einer Geraden im einen die Punkte der entsprechenden im andern etc. Man hat damit den Satz: Alle ebenen die Spitze nicht enthaltenden Schnitte desselben Kegels sind — insofern sie algebraisch sind, gilt diess im eigentlichen Sinne, man sieht aber, dass es im Wesentlichen auch unabhängig davon Geltung behält — von derselben Ordnung und Classe, von derselben An-

zahl von Doppelpunkten und Doppeltangenten, von Rückkehrpunkten und Wendetangenten respective; sie sind collineare Curven. (Fig. 133.) Man sagt in Folge dessen, der Kegel sei selbst von der Ordnung und Classe seiner ebenen Leitcurve und benennt die Erzeugenden desselben, die nach den Doppelpunkten und Rückkehrpunkten derselben gehen, als Doppel- und Rückkehr-Erzeugende, und diejenigen Tangentialebenen, die die Doppeltangenten und Wendetangenten der Leitcurve enthalten, als Doppel- und Wendetangentialebenen des Kegels.

Fig. 133.




Nach dem Vorigen wird der Kegel von einer Geraden in höchstens so viel Punkten geschnitten, als die Ordnungszahl der ebenen Leitcurve zählt, und hat aus einem Punkte so viel Tangentialebenen, als die Classenzahl der Leitsurve sagt.

Im Falle des Cylinders stehen alle ebenen Schnitte desselben in der geometrischen Verwandtschaft der Affinität mit perspectivischer Lage, die Schnittlinie ihrer Ebenen ist die Affinitätsaxe (vergl. §21., a. und §54.; 55.; 5.). Die vorigen Resultate gelten unverändert, aber es kommt das Besondere hinzu, dass der unendlich fernen Geraden des einen Schnitts nicht eine endlich entfernte Gerade in jedem andern Schnitt, sondern wieder die unendlich ferne Gerade desselben entspricht. In Folge dessen haben alle diese Schnitte gleichviele reelle Aeste und Asymptoten; es sind z. B. alle ebenen Schnitte eines Cylinders mit kreisförmiger Leitcurve (eines

Kreiscylinders) Ellipsen, während die ebenen Schnitte eines Kreiskegels rücksichtlich der unendlichen Aeste verschieden, nämlich je nach Lage der Schnittebene Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln sind.

1) Eine ebene Curve wird von einer ihrer Tangenten ausser dem Berührungspunkte noch geschnitten, sobald ihre Ordnungszahl grösser ist, als zwei, nämlich die Curven dritter Ordnung noch einmal, die der vierten noch zweimal, etc. Die Inflexionstangenten schneiden die Curven dritter Ordnung nicht weiter; etc. Man erläutere das analoge Verhalten der Tangentialebenen der Kegelflächen.

2) Für einen Punkt der Curve zählt die in ihm selbst berührende Tangente der Curve als Vereinigung von zwei benachbarten Tangenten und es lassen sich somit von ihm noch so viel andere Tangenten an die Curve ziehen, als die um zwei verminderte Classenzahl derselben besagt; also für die Curve dritter Ordnung vier, zwei oder eine, je nachdem sie von der sechsten, vierten oder dritten Classe ist. (§ 62.; 3.) Man erläutere diess in seiner Bedeutung für die Kegelflächen und gebe besonders das Verhalten der Rückkehrkanten dabei an.

3) Da die Zahl der gemeinsamen Punkte von zwei ebenen Curven der respectiven Ordnungen $\mu_1$, $\mu_2$ gleich $\mu_1 \mu_2$ ist, so schneidet der Krümmungskreis einer Curve sie ausser dem Berührungspunkte in noch $(2\mu - 3)$ Punkten. Man erläutere das Verhalten der Inflexionstangente der Curve dritter Ordnung als das eines Krümmungskreises von unendlich grossem Halbmesser.

4) Nach dem Gesetz der Dualität (vgl. § 23.; 62.) erklärt sich aus dem Vorigen auch das Verhalten des Rückkehrpunktes einer Curve dritter Ordnung und Classe.

5) Im Falle des Parallelismus der Ebenen geht die centrische Collineation in Aehnlichkeit bei ähnlicher Lage, die Affinität in Congruenz über.

6) Die Ergebnisse der Untersuchungen in den §§ 54. und 61.; 6. zeigen, dass im Falle der Affinität die Congruenz auch bei einer nicht parallelen — man

sagt antiparallelen — Lage der Schnittebene möglich ist. Findet Analoges statt für die Aehnlichkeit bei den Schnitten der Kegel?

7) Wenn die Centralprojection eines Inflexionspunktes der Curve in unendliche Ferne fällt, so wird die Inflexionstangente zur Asymptote mit der besondern Eigenthümlichkeit, dass die beiden ihr in entgegengesetztem Sinne zustrebenden Curvenäste auf einerlei Seite von ihr liegen.

8) Man erläutere die Verhältnisse des unendlich fernen Doppel- respective Rückkehrpunktes.

66. Da die Beziehung der Collineation in perspectivischer Lage zwischen ebenen Systemen durch beliebige centrale oder parallele Projection derselben nicht gestört wird, so sind im Vorigen die Methoden der Construction der Bilder ebener Schnitte von Kegel- und Cylinderflächen enthalten; in der That führt jede andere Betrachtungsweise darauf zurück und findet die zweckmässigste Form ihrer Ausführung in den Regeln zur Construction centrisch collinearer ebener Systeme.

Ist $L$ die Leitcurve in der Ebene E, $M$ die Spitze, F die Schnittebene, so ist die Schnittcurve perspectivisch collinear zu $L$ für $M$ als Centrum, die Schnittlinie $s$ von E und F als Axe der Collineation, und für $r$, die Schnittlinie von E mit der durch $M$ gehenden Parallelebene zu F, und $q$, die Schnittlinie von F mit der durch $M$ gehenden Parallelebene zu E, als Gegenaxen. Die gleichnamigen Projectionen von $L$ und von der Schnittcurve sind also centrisch collinear für die entsprechenden Projectionen von $M$ und $s$ als Centrum und Axe der Collineation und die entsprechenden Projectionen von $r$ und $q$ als Gegenaxen.

Ist die Ebene der Leitcurve E eine Projectionsebene, der Kegel also durch die Spitze und eine Spur gegeben, so wird die Collineationsaxe $s$ zur gleichnamigen Spur der Schnittebene und $r$ wird zur gleichnamigen Spur der durch $M$ gehenden Parallelen zur Schnittebene. Zieht man in diesem Falle in der Ebene der Leitcurve eine beliebige Gerade $g$, so ist dieselbe die gleichnamige Spur einer durch $M$ gehenden und die Kegelfläche in Erzeugenden $MA$, $MB$, $\cdots$

schneidenden Ebene, welche die Schnittebene in einer Geraden $g_1$ schneidet, auf der in diesen Erzeugenden die Punkte $A_1, B_1, \cdots$ liegen, welche in der Schnittcurve den Punkten $A, B, \cdots$ der Leitcurve entsprechen. Diese Gerade $g_1$ muss erstens durch den Punkt $S$ gehen, welchen $g$ mit der Schnittlinie der Ebenen **E** und **F**, d. h. mit der Collineationsaxe gemein hat; sodann auch durch den Punkt $Q$ von $q$, in welchem eine durch $M$ gehende Parallele zu $g$, als in der Ebene $Mq$ gelegen, die Schnittebene **F** schneidet; und sie muss endlich parallel der Geraden $MR$ sein, welche von $M$ nach dem Schnittpunkt von $g$ mit der durch $M$ gehenden Parallelebene zur Schnittebene $M_r$ gezogen wird. (Vergl. § 64.; 5.) Diese Beziehungen, als in jeder der Parallelprojectionen des Ganzen unverändert gültig, bestimmen aus den Projectionen von $g_1, A, B, \cdots$ die gleichnamigen Projectionen von $g_1, A_1, B_1, \cdots$ Dreht sich dann $g$ in der Ebene der Leitcurve um einen festen Punkt $P$, so dreht sich $g_1$ in der Ebene der Schnittcurve um den entsprechenden festen Punkt $P_1$; man hat die Kegelfläche und die Schnittebene mit Hilfsebenen eines Büschels geschnitten, welches die Gerade $MP$ zu seiner Scheitelkante hat; der vollen Umdrehung von $g$ um $P$ entspricht die volle Umdrehung von $g_1$ um $P_1$, d. h. die vollständige Bestimmung der Schnittcurve.

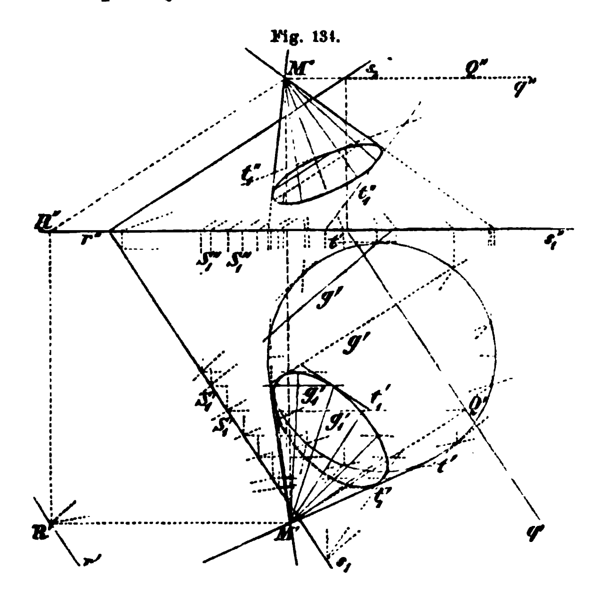
Lässt man speciell $g$ in der Ebene der Leitcurve parallel zu sich selbst fortrücken, so bleibt $Q$ ungeändert und die entsprechenden Geraden $g_1$ bestimmen sich durch diess und die entsprechenden $S$ oder $R$. Man hat dann die Kegelfläche und die Schnittebene durch ein Büschel von Hilfsebenen geschnitten, dessen Scheitelkante eine durch $M$ gehende Parallele $MQ$ zur Leitcurvenebene ist.

Lässt man dagegen $g$ sich um einen Punkt $R$ der Gegenaxe $r$ drehen, so werden die $g_1$ einander parallel — nämlich parallel $MR$ — und man hat die Kegelfläche und die Schnittebene durch ein Büschel von Hilfsebenen geschnitten, welches eine durch $M$ gehende Parallele zur Schnittebene $MR$ zur Scheitelkante hat. So kommt in Form der Gesetze der Collineation das allgemeine Princip der darstellenden Geometrie für die Bestimmung der Durchschnitte von Flächen zur Verwendung: Die gegebenen Flächen durch ein System von Hilfsflächen solcher Art und Lage zu schneiden, dass ihre

Schnitte mit jenen leicht ermittelt werden können, da diese dann als ihre gemeinsamen Punkte Punkte der Durchschnittsform liefern. (Vergl. als erste Anwendungen dieses Princips die Constructionen für die Schnittlinie von Ebenen §§ 8.; 5 u. 51.)

Man kann insbesondere z. B. $R'$ oder $Q'$ in die Schnittpunkte der Parallelen zur Axe $x$ aus $M'$ mit $r'$ respective $q'$ legen und erhält dann für die $g_1'$ (Fig. 134.) oder $g'$ zur Axe $x$ parallele Gerade, im ersten Falle auch für die $g_1''$ Parallelen zur Spur $s_2$ der Schnittebene.

Fig. 134.

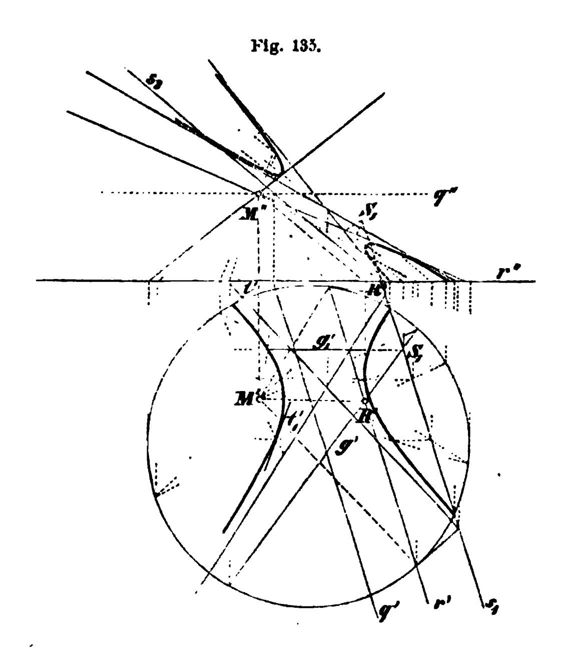


Ist $g$ eine Tangente von $L$, so wird $g_1$ die entsprechende Tangente der Schnittcurve.

Wenn die Leitcurve $L$ die Gegenaxe $r$ ihres Systems schneidet, so liegen die entsprechenden zu diesen Punkten im System der Schnittcurve unendlich fern; sie sind nämlich die Richtungen der nach jenen Punkten der Gegenaxe $r$ gehenden Strahlen aus dem Collineationscentrum. Die Schnittcurve hat also so viele unendliche Aeste (Fig. 135.), als Schnittpunkte von der Leitcurve $L$ mit der Gegenaxe ihrer Ebene gebildet werden und zwar in den Richtungen der zu diesen Punkten gehörigen Kegel-Erzeugenden. Den Tangenten der Leitcurve in jenen Schnittpunkten entsprechen die

Asymptoten der Schnittcure. Jene Erzeugenden des Kegels sind die zur Schnittebene parallelen, d. i. in einer Parallelebene zu ihr durch die Spitze gelegenen; diese, die Asymptoten, sind die Durchschnittslinien der Schnittebene mit den

Fig. 135.



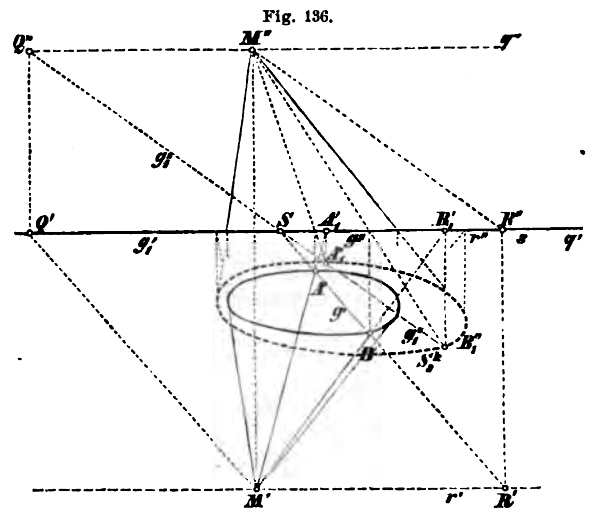
Tangentialebenen, welche den Kegel längs dieser Erzeugenden berühren.

1) Man construiere für einen durch Spitze $M$ und ebene Leitcurve $L$ bestimmten Kegel die erste Spur $S_1{}^k$. Die Figuren 134., 135. zeigen das Verfahren.
2) Man construiere den Schnitt eines durch Spitze und Spur bestimmten Kegels mit einer projicierenden Ebene.
3) Man construiere die zweite Spur $S_2{}^k$ eines durch die Projectionen der Spitze $M'$, $M''$ und seine erste Spur bestimmten Kegels und interpretiere die Construction im Sinne der collinearen Beziehung. Die Figur 136. giebt die Ausführung. Man zeige die Identität des Verfahrens mit dem der Bestimmung der verticalen Durchstosspunkte der Erzeugenden. (§ 64.; 1.)

4) Es soll ebenso der Schnitt mit der Halbierungsebene $\mathbf{H}_{x'}$ verzeichnet werden.

5) Wie gestaltet sich die Construction der Projectionen der Schnittcurve mit einer beliebigen Ebene, wenn

Fig. 136.



der Kegel durch die Projectionen der Spitze $M'$, $M''$, die beiden ersten Spuren der Ebene und die Projection $L''$ der Leitcurve $L$ gegeben ist?

6) Eine Kegelfläche ist durch die Projectionen der Spitze und der in der Halbierungsebene $\mathbf{H}_{x'}$ gelegenen Leitcurve bestimmt; man soll ihren Schnitt mit einer Ebene construieren.

7) Man zeige, wie die Construction der Collineationsaxe und der Gegenaxen sich gestaltet, wenn die Schnittebene durch eine Gerade und einen Punkt ausserhalb derselben etc. bestimmt ist.

8) Man construiere für einen durch seinen Normalschnitt bestimmten Cylinder die zweite Spur.

9) Man construiere die Projectionen für den Normalschnitt eines durch eine Spur und die Richtung der Erzeugenden bestimmten Cylinders.

10) Welche Bedingung muss die Schnittebene erfüllen, damit sie eine gegebene Kegelfläche in einer Curve schneidet, die einen parabolischen Ast besitzt? Kann

dieser in einer bestimmten Richtung der ersten oder zweiten Projectionsebene liegen?

11) Der Satz, dass ähnliche und ähnlich gelegene Curven gleiche Asymptotenrichtungen besitzen, ist aus dem Entwickelten zu erläutern.

12) Man discutiere die Gestalt, welche die Resultate des Textes annehmen für den Fall des ebenen Schnittes zwischen einer durch Spitze und Spur in Centralprojection bestimmten Kegelfläche mit einer durch Spur und Fluchtlinie gegebenen Ebene. (Vergl. Figur 133.)

13) Man zeige endlich, dass die entwickelte Constructionsmethode auch unverändert anwendbar bleibt für den Schnitt $L_1'$ einer durch Spur $s_2$ und Fluchtlinie $q_2'$ gegebenen Ebene mit einer Kegelfläche, die durch eine Leitcurve $L'$ in gegebener Ebene $s_1$, $q_1'$ und ihre Spitze $M$

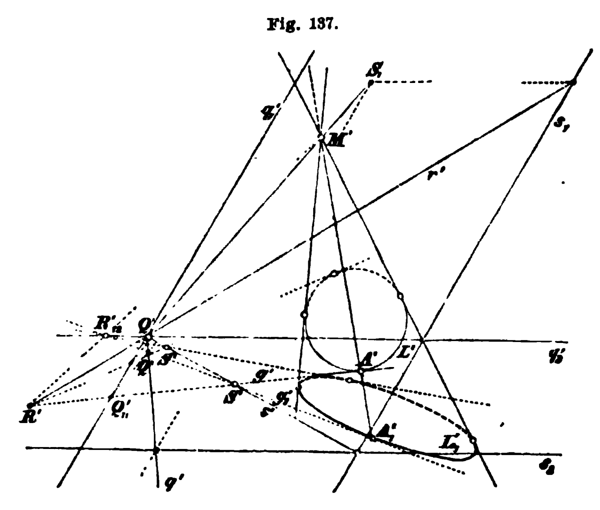



Fig. 137.

bestimmt ist — wobei natürlich die Collineationsaxe $s'$ und die beiden Gegenaxen $q'$, $r'$ sich als Linien von einerlei Fluchtpunkt $Q_1'$ darstellen. Einer Geraden $g'$ (Fig. 137.) in der Ebene von $L$, deren Bild $g'$ die Collineationsaxe $s'$ in $S'$, die Gegenaxe $r'$ in $R'$ trifft, entspricht eine Gerade $g_1$, deren Bild $g_1'$ von $S'$ nach dem Punkte $R_{12}'$ der Fluchtlinie $q_2'$ geht, der in $M'R'$ liegt und

auch durch den Punkt $Q'$ der Geraden $q'$, der mit $M'$ und dem Schnittpunkt von $g'$ mit $q_1'$ in einem Strahl liegt. Warum?

Durch welche Specialisierungen kann die Construction vereinfacht werden? Welche Mängel hat die Disposition der Figur und wie sind sie zu vermeiden?

14) Man erörtere das Entsprechende für den Schnitt eines Cylinders von gegebener Leitcurve in schräger Ebene.

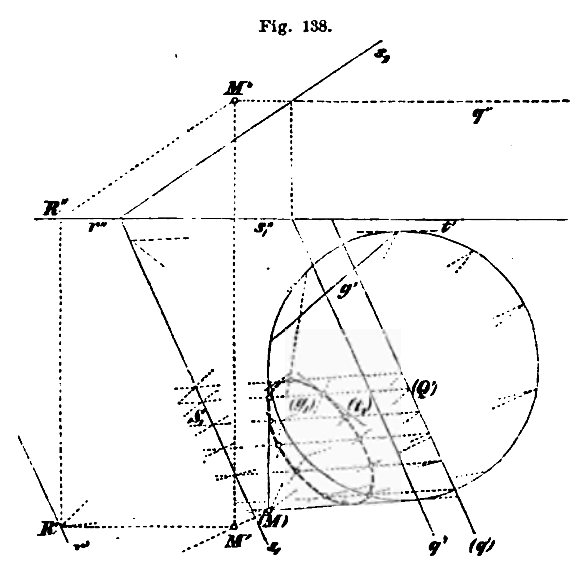
67. Auch die directe Bestimmung der wahren Gestalt der ebenen Schnittcurve einer Kegelfläche, welche durch Spitze und ebene Leitcurve insbesondere Spur gegeben ist, ergiebt sich aus dem Vorigen.

Denn wenn zwei ebene Systeme für ein Centrum $M$ in perspectivischer Collineation sind, so bleiben sie perspectivisch collinear auch bei der Drehung der einen Ebene um die Durchschnittslinie von beiden und beim Zusammenfallen beider Ebenen; die Umlegung des Centrums mit der zur gedrehten Ebene Parallelen aus ihm in die andere Ebene ist das Centrum der perspectivischen Collineation der vereinigten Systeme. Die Gegenaxe im Systeme der festen Ebene bleibt unverändert, die Umlegung der Geraden, in welcher die Parallelebene aus dem Centrum zur festen Ebene die zu drehende Ebene schneidet, ist die Gegenaxe im System der Letztern. In Fig. 138. ist diese Construction ausgeführt, zu $g'$ ist $(g_1)$, zu $t'$ ebenso $(t_1)$ gefunden. Man kann also direct durch die Beziehungen der perspectivischen Collineation die Umlegung der Schnittcurve einer Ebene mit der Kegelfläche in die Ebene ihrer Leitcurve construieren — direct, d. h. ohne vorhergehende Construction der Projectionen der Schnittcurve; somit im Falle der in einer Projectionsebene gelegenen Leitcurve oder der zu einer solchen parallelen die wahre Gestalt der Schnittcurve, ohne vorher die Projectionen derselben ermitteln zu müssen. Im andern Falle wird aus jener Umlegung in die Ebene der Leitcurve nach bekannten Methoden auch zur wahren Gestalt überzugehen sein. Diese Betrachtungen gelten ebenso für die centrale wie für die Parallelprojection.

Die für Cylinderflächen nöthige Modification ergiebt sich einfach, da auch zwei perspectivisch affine ebene Systeme ihren

Character beibehalten, wenn man das eine um die Schnittlinie ihrer Ebenen bis zum Zusammenfallen der Letztern dreht und da ferner zwei affine Systeme in perspectivischer Lage durch das eine von ihnen, ihre Axe und ein Paar von entsprechenden Punkten bestimmt sind.

Fig. 138.



1) Man verzeichne die wahre Gestalt des Schnittes einer Kegelfläche, dessen Ebene durch einen gegebenen Punkt derselben normal zu ihrer entsprechenden Erzeugenden gelegt wird.
2) Die wahre Gestalt des Normalschnittes einer Cylinderfläche von gegebener Spur und Richtung der Erzeugenden soll construiert werden.

68. Ist der betrachtete Kegel ein Kegel zweiter Ordnung und Classe oder kurz vom zweiten Grade, so dass zu seiner Bestimmung seine Spitze und fünf Punkte oder Tangenten einer ebenen Leitcurve, d. h. fünf Erzeugende (nicht zu drei in einer Ebene) oder fünf Tangentialebenen (nicht zu drei durch einen Punkt ausser der Spitze) oder was dem äquivalent ist (vergl. § 27.; 7.) genügen, so erhält man aus diesen Bestimmungsstücken auch die Projectionen der Schnittcurve und die wahre Gestalt derselben.

Für diese Kegel gelten die Erzeugungsweisen: Zwei projectivische Ebenenbüschel von sich schneidenden Scheitelkanten liefern durch den Schnitt der Paare entsprechender Ebenen die Erzeugenden eines Kegels zweiter Ordnung; zwei projectivische Strahlbüschel von einerlei Scheitel aber verschieden Ebenen erzeugen durch die Verbindungsebenen entsprechender Strahlenpaare die Tangentialebenen eines Kegels zweiter Classe. Jeder Kegel zweiter Ordnung ist von der zweiten Classe und umgekehrt. (Vergl. § 88.; 8.)

Ferner die Sätze: Sechs Erzeugende einer Kegelfläche zweiter Ordnung bilden die Kanten einer sechsseitigen Ecke, in welcher die drei Durchschnittslinien der gegenüberliegenden Flächenpaare sich in einer Ebene befinden. (§ 27.) Sechs Tangentialebenen einer Kegelfläche zweiter Classe bilden die Flächen einer sechsseitigen Ecke, in welcher die drei Verbindungsebenen der gegenüberliegenden Kantenpaare sich in einer Geraden schneiden. (§ 28.) (Pascal'sches Sechskant, Brianchon'sche sechsseitige Ecke.) So wie sich diese Entstehungsarten und Sätze von den Curven zweiter Ordnung und Classe auf die entsprechenden — ihre projicierenden — Kegelflächen übertragen, so geschieht es auch mit den Sätzen, welche die Theorie der Pole und Polaren constituieren. (§ 30. f.) Ist in der Ebene der Leitcurve und in Bezug zu dieser $P$ der Pol und $p$ die zugehörige Polare, so ist der vom Centrum $M$ nach $P$ gehende Strahl die Pol-Gerade und die von $M$ nach $p$ gehende Ebene die Polaren-Ebene in Bezug auf den Kegel; auf allen durch jene gehenden Ebenen ist die Polgerade von der Polarenebene durch den Kegel d. h. die entsprechenden Erzeugenden desselben harmonisch getrennt; und an allen aus $M$ in der Polarenebene gezogenen Geraden ist sie von der Ebene nach der Polgeraden durch den Kegel d. h. die entsprechenden Tangentialebenen desselben harmonisch getrennt. Auf allen den Geraden insbesondere, welche der Polgeraden parallel sind, werden die zwischen ihren Schnittpunkten mit dem Kegel liegenden Strecken von der Polarenebene halbiert und man kann daher die Letztere als die zur Richtung der erstern

conjugierte Diametralebene und jene als den zur Stellung der Letzteren conjugierten Durchmesser der Fläche benennen. (§ 34.) Für alle von $M$ ausgehenden Strahlen in der Polarenebene gehen die Polarenebenen durch den ihr conjugierten Durchmesser oder die ihr entsprechende Polgerade und umgekehrt. Die Ebenen durch einen von $M$ ausgehenden Strahl ordnen sich in Paare je aus zwei solchen Ebenen, dass jede die Polarenebene der Strahlen durch $M$ in der andern ist; die Strahlen in einer von $M$ ausgehenden Ebene so, dass von den Strahlen jedes Paares jeder die Polarlinie der Ebenen durch den andern ist. Jene Paare bilden ein involutorisches Ebenenbüschel harmonischer Polarenebenen, diese ein involutorisches Strahlenbüschel harmonischer Polarlinien in Bezug auf die Kegelfläche; die Doppelebenen des ersten sind die Tangentialebenen der Kegelfläche durch jenen Strahl, die Doppelstrahlen des letzteren die Erzeugenden der Kegelfläche in dieser Ebene.

Alles diess ist die einfache Uebertragung der Sätze von den Kegelschnitten in den projicierenden Kegel, begründet durch den allgemeinen Satz, dass Doppelverhältnisse, also auch Involutionen, etc. durch Projection nicht geändert werden und im Schein dieselben sind wie im Schnitt.

Von diesen Sätzen aus werden wir in wesentlich allgemeiner Art später (§ 96.), wo der Erfolg ein umfassenderer sein kann, beweisen, dass für jede Kegelfläche zweiten Grades drei Durchmesser existieren, die zu ihren conjugierten Diametralebenen, den Ebenen der jedesmaligen beiden andern, normal sind, — die Hauptaxen oder Axen des Kegels, die Verbindungsebenen ihrer Paare die Hauptebenen desselben — und dass es in Folge dessen stets zwei Stellungen von Ebenen giebt, die Richtung einer jener Axen enthaltend, welche die Kegelfläche nach Kreisen schneiden — die cyclischen Ebenen des Kegels — Ebenen durch die Spitze, für welche die in ihnen liegenden Involutionen harmonischer Polarlinien rechtwinklig sind (§ 34.; 14.); dass anderseits ebenso zwei gerade Linien durch die Spitze existieren, für welche die durch sie gehenden Involutionen harmonischer Polarebenen rechtwinklig sind (§ 35.), die Focallinien des Kegels; dass endlich speciell der Fall eintreten kann, es werden zwei jener drei

Hauptaxen in der Normalebene der dritten und damit zwei Hauptebenen durch die Normale der dritten unbestimmt, während zugleich in der Stellung der einen bleibenden Hauptebene die beiden Stellungen der Kreisschnittebenen und in der Richtung der bleibenden Hauptaxe die der Focalstrahlen sich vereinigen. Dieser besondere Fall ist der des geraden Kreiskegels oder des Rotationskegels; für die hier vorzunehmende Behandlung desselben genügt die bekannte Thatsache seiner Erzeugung.

Endlich übertragen sich die vorigen Erörterungen im Wesentlichen auf die Cylinderflächen zweiten Grades; als speciellste Art derselben treffen wir wieder den geraden Kreiscylinder oder Rotationscylinder an.

69. Der gerade Kreiskegel oder Rotationskegel hat die gerade Linie von seiner Spitze $M$ nach den Mittelpunkten seiner kreisförmigen Schnitte oder die Normale der Ebenen derselben zur Hauptaxe und besitzt in Folge seiner Entstehung die besonderen Eigenschaften:

1) Alle seine Erzeugenden sind gegen die Axe gleich geneigt, unter demselben Winkel, den auch seine Tangentialebenen mit ihr bilden; der Complementwinkel dieses Letzteren ist der Neigungswinkel der sämmtlichen Erzeugenden und Tangentialebenen gegen die einander parallelen Ebenen der Kreisschnitte.

2) Alle Erzeugenden des Rotationskegels haben zwischen zwei zur Axe normalen Querschnitten desselben gleiche Länge; insbesondere sind die Strecken aller Erzeugenden zwischen der Spitze und einem Kreisschnitt gleich lang. Alle Tangentialebenen des Rotationskegels haben zwischen zwei Normalebenen zu seiner Axe gleiche Breite. (Vergl. §§ 1., 2. § 3.; 3.)

Diese Eigenschaften finden hier — sie sind für manche elementare Probleme (vergl. § 10.; 8. § 54.; 14, 15.) bereits zur Anwendung gekommen, oder lassen sich doch für solche (§ 54.; 20, 21.) benutzen — Verwendung zur Lösung folgender Aufgaben:

a) Construiere diejenigen Erzeugenden eines beliebigen durch die Spitze $M$ und eine ebene Leitcurve $L$, insbesondere eine Spur, gegebenen Kegels,

1) welche mit der Ebene der Leitcurve einen gegebenen Winkel $\beta$ machen;

2) welche zwischen Spitze und Leitcurvenebene eine vorgeschriebene Länge $l$ haben.

Die gesuchten Erzeugenden sind diejenigen, welche der gegebene Kegel mit einem Rotationskegel von derselben Spitze $M$ gemein hat, dessen Axe die Normale $MN$ der Leitcurvenebene ist und dessen Basiskreishalbmesser sich im Falle 1) aus der Kathete $MN$ nnd dem Winkel $\beta$ als ihrem Gegenwinkel als zweite Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks bestimmt; während er im Falle 2) aus der Kathete $MN$ und der gegebenen Länge $l$ als Hypotenuse ebenfalls als zweite Kathete gefunden wird. Die dem Kreise $K$ und der Leitcurve $L$ gemeinschaftlichen Punkte sind in jedem Falle die Fusspunkte der gesuchten Erzeugenden in der Leitcurvenebene, und bestimmen sie.

b) Construiere diejenigen Tangentialebenen eines durch Spitze $M$ und ebene Leitcurve $L$ (insbesondere Spur) gegebenen Kegels,

1) welche mit der Ebene der Leitcurve einen vorgeschriebenen Winkel $\alpha$ machen;

2) welche zwischen Spitze und Leitcurvenebene eine gegebene Breite $b$ besitzen. Wenn die vermittelnden Rotationskegel wie vorher bestimmt sind ($\alpha$ statt $\beta$ bei 1), so erhält man die gesuchten Tangentialebenen durch ihre Schnittlinien mit der Leitcurvenebene, welche die gemeinschaftlichen Tangenten der Leitcurve $L$ mit dem Grundkreis $K$ des Rotationskegels sind. Die Modificationen dieser Constructionen für den Fall, wo die Neigung gegen eine beliebige von der Leitcurvenebene verschiedene Ebene oder die Länge respective Breite bis zu derselben vorgeschrieben ist, ergeben sich leicht.

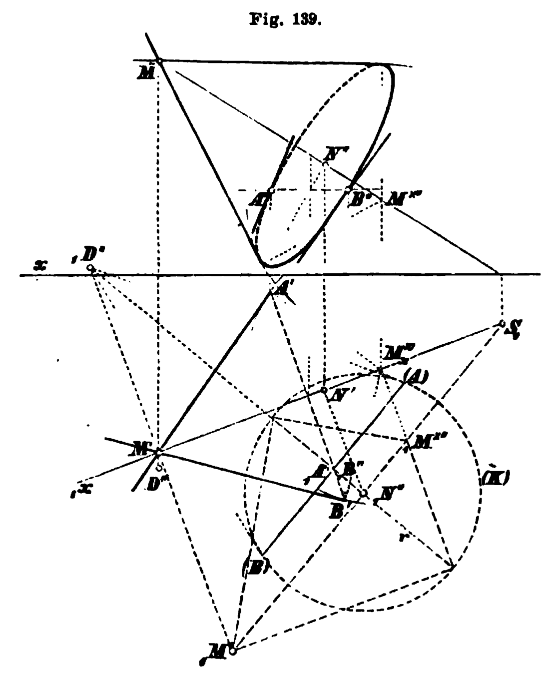
Für den geraden Kreiscylinder sind die Erzeugenden und Tangentialebenen zur Ebene eines Kreisschnittes normal und zwischen je zwei Kreisschnitten von gleicher Länge respective Breite. Die vorigen Constructionen liefern auch die zu einer gegebenen Ebene normalen Erzeugenden und Tangentialebenen einer Kegelfläche, oder die von der geringsten Länge respective Breite zwischen jener und der Spitze.

1) Die Tangentialebene des geraden Kreiskegels ist normal zu der Ebene, welche die Berührungserzeugende mit der Axe desselben bestimmt; oder die Erzeugenden sind die orthogonalen Projectionen der Axe auf die zugehörigen Tangentialebenen. Alle Normalen des Rotationskegels schneiden die Axe.
2) Die Construction a) der Schnittpunkte des Rotationskegels von der Spitze $M$, dem Mittelpunkt $N$ und dem Halbmesser $r$ seines Kreisschnittes $K$ mit einer Geraden $g$ und die Construction b) der Tangentialebenen eines solchen Kegels durch einen Punkt $P$ kann insofern modificiert werden, als man im Falle a) die Schnittlinie $g^*$ der Ebene $Mg$ mit der Ebene des Kreises $K$ in eine Parallelebene zur ersten Projectionsebene durch die Spitze $M$ z. B. umlegt und dort ihre Schnittpunkte mit dem Kreis bestimmt, die dann wieder aufgerichtet die Kegelerzeugenden der Schnittpunkte geben; und als man im Falle b) den Schnittpunkt $P^*$ der Geraden $MP$ mit jener Ebene des Kreises $K$ in eine solche Parallelebene durch den Mittelpunkt $N$ umlegt und dort seine Tangenten mit dem besagten Kreise bestimmt, die dann wieder aufgerichtet die Spuren der Tangentialebenen in der Kreisebene und die entsprechenden Berührungserzeugenden liefern.
3) Eine besonders wichtige Specialform der Aufgabe 2$^b$) ist die Construction der Umrisse eines Rotationskegels: Der Punkt $P$ ist das Centrum der Projection; insbesondere im Falle der orthogonalen Parallelprojection ist er für den Umriss in der ersten Projection die Richtung der Axe $OZ$, für den in der zweiten die Richtung von $OY$, in der dritten die von $OX$.

   Diese Aufgabe wird daher a) für Orthogonalprojection wie folgt behandelt (Fig. 139.). Zur Bestimmung des ersten Umrisses führt man eine zur Axe $MN$ parallele oder sie enthaltende zweite Projectionsebene ein, bestimmt in ${}_1M''$, ${}_1N''$ die neuen Projectionen des Scheitels und Grundkreismittelpunktes und legt durch ${}_1N''$ die zu ${}_1M''\,{}_1N''$ normale Ebene

des Grundkreises $K$, die in $_1D''$ die erste projicierende Linie von $M$ schneidet. Die Tangenten von hier an den Grundkreis $K$ bestimmen in diesem als ihre Berührungspunkte $A$, $B$ die Punkte der Kegelerzeugenden, deren erste Projectionen $A'$, $B'$ die gesuchten

Fig. 139.




Umrisslinien bilden. Die zweiten Projectionen $A''$, $B''$ dieser Punkte begrenzen eine zur Axe $OX$ parallele Sehne in der Ellipse, welche die zweite Projection des Grundkreises ist.

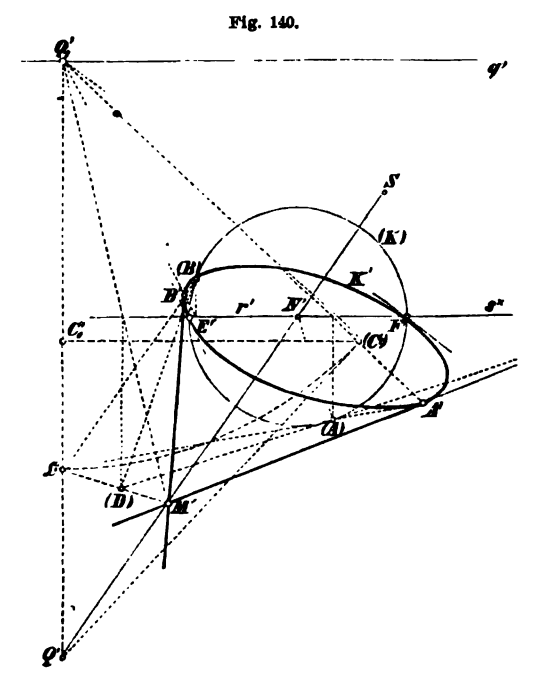
In analoger Weise bestimmt man den zweiten Umriss des Kegels und damit die Endpunkte $C'$, $D'$ einer zur Axe $OX$-parallelen Sehne der ersten Projection seines Grundkreises.

Wie kann man aus der Construction des ersten Umrisses in 3*) den zweiten Umriss der Kegelfläche ableiten?

b) in Centralprojection, wo als gegeben vorausgesetzt wird (Fig. 140.) die Axe des Kegels

durch ihren Durchstosspunkt $S$ und ihren Fluchtpunkt $Q'$, die Bilder $M'$, $N'$ der Spitze und des Leitkreismittelpunktes in ihr und der Halbmesser $r$ des Leitkreises oder das Bild $r'$ desjenigen Halbmessers $NE = NF$ desselben, welcher zur Bildebene also auch zur Fluchtlinie $q'$ der zur Axe normalen Ebenen parallel ist —

Fig. 140.



verfährt man in folgender Weise. Man bestimmt den Schnittpunkt $D$ der projicierenden Linie von $M$ mit der Basisebene des Kegels und legt ihn sammt dem Grundkreise $K$ in die durch den Mittelpunkt des Letzteren gehende Parallelebene zur Tafel um, verzeichnet dort die Tangenten von $(D)$ an $(K)$ und führt ihre Berührungspunkte $(A)$, $(B)$ in die Basisebene zurück. Sie bestimmen die Bilder $A'M'$, $B'M'$ der Umrisserzeugenden.

Jede zur Ebene von $K$ parallele Ebene, also auch die projicierende Parallelebene derselben $Cq'$ lässt sich zu demselben Zwecke verwenden; an die Stelle des

Kreises $K$ tritt dann der dieser Ebene angehörige Kreisschnitt des Kegels.

4) Wenn man in den Punkten des Kreises $K$ vom geraden Kegel $M, N, r$ auf seinen entsprechenden Tangentialebenen die Normalen errichtet (vergl. Fig. 139.), so schneiden dieselben die Axe $MN$ in demselben Punkte $M^*$ und sind zwischen ihr und dem Kreise von gleicher Länge $l^*$. Diejenigen unter ihnen, welche zu den Tangentialebenen der Umrisskanten gehören, sind der bezüglichen Projectionsebene parallel und erscheinen in ihr in wahrer Länge und rechtwinklig zu den bezüglichen Projectionen der Umrisskanten. Bestimmt man also in 2[a]) in der Hilfsprojection den Punkt $M^*$ und die Länge $l^*$ der Erzeugenden des Normalenkegels, so genügt es nun zur Bestimmung des ersten Umrisses, rechtwinklige Dreiecke $M'M^{*\prime}A'$, $M'M^{*\prime}B'$ von gegebener Hypothenuse $M'M^{*\prime}$ und gegebener Kathete $M^{*\prime}A' = l^*$ zu construieren; mit leicht angebbaren Veränderungen für den zweiten Umriss. Lässt sich aus diesen Bemerkungen ein Vortheil für die Centralprojection ziehen?

70. **Für die Darstellung des ebenen Querschnitts eines geraden Kreiskegels** denken wir die Projectionsebenen so gewählt oder so transformiert, dass die eine z. B. die erste normal zu seiner Axe und die andere, sagen wir die zweite, normal zur Schnittebene liegt — was immer möglich ist.

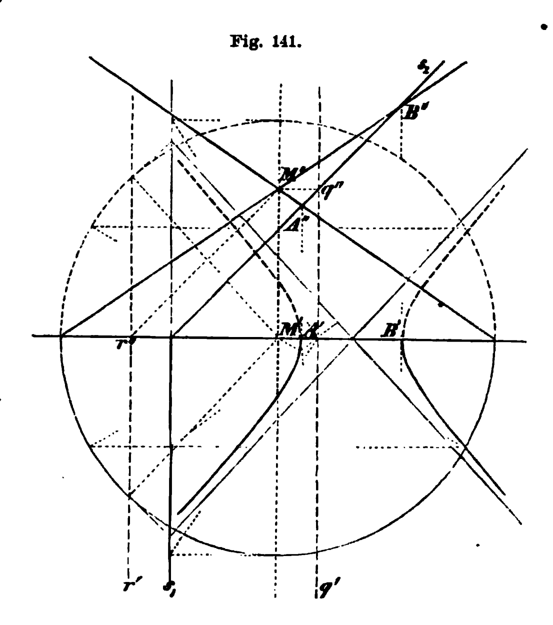
Wir wenden sodann zur Construction a) der ersten Projection der Schnittcurve — die zweite Projection fällt in $s_2$ zwischen die zweiten Umrisslinien der Kegelfläche — die Methode des § 66. an, wie sie in der Figur 141. durchgeführt ist. Sie giebt den Grundriss der hyperbolischen Schnittcurve für einen Kegel, dessen Axe in der Aufrissebene liegt.

Die Construction b) der wahren Gestalt geschieht nach § 67., indem man für die nämliche Collineationsaxe und Gegenaxe $r$ im System des Kreises die Umlegung der Spitze $M$ mit der sie enthaltenden Parallelebene zur Schnittebene als Collineationscentrum benutzt. Sie kann natürlich auch durch Umlegung der durch ihre Projectionen bestimmten Schnitt-

curve in eine der Parallelebenen zu den Projectionsebenen $XOY$, $XOZ$ geschehen, welche durch ihre respectiven Axen gehen.

1) Man characterisiere die Lage der Hauptaxen des Kegelschnitts durch die gegebene Lage der Schnittebene und der Kegelfläche. Wie erhält man die Scheitelpunkte und Scheiteltangenten der ersten Projection der Schnittcurve?
2) Die erste Projection der Spitze $M'$ ist ein Brennpunkt der ersten Projection der Schnittcurve, als Centrum der Collineation zwischen diesem Kegelschnitt und einem aus ihm beschriebenen Kreise

Fig. 141.

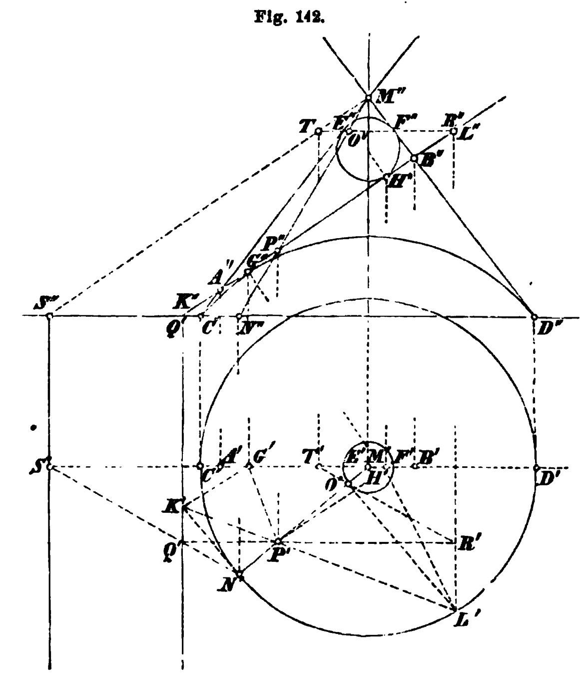


(§ 35.); die erste Projection der Schnittlinie zwischen der durch $M$ gehenden Parallelebene zu $XOY$ und der Schnittebene, d. h. die Gegenaxe $q'$ entspricht ihm als Directrix. (Vergl. Fig. 141.)
3) Man bestimme für die wahre Gestalt der Schnittcurve die Scheitel und die Axen.
4) Die Brennpunkte $G$, $H$ der wahren Gestalt ergeben sich als die Berührungspunkte der

Schnittebene mit denjenigen Kugeln, welche zugleich den Rotationskegel selbst nach einem Kreisschnitt berühren.*)

In der That gelten für diese Punkte $G$ und $H$ die bekannten Eigenschaften der Brennpunkte (§ 35.). Man hat für einen beliebigen Punkt $P$ des elliptischen Schnittes (Fig. 142.) die Kegelerzeugende zwischen den Berührungskreisen der vorbezeichneten Kugeln

Fig. 142.



$$NO = NP + PO = GP + PH = CE = DF;$$

aber $CE = CA + AE = AG + AH = 2AG + HG,$

$DF = DB + BF = BG + BH = 2BG + GH,$

somit a) $AH = GB$ und $GP + PH = AB$. (§35.; 11.)

---

*) Diese und die folgenden Eigenschaften entspringen aus dem Character des geraden Kreiskegels als einer Rotationsfläche, sollen aber nicht bis zur allgemeinen Behandlung der Rotationsflächen verschoben werden. Man vergleiche jedoch das dort Entwickelte besonders auch für die Construction des ebenen Querschnitts und discutiere den Werth desselben für diesen Zweck.

Ferner ist für $K$ und $L$ als die Schnittpunkte der Ellipsentangente in $P$ mit den Tangenten der bezeichneten Kreise in $N$ und $O$ oder der Tangentialebene des Kegels längs $MP$ mit den Ebenen der Ellipse und je eines dieser Kreise respective

$\triangle NPK \cong \triangle GPK$; $\triangle OPL \cong \triangle HPL$; $\triangle NPK \sim \triangle OPL$,

also b) $\angle GPK = \angle NPK = \angle OPL = \angle LPH$. (§35.; 3.)

Und zieht man von $M$ die Parallele zur Axe $AB$, welche die Ebenen der Kreise $CDN$ und $EFO$ in $S$ und $T$ respective schneidet, so wie von $P$ die Parallele $PQR$ zu $AB$ bis zum Schnitt mit denselben Ebenen in $Q$ und $R$ respective, so hat man

$$\triangle MSN \sim \triangle PQN; \quad \triangle MTO \sim \triangle PRO;$$

also $\qquad MS : MN = PQ : PN = PQ : PG;$

$\qquad\qquad MT : MO = PR : PO = PR : PH,$

d. h. c) $PQ : PG = PR : PH = const.$, (§ 35.)

und zwar für die Ellipse $> 1$, für die Hyperbel $< 1$ und für die Parabel $= 1$. Die Geraden $KQ$, $LR$ sind die Directrixen des Kegelschnitts.

5) Man erläutere die Modificationen der Entwickelung und der entsprechenden Figur für den Fall des hyperbolischen Schnittes.

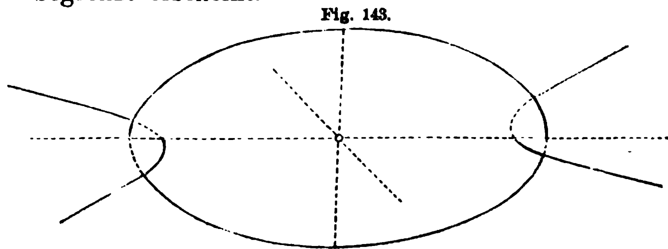
6) Man entwickele die vorigen Eigenschaften für den Grenzfall der Parabel und erläutere ihre constructive Benutzung.

7) Man beweise den Satz: Die Scheitel aller der geraden Kreiskegel, aus welchen ein gegebener Kegelschnitt geschnitten werden kann, liegen in einem zweiten Kegelschnitt, welcher die Brennpunkte des ersten zu Scheiteln und die Scheitel desselben zu Brennpunkten hat und dessen Ebene zur Ebene des ersten normal ist. Für jeden Punkt des zweiten Kegelschnitts als Spitze ist die zugehörige Tangente desselben die Axe des Kreiskegels. Die Beziehung solcher zwei Kegelschnitte ist eine gegenseitige. Die Punkte des einen haben sämmtlich

die Eigenschaften der Brennpunkte des andern; man kann jeden als den **Focalkegelschnitt** des andern bezeichnen.

Die Figur 143. giebt eine Hyperbel und ihre Focal-Ellipse axonometrisch so, dass die Ebene $XOZ$ durch die Ellipse, die Ebene $XOY$ durch die Hyperbel begrenzt erscheint.

Fig. 143.



8) Durch eine gegebene Ellipse gehen zwei und nur zwei gerade Kreiscylinder; durch eine Hyperbel ist kein Kreiscylinder möglich; für die Parabel degeneriert derselbe in ihre Ebene.

9) Man lege durch einen gegebenen Kegelschnitt einen geraden Kreiskegel von vorgeschriebenem Winkel an der Spitze und untersuche die Bedingungen der Lösbarkeit dieser Aufgabe.

10) Man beweise die allgemeinen Sätze: Die Punkte des ebenen Schnittes von einem geraden Kreiskegel stehen zu den Kreisen, in welchen zwei demselben eingeschriebene Kugeln die Schnittebene schneiden, in der Beziehung, dass die algebraische Summe der Längen der Tangenten, die von ihnen an diese Kreise gehen, constant ist, nämlich gleich der Länge der Kegelerzeugenden zwischen den Berührungskreisen der gedachten Kugeln.

Jene Kreise berühren die Schnittcurve doppelt in den Punkten der Geraden, in welcher die Ebene der Schnittcurve die Ebenen der Berührungskreise schneidet; etc.

71. Die speciellen Eigenschaften des **geraden Kreiskegels** (§ 69.) geben der **Abwickelung seiner Fläche** (§ 63.) die bequeme Form durch die Bemerkung, dass der

Theil des Mantels, welcher zwischen der Spitze $M$ und einem Normalschnitt $K$ zur Axe liegt, sich in einen Kreissector verwandelt, dessen Halbmesser die Länge der Kegelerzeugenden zwischen $M$ und $K$ und dessen Bogenlänge der Umfang von $K$ ist; und der Abwickelung des geraden Kreiscylinders ebenso durch die Bemerkung, dass der Theil seines Mantels zwischen zwei beliebigen Normalschnitten $K_1$ und $K_2$ sich in ein Rechteck verwandelt, dessen Höhe die Länge der Erzeugenden zwischen $K_1$ und $K_2$ und dessen Breite der gemeinsame Umfang dieser Kreise ist. Die Abwickelung einer beliebigen auf der Kegelfläche gelegenen Figur wird dann erhalten, indem man in hinreichend kleinen gleichen Zwischenräumen, gemessen auf einem Kreisschnitt des Kegels, Erzeugende zieht, welche diese Figur in Punkten $A_1, A_2 \cdots; B_1, \cdots; C_1, \cdots$ schneiden, diese Erzeugenden in der Abwickelung durch die entsprechende Gleichtheilung des zugehörigen Bogens einträgt und auf ihnen die wahren Längen $MA_1, MA_2, \cdots; MB_1, \cdots$ abträgt.

Auch die Tangenten der Abwickelung der Figur werden leicht bestimmt; ist $t$ die Tangente in einem Punkte $P$ derselben in ihrer ursprünglichen Lage und schneidet sie die Tangente $t_0$ des Kreisschnittes $K$ in dem auf derselben Erzeugenden mit $P$ gelegenen Punkte $P_0$ im Punkte $T$, so bleibt bei der Abwickelung das bei $P_0$ rechtwinklige Dreieck $PP_0T$ sich selbst congruent und gelangt in die Ebene der Zeichnung. Trägt man also $P_0$ und normal zu $MP_0$ die Gerade $P_0T$ ein, so ist $PT$ die Tangente der durch die Entwickelung transformierten Curve in $P$.

Für die Abwickelung des geraden Kreiskegels $M, K$ und seiner Schnittcurve mit einer Ebene $s_1, s_2$ (Fig. 144., p. 237.) wird man von den Endpunkten $A_0, B_0$ der nach den Scheiteln $A$ und $B$ des Schnittes gehenden Erzeugenden aus den Kreis $K$ in eine durch vier theilbare entsprechend grosse Zahl gleicher Bögen theilen und die in den zugehörigen Erzeugenden gelegenen Punkte des Schnittes sammt den entsprechenden Tangenten eintragen; ersteres indem man die wahren Längen der Erzeugenden von den besagten Punkten bis zur Spitze durch Drehung derselben bis zum Parallelismus mit der zur Kegelaxe $MN$ parallelen Projectionsebene bestimmt;

letzteres, indem man die Entfernungen der der andern Projectionsebene angehörigen Durchstosspunkte der Erzeugenden des Berührungspunktes und der bezüglichen Tangente des Schnittes benutzt.

1) Man bestimme die Genauigkeit der Rectification des Kreises nach folgendem Verfahren: Theile den Durchmesser des Kreises in fünf gleiche Theile und bilde ein rechtwinkliges Dreieck aus den Katheten gleich drei und sechs solchen Theilen respective; sein Umfang ist dem Kreisumfang nahe gleich.

2) Wenn ein Sector die Abwickelung des Mantels einer Kegelfläche auf der einen Seite der Spitze $M$ bis zu einem Kreisschnitt darstellt, so wird die gleichzeitige Abwickelung ihres Mantels auf der andern Seite von $M$ bis zum Kreisschnitt vom nämlichen Halbmesser durch den Scheitelsector von gleichem Radius gegeben.

3) Die Scheitelpunkte $A$, $B$ der ebenen Schnitte des geraden Kreiskegels werden durch die Abwickelung Punkte der transformierten Curve von der Eigenschaft, dass die Tangenten der Letztern in ihnen zu den zugehörigen Radien, d. i. den Abwickelungen der entsprechenden Kegelerzeugenden normal sind. Die Abwickelung eines ebenen Schnittes ist eine in Bezug auf die Abwickelungen der Erzeugenden $MA$ und $MB$ symmetrische Curve. (§ 70.; $4^b$.) Es ist eine specielle Folge der allgemeinen Wahrheit, dass die auf der developpabeln Fläche gelegenen Längen und Winkel durch die Entwickelung ihre Grössen nicht ändern können.

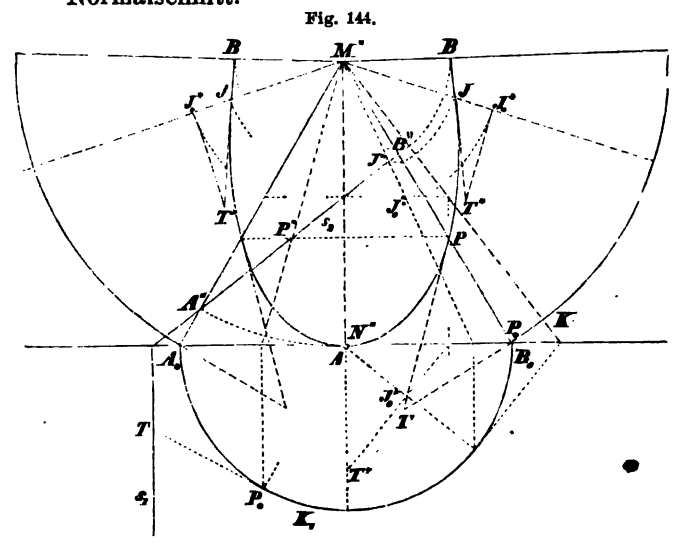
4) Man erläutere die Entwickelung des geraden Kreiscylinders mit seinem ebenen Schnitte.

5) Man verzeichne die Abwickelung der Asymptoten eines hyperbolischen Schnittes für einen geraden Kreiskegel.

6) Man erörtere die Gültigkeit der allgemeinen für die Rotationskegel und Rotationscylinder gegebenen Regeln des Abwickelungsverfahrens für beliebige Kegel,

respective Cylinder, letztere speciell von gegebenem Normalschnitt.

Fig. 144.



72. Durch Umkehrung der vorigen Constructionen kann man von einer in der Abwickelung des Kegel- oder Cylinder-Mantels eingetragenen Figur zu den Projectionen derselben zurück gehen, sowohl für ihre Punkte als für ihre Tangenten.

Es ist von besonderem Interesse, dabei die geraden Linien der Entwickelung zu verfolgen. Die Gerade $g$ zwischen zwei Punkten $A$ und $B$ der Entwickelung einer developpabeln Fläche ist die kürzeste Linie zwischen diesen zwei Punkten und macht mit jeder Erzeugenden derselben, die sie schneidet, zwei gleich grosse Winkel. Wenn man die Ebene mit der Linie $AB$ wieder in die Form der developpabeln Fläche zurückführt, so verwandelt sich die Gerade $g$ in eine Curve, auf der developpabeln Fläche, welche unter allen zwischen $A$ und $B$ auf ihr möglichen Curven die kürzeste ist und deren auf einander folgende Elemente mit der jedesmaligen durch ihren gemeinsamen Endpunkt gehenden Erzeugenden gleiche Winkel machen. Die so entstehende Curve heisst die geodätische Linie auf der Fläche zwischen den Punkten $A$ und $B$.

Die Schmiegungsebene der geodätischen Linie in einem ihrer Punkte, d. h. die Ebene der beiden von diesem ausgehenden Elemente derselben ist normal zur Tangentialebene der Fläche in diesem Punkte. Denn wenn $A$, $B$, $C$ drei auf einander folgende Punkte der Curve sind und $e$ die durch $B$ gehende Durchschnittslinie der Tangentialebenen der Fläche in $A$ und $C$, d. h. die entsprechende Erzeugende der Developpabeln ist, so sind $AB$ und $BC$ nach der Eigenschaft der Gleichwinkligkeit auf einander folgende Erzeugende eines geraden Kreiskegels von der Axe $e$; die Ebene $ABC$ d. h. die Schmiegungsebene der Curve ist eine Tangentialebene dieses Kegels und somit (§ 69.; 1.) normal zu der Ebene, welche die entsprechende Berührungserzeugende mit seiner Axe bestimmt, d. h. die Ebene $ABC$ ist normal zur Ebene $AB, e$ wie es der Satz behauptet.*)

Diese Betrachtung zeigt nun aber weiter, dass in jeder auf einer developpabeln Fläche gezeichneten Curve auf einander folgende Elementenpaare $AB$, $BC$ vorkommen können, welche bei der Entwickelung derselben in die nämliche gerade Linie fallen, d. h. welche in der durch Entwickelung transformierten Curve eine Inflexionsstelle bedingen, während sie auf der Developpabeln Elemente einer geodätischen Linie sind. Und es gilt der Satz: Der Punkt $B$ einer auf der developpabeln Fläche gelegenen Curve verwandelt

*) Wenn zwei gegebene Punkte $A$, $C$ in verschiedenen Ebenen mit einem Punkte $B$ in der Schnittlinie derselben so verbunden werden sollen, dass $AB + BC$ den kleinsten Werth hat, so müssen $AB$ und $BC$ mit der Schnittlinie gleiche Winkel einschliessen.

In Folge der allgemeinen Gültigkeit dieses Satzes werden die späteren Entwickelungen zeigen, dass die Erörterung des Textes für jede mögliche krumme Fläche gilt und dass also die entwickelte Eigenschaft der geodätischen Linie allgemein ist. In der That ist die geodätische Linie als kürzeste zwischen zwei einander hinreichend nahen Punkten auf einer beliebigen Fläche die Lage eines zwischen ihnen auf der Fläche gespannten vollkommen biegsamen Fadens; in jedem Punkte desselben wirken die gleichgrossen Endspannungen in den Richtungen der Nachbarelemente und die in der Ebene dieser letztern, d. h. der Schmiegungsebene, gelegene Mittelkraft derselben muss, als von der Fläche vollständig aufgenommen, in der Normale derselben durch ihren Fusspunkt wirken.

sich dann in einen Inflexionspunkt der transformierten Curve in der Entwickelung, wenn die Schmiegungsebene der Curve in $B$ normal ist zur Tangentialebene der developpabeln Fläche in $B$.

Die ebenen Schnitte von Kegel- und Cylinderflächen — als die einfachsten bisher hervorgetretenen Curven auf developpabeln Flächen — werden in der Abwickelung mit diesen im Allgemeinen Inflexionen zeigen, nämlich in den Transformierten derjenigen von ihren Punkten und Tangenten, in welchen die Schnittebene zur bezüglichen Tangentialebene des Kegels respective Cylinders normal ist.

Man findet dieselben für den Kegel (vergl. Fig. 144.), indem man von seiner Spitze $M$ die Normale zur Schnittebene fällt, und durch diese die möglichen Tangentialebenen an ihn legt; ihre Berührungserzeugenden $MJ_0$ und sie selbst bestimmen mit der Schnittebene die Punkte $J$ und Geraden $JT^*$, welche sich in der Abwickelung in die Inflexionspunkte und zugehörigen Inflexionstangenten der transformierten verwandeln. Sie sind in der Fig. 144. in die Abwickelung eingetragen mittelst der höher gelegenen Horizontalebene, für welche die Verticale durch $M''$ die erste Spur der Schnittebene ist. Für den Cylinder bestimmen die Richtung seiner Erzeugenden und die der Normalen zur Schnittebene die Stellung der Tangentialebenen, welche in gleicher Weise die Frage beantworten.

1) Denken wir die Tangentialebene des Kegels längs der Erzeugenden $e$ normal zur Schnittebene und zur Projectionsebene $XOZ$, die Erzeugende $e$ selbst parallel zur Axe $OZ$ gemacht, so dass die Schnittebene eine zweite projicierende Ebene wird, und sehen wir die Kegelfläche als eine Pyramide von sehr schmalen Seitenflächen an, deren vorhergehende und nächstfolgende in $g_1$ und $g_2$ die Ebene der Erzeugenden $e$ schneiden (Fig. 145.), so gelangen die Punkte $A$ und $C$, die in $A''$ und $C''$ projicierten zu $B$ nächstbenachbarten Punkte der Schnittcurve, bei der Umlegung dieser Nachbarflächen in die Fläche

Fig. 145.

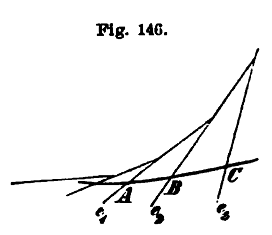
von $e$ nach $(A)_2$ und $(C)_2$ auf entgegengetzten Seiten von $s_2$, der Tangente der Entwickelung.

2) Man erörtere die Ausnahme, welche stattfindet, wenn $e$ zu $s_2$ normal ist.

3) Man zeige die Gültigkeit dieser Entwickelung für developpable Flächen im Allgemeinen.

4) Die Inflexionsstellen sind Punkte von unendlich grossem Krümmungsradius (§. 98.; 8.). Die Untersuchung der Veränderung, welche der Krümmungsradius einer Curve $A, B, C \cdots$ im Punkte $B$ durch die Entwickelung der Developpabeln erfährt, muss also auch auf sie führen. Da die Bogenlänge $ABC\cdots$ sich nicht ändert, so sind die Krümmungsradien indirect proportional den Winkeln $\gamma$ und $\gamma'$, welche die auf einanderfolgenden Elemente $AB$, $BC$ der Curve (Fig. 146.) und ihrer transformierten $A'B'$, $B'C'$ mit einander einschliessen. Ist dann

Fig. 146.




$$\angle ABC = \alpha,\ \angle(AB, e_2) = \beta_1,\ \angle(BC, e_2) = \beta_2,$$

so ist

$$\gamma = \pi - \alpha,\ \gamma' = \pi - (\beta_1 + \beta_2)$$

und da die Kantenwinkel $\alpha$, $\beta_1$, $\beta_2$ einer dreiseitigen Ecke angehören, die an der Kante $AB$ den Flächenwinkel $\varphi$ hat, den Neigungswinkel der Ebene der Curvenelemente $ABC$, welche in $B$ zusammenstossen, mit der Tangentialebene in $B$, so ist:

$$\cos\varphi = \lim \cdot \frac{\cos\beta_2 - \cos\alpha \cos\beta_1}{\sin\alpha \sin\beta_1}$$

$$= \lim \cdot \frac{-\cos(\gamma' + \beta_1) + \cos\gamma \cos\beta_1}{\sin\gamma \sin\beta_1},$$

d. h.
$$\cos\varphi = \frac{\gamma'}{\gamma};$$

oder nach der indirecten Proportionalität dieser Contingenzwinkel zu den bezüglichen Krümmungsradien hat man den Satz: Die Krümmungsradien einer Curve und ihrer Transformierten in entsprechenden Punkten

verhalten sich wie der *cosinus* des Winkels der Schmiegungsebene der Curve und der Tangentialebene der Developpabeln zur Einheit. Für $\varphi = 90^0$ wird daher der Krümmungsradius der Transformierten unendlich gross.

5) Man erörtere die Anzahl und die Bedingungen der Realität der Inflexionen für die Abwickelungen der ebenen (elliptischen, parabolischen, hyperbolischen) Schnitte des geraden Kreiskegels; resp. der elliptischen des geraden Kreiscylinders.

6) Man construiere einen ebenen hyperbolischen Schnitt des geraden Kreiskegels und seine Abwickelung für zwei reelle Inflexionen der Letzteren.

7) Die Entwickelung des elliptischen Schnittes des Rotationscylinders — die *Sinusoide* — zeigt zwei Scheitel-Punkte $A, B$, deren Tangenten zu den Erzeugenden normal sind, und zwei Inflexionspunkte $J_1, J_2$ mitten zwischen denselben. Was ergiebt sich für die Lage der Inflexionstangenten?

8) Können in den Abwickelungen der ebenen Schnitte des Rotationskegels Doppelpunkte oder insbesondere Rückkehrpunkte auftreten? Welches ist ihre Bedeutung?

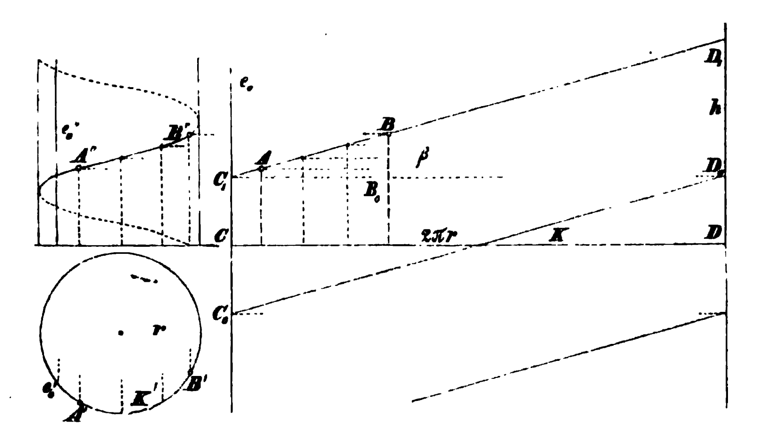
73. Die geodätische Linie auf der Fläche des Rotationscylinders nennt man die Schraubenlinie oder Helix; die von ihren Tangenten erzeugte Fläche ist die developpable Schraubenfläche.

Als wichtigste Anwendung des Vorigen und als erstes Beispiel einer gewundenen Curve und allgemeinen Developpabeln verdient sie eingehende Untersuchung.

Sind $A, B$ (Fig. 147.) die beiden Punkte der Cylinderfläche (Schraubencylinder), durch welche die Schraubenlinie bestimmt ist, so erlangt man ihre Darstellung in Parallelprojection auf zwei Ebenen, von denen die eine zur Cylinderaxe (Schraubenaxe) normal, die andere zu ihr parallel ist, wie folgt: Man verzeichnet in einem Parallelstreifen von der Breite $CD$ gleich dem Umfang $2\pi r$ des Normalschnittes $K$ vom Cylinder (vergl. § 71.; 1.) die Abwickelung seines Mantels unter Eintragung der Punkte $A$ und $B$ und zieht die

gerade Verbindungslinie derselben. Man theilt diese Letztere in eine genügend grosse Anzahl gleicher Theile, zieht durch die Theilpunkte die Erzeugenden des Cylinders bis zum Normalschnitt $K$, trägt die Fusspunkte derselben in die erste Projection von $A'$ nach $B'$ hin ein und bestimmt die zweiten Projectionen der bezüglichen Punkte der Schraubenlinie in den Perpendikeln aus den ersten zur Axe $OX$ durch Eintragen der aus der Abwickelung ersichtlichen Höhen derselben über dem Normalschnitt von dieser Axe aus oder von der ihr Parallelen, welche die zweite Projection des Normalschnittes darstellt. Das Stück der Schraubenlinie, welches

Fig. 117.



zwischen den auf einanderfolgenden Punkten derselben Cylinder-Erzeugenden in ihr gelegen ist, also $C_1 D_1$ für die durch $AB$ gehende, heisst ein Umgang derselben, oder ein **Schraubengang**. Die Differenz der in der Erzeugenden gemessenen Abstände dieser Punkte vom Normalschnitt, also $D_0 D_1 = C_0 C_1$ ist die **Ganghöhe** $h$ der Schraubenlinie. Den Winkel $D_1 C_1 D_0 = \beta$, das Complement des von der Schraubenlinie mit der Cylinder-Erzeugenden eingeschlossenen Winkels, nennen wir die **Neigung** der Schraubenlinie. Der Grundkreisradius $r$, die Ganghöhe $h$ und die Neigung $\beta$ sind in der Relation verbunden $2r\pi \cdot \tan\beta = h$. Die äquidistanten Parallelen $C_1 D_1$, $C_0 D_0, \cdots$ repräsentieren die einander folgenden Schraubengänge in der Abwickelung.

Die aufeinander folgenden Gänge der Schraubenlinie sind einander congruent und da man jeden beliebigen Punkt derselben als Anfangspunkt eines Ganges betrachten kann, so sind überhaupt gleichlange Stücke der Schraubenlinie einander congruent; oder die Schraubenlinie ist in sich selbst verschiebbar. Sie theilt diese Eigenschaft nur mit der Geraden und dem Kreis.

1) Wenn ein Punkt sich auf einem Kreise gleichförmig dreht, während dieser selbst bei unveränderter Stellung seiner Ebène sich gleichförmig so bewegt, dass sein Mittelpunkt eine zu dieser Ebene normale Gerade durchläuft, so beschreibt der Punkt eine Helix.
2) Die schrägen Parallelprojectionen (Schlagschatten für Sonnenlicht) der Schraubenlinie auf die Ebene des Grundkreises $K$ sind Cycloiden und zwar gemeine, verlängerte oder verkürzte Cycloiden, jenachdem die projicierenden Geraden zur Grundkreisebene gleiche, oder grössere oder kleinere Neigung haben als die Schraubenlinie selbst. (Vergl. §§ 82.; 3.; 84.; 3.)
3) Alle Parallelprojectionen der Schraubenlinie — orthogonale und schräge auf beliebige Ebenen — sind affine Figuren von Cycloiden.
4) Man erläutere an der orthogonal-axonometrischen Darstellung in Tafel I., § 74.; 10. die Form der Schraubenlinien **S** und **D**, von denen die eine Inflexionen, die andere Doppelpunkte zeigt. Beide haben gleiche Ganghöhe und verschiedene Grundkreisradien. Für eine zwischen den Letzteren liegende Grösse des Grundkreisradius würde das Bild der Schraubenlinie von derselben Ganghöhe Rückkehrpunkte zeigen. Wie wäre dieselbe zu ermitteln?
5) Die zweite Projection der Schraubenlinie besitzt Inflexionen in allen den Punkten, welche in der zweiten Projection ihrer Axe liegen; die zugehörigen Inflexionstangenten haben die Neigung $\beta$ gegen die Axe $OX$.
6) Die Schmiegungsebene der Schraubenlinie in jedem ihrer Punkte ist normal zur Tangentialebene des Cylinders in diesem Punkte.

7) Der Krümmungskreis und die Schmiegungskugel der Schraubenlinie haben für alle Punkte derselben die nämliche und ein und dieselbe Länge des Radius.

8) Der Krümmungsradius $\varrho$ für einen Punkt der Schraubenlinie fällt in die durch ihn gehende Normale zur Axe des Schraubencylinders; die Krümmungsmittelpunkte der Schraubenlinie bilden somit eine zweite Schraubenlinie von derselben Ganghöhe und gleich hoch gelegenem Anfangspunkt auf einem Cylinder von der nämlichen Axe und dem Grundkreishalbmesser $(\varrho - r)$.

74. Legt man durch einen Punkt $A$ der Schraubenlinie in der Abwickelung den Normalschnitt $K$ des Schranbencylinders und zieht durch den beliebigen Punkt $B$ derselben die Erzeugende, bis sie in $B_0$ den Normalschnitt schneidet, so ist nach §§ 71., 73. die Länge $AB_0$, d. i. die entsprechende Bogenlänge des Grundkreises, zur Bestimmung der Projection der Schraubenlinien-Tangente in $B$ zu gebrauchen: Man zieht in $B_0$ die Tangente des Grundkreises und trägt auf ihr die wahre Länge des Bogens $B_0 A$ in $B_0 S_1$ ab, dann ist $S_1$ der Durchstosspunkt der fraglichen Tangente in der Ebene des Grundkreises.

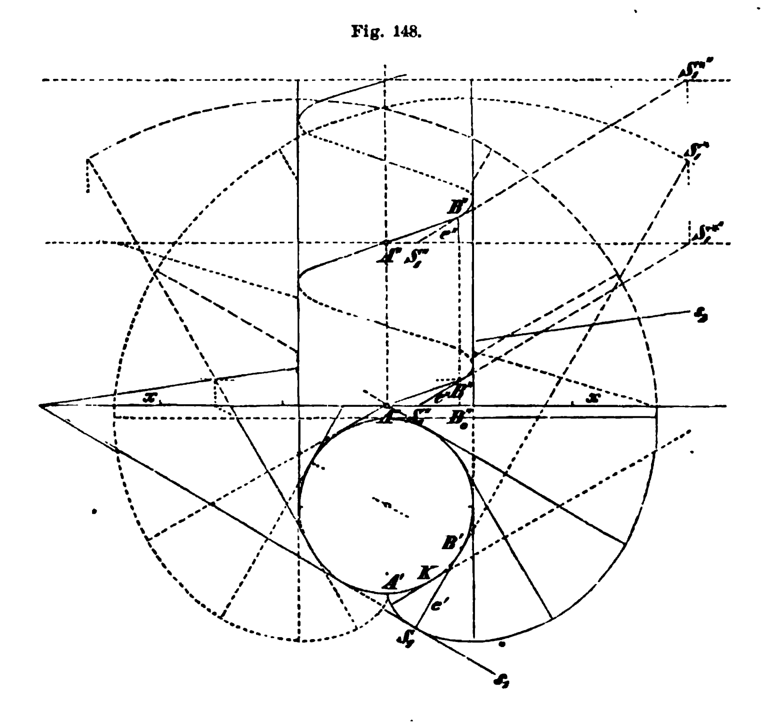
Man erhält somit den Ort der Durchstosspunkte der aufeinander folgenden Tangenten der Schraubenlinie in der Grundkreisebene oder in der Normalschnittebene des Schraubencylinders durch den Punkt $A$ derselben, indem man in den entsprechenden Punkten $B_0$ des Grundkreises die Tangenten dieses Letzteren zieht und auf dieselben von $B_0$ aus die jedesmalige Bogenlänge des Grundkreises von $B_0$ bis $A$ abträgt. Dieser Ort ist somit die Evolvente des Grundkreises $K$ für den Anfangspunkt $A$ (Fig. 148.), und zwar entspricht von den beiden Evolventen desselben, mit diesem Anfangspunkt die eine dem von $A$ aus aufsteigenden, die andere dem von $A$ aus absteigenden Theil der Schraubenlinie.

Jedem Schraubengang entspricht ein Umgang der Kreisevolvente. Wir sagen: Die Spur der developpabeln Fläche der Schraubenlinie in der Ebene des Grundkreises ist von den Evolventen desselben für den in ihm gelegenen Punkt der Schraubenlinie als Anfangspunkt gebildet.

Zeichnet man also für den in der ersten Projectionsebene gelegenen Punkt $A$ der Schraubenlinie die beiden Evolventen des Grundkreises, so sind dieselben die besagten Spuren der developpablen Schraubenfläche in dieser Projectionsebene; sie sind aber zugleich die ersten Projectionen ihrer Spuren in allen den zu $XOY$ parallelen Ebenen, welche durch die Punkte der Schraubenlinie in der von $A$ aus gehenden Cylinder-Erzeugenden gelegt sind — und zwar immer mit der nämlichen Beziehung wie vorher zu dem von da aus auf- und resp. absteigenden Gange.

Mit Hilfe dieser Bemerkungen verzeichnet man alle Tangenten der Schraubenlinie mit gleicher Genauigkeit. Denn ist die erste Projection $e'$ einer solchen gegeben, so ist von den

Fig. 148.



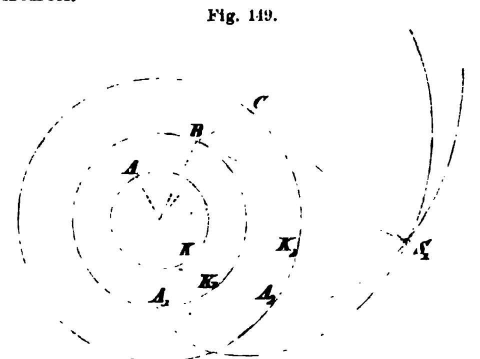

beiden ihrem Berührungspunkte zunächstliegenden rechtwinkligen Schnitten derselben mit den beiden bezeichneten Evolventen der eine $S_1$ ihr Durchstosspunkt in der Ebene des Grundkreises und der ersten Projection selbst, der andere $S_1^*$ ihr

Durchstosspunkt in der um die Ganghöhe über ihr gelegenen Parallelebene.

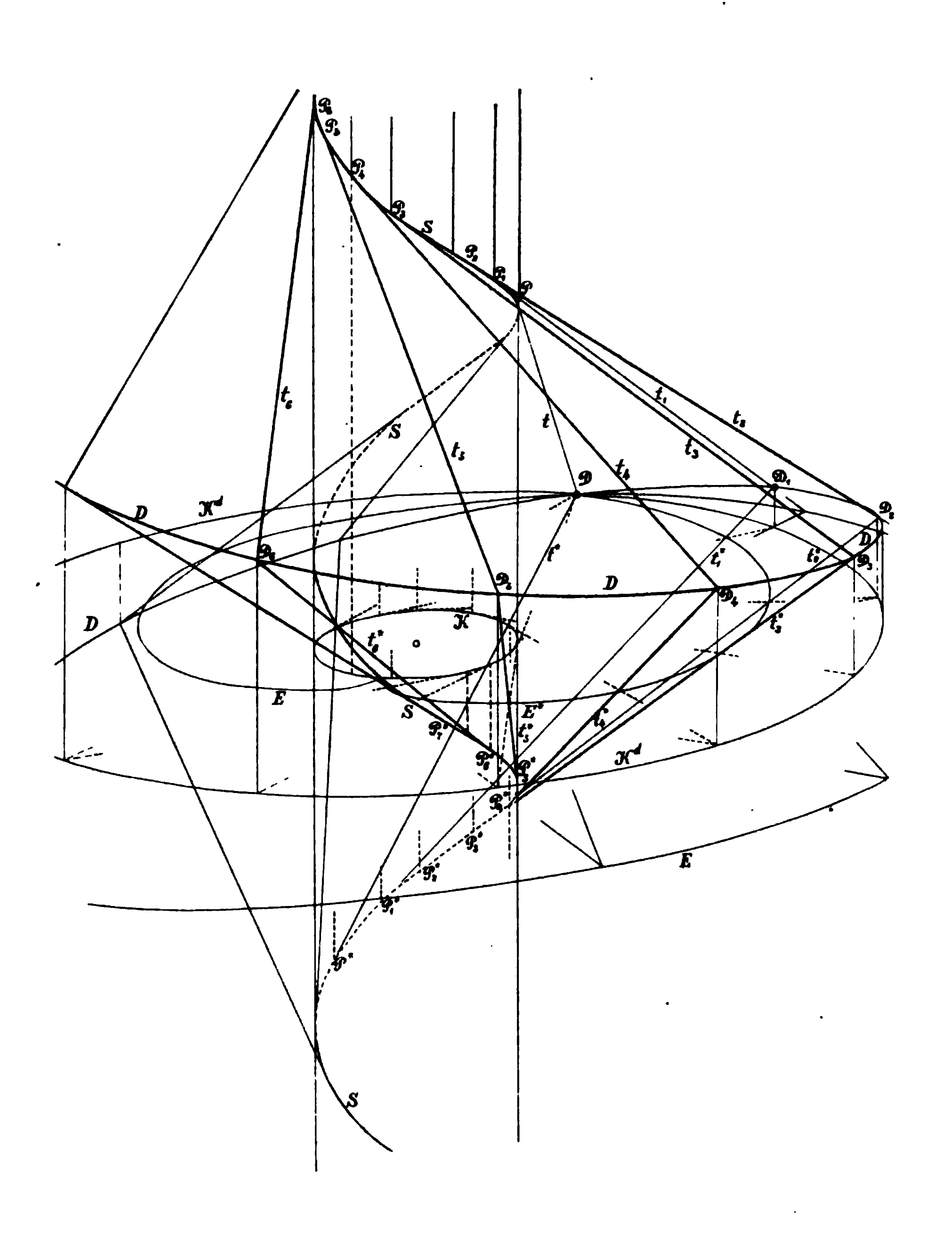
1) Für $XOY$ als Horizontalebene (Fig. 148.) ist die Tangente $e$ der Schraubenlinie in jedem ihrer Punkte die Falllinie der zugehörigen Schmiegungsebene $s_1$, $s_2$ derselben; alle Schmiegungsebenen der Schraubenlinie sind gleich geneigt gegen die Ebene des Grundkreises und gegen die Axe des Schraubencylinders. Die developpable Schraubenfläche ist eine developpable Fläche von gleichem Fallen.

2) Wenn man auf allen Tangenten der Schraubenlinie von den Berührungspunkten aus gleiche Stücke nach derselben Seite (aufwärts oder abwärts) abträgt, so bilden die Endpunkte derselben eine neue Schraubenlinie, welche auf einem Kreiscylinder von derselben Axe liegt. Concentrische Kreise aus dem Fusspunkt der Axe in der zu ihr normalen Projectionsebene sind die gleichnamigen Projectionen ebenso vieler Schraubenlinien von einerlei Ganghöhe und auf derselben developpablen Fläche — der Tangentenfläche der ursprünglichen.

Fig. 149.



3) Zwei Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe $h$ und einerlei Axe, die durch ihre Anfangspunkte $A_1$, $A_2$ und Grundkreise $K_1$, $K_2$ in $XOY$ gegeben sind, bestimmen eine developpable Schraubenfläche, auf der sie liegen. Man ermittle die Schraubenlinie $K$, deren Tangentenfläche diese Letztere ist. Die Figur 149. zeigt die Construction und soll erklärt werden.


S
t
t₁
t₂
t₃
t₄
t₅
t₆
D
E
S
D
E
S
D
E
S

4) Man zeige, dass zwei Curven in verschiedenen Ebenen und zwei Raumcurven überhaupt eine developpable Fläche bestimmen, auf der sie liegen.

5) Man bestimme einen Punkt der developpabeln Schraubenfläche und die zugehörige Tangentialebene derselben aus der gegebenen Projection desselben auf die zur Axe der Schraube normalen Ebene.

6) Die Tangente der Kreisevolvente in jedem ihrer Punkte ist normal zu der einen von demselben ausgehenden Tangente des Grundkreises — als Spur derjenigen Schmiegungsebene der Schraubenlinie in der Grundkreisebene, welche die Developpable längs der Erzeugenden berührt, von der jene Tangente die erste Projection ist.

7) Man construiere aus Ganghöhe und Grundkreishalbmesser die Projectionen einer Schraubenlinie mittelst ihrer Tangenten und bezeichne nachher auf denselben die zugehörigen Berührungspunkte.

8) Man zeichne die axonometrische Darstellung der Schraubenlinie und ihrer Tangentenfläche für zwei Gänge zwischen den Normalschnitten der Endpunkte.

9) Die beiden entgegengesetzten Evolventen **E**, **E*** des Grundkreises $K$ aus dem Anfangspunkt schneiden einander einmal bei jedem Umgang in dem Durchmesser des Anfangspunktes — also in $D$ zuerst (Tafel I.); jeder dieser Punkte ist der gemeinsame Durchstosspunkt von zwei Tangenten $t$, $t^*$ der Schraubenlinie **S**, von denen die eine zum untern, die andere zum obern Gange gehört. Mit der Verschiebung der Grundkreisebene rückt der Anfangspunkt und mit ihm diese Schnittpunkte $D', D'' \cdots$; $D_1, D_2, D_3, \cdots$; sie beschreiben Schraubenlinien **D** von derselben Ganghöhe wie jener. Mit andern Worten: Die developpable Schraubenfläche durchschneidet sich selbst in Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe und Axe mit der gegebenen, aber von wachsenden Grundkreishalbmessern, indem sie den ganzen Raum erfüllt. Die Figur zeigt eine

derselben in axonometrischer Projection. Man wird darin ihre Construction vollständig erkenenn.*)

10) In welcher Weise kann die Existenz dieser Doppelcurve **D** zur genauen Zeichnung der Schraubenlinie und ihrer developpabeln Fläche benutzt werden?

11) Da die Tangenten in Punkten der Schraubenlinie, welche derselben Erzeugenden des Cylinders angehören, parallel sind, so besitzt die developpable Schraubenfläche überdiess einen vielfachen Kreis im Unendlichen; die Richtung der Axe ist sein Mittelpunkt.

12) Man erörtere die orthogonal-projectivische Darstellung einer Schraubenlinie von gegebenem Anfangspunkt $A$ bei gegebener Ganghöhe $h$ und für eine durch ihre Projectionen bestimmte schräge Axe derselben.

75. Wenn man durch einen beliebigen Punkt des Raumes $M$ zu allen Erzeugenden $e_i$ einer developpabeln Fläche Parallellinien $e_i^*$ und zu allen Tangentialebenen $\mathbf{E}_i$ derselben Parallelebenen $\mathbf{E}_i^*$ legt, so sind jene die Erzeugenden desselben Kegels, den diese umhüllen, weil den aufeinander folgenden Erzeugenden $e_1$, $e_2$ der developpabeln Fläche in ihrer Tangentialebene die aufeinanderfolgenden parallelen Erzeugenden $e_1^*$, $e_2^*$ und ihre zu jener parallele Ebene entsprechen.

Wir nennen diesen Kegel den Richtungskegel der developpabelen Fläche. Für die developpabele Schraubenfläche insbesondere ist er ein Rotationskegel von verticaler Axe mit dem Winkel $\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$ als halben Winkel an der Spitze, seine zweiten Umrisse sind also den Inflexionstangenten der zweiten Projection der Schraubenlinie parallel.

Mit Hilfe dieses Kegels löst man folgende Aufgaben:

a) Man construiert die Schmiegungsebenen der Schraubenlinie durch einen Punkt $P$ im Raume (Fig. 150.) — indem man die gemeinschaftlichen Tangentialebenen des Parallelkegels aus $P$ zum Richtungskegel mit der developpabeln Schraubenfläche bestimmt; ihre ersten Spuren sind die gemeinsamen Tangenten der kreisförmigen ersten Spur

---

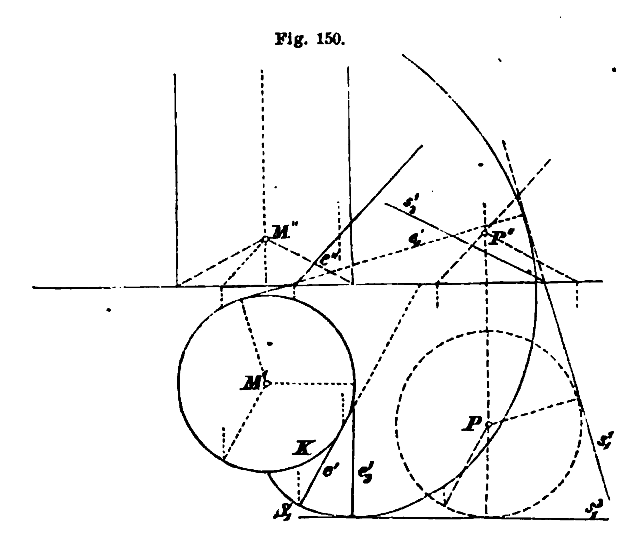
*) Der Schrift 𝔇, 𝔓, ⋯ der Tafeln entsprechen die **D**, **P**, ⋯ des Textes, der Schrift $D$, $S$, ⋯ dort die **D**, **S**, ⋯ hier.

des Kegels und der der Schraubenfläche, für welche diese Curven auf derselben Seite liegen. Die zugehörigen Erzeugenden $e_1$, $e_2$ der developpabeln Fläche und die entsprechenden Punkte der Schraubenlinie sind damit bestimmt.

b) **Man construiert die zu einer Geraden $g$ parallelen Schmiegungsebenen**, indem man diejenigen Tangentialebenen der developpabeln Schraubenfläche bestimmt, welche zu den Tangentialebenen des Richtungskegels parallel sind, die die Richtung der Graden $g$ enthalten. (§ 64., e; 8.)

c) **Man construiert die zu einer Ebene parallelen Tangenten der Schraubenlinie** — indem man die Erzeugenden des Richtungskegels aufsucht, welche der Parallelen dieser Ebene durch seine Spitze angehören; die gesuchten Geraden sind die ihnen parallelen Erzeugenden der developpabeln Schraubenfläche.

Fig. 150.

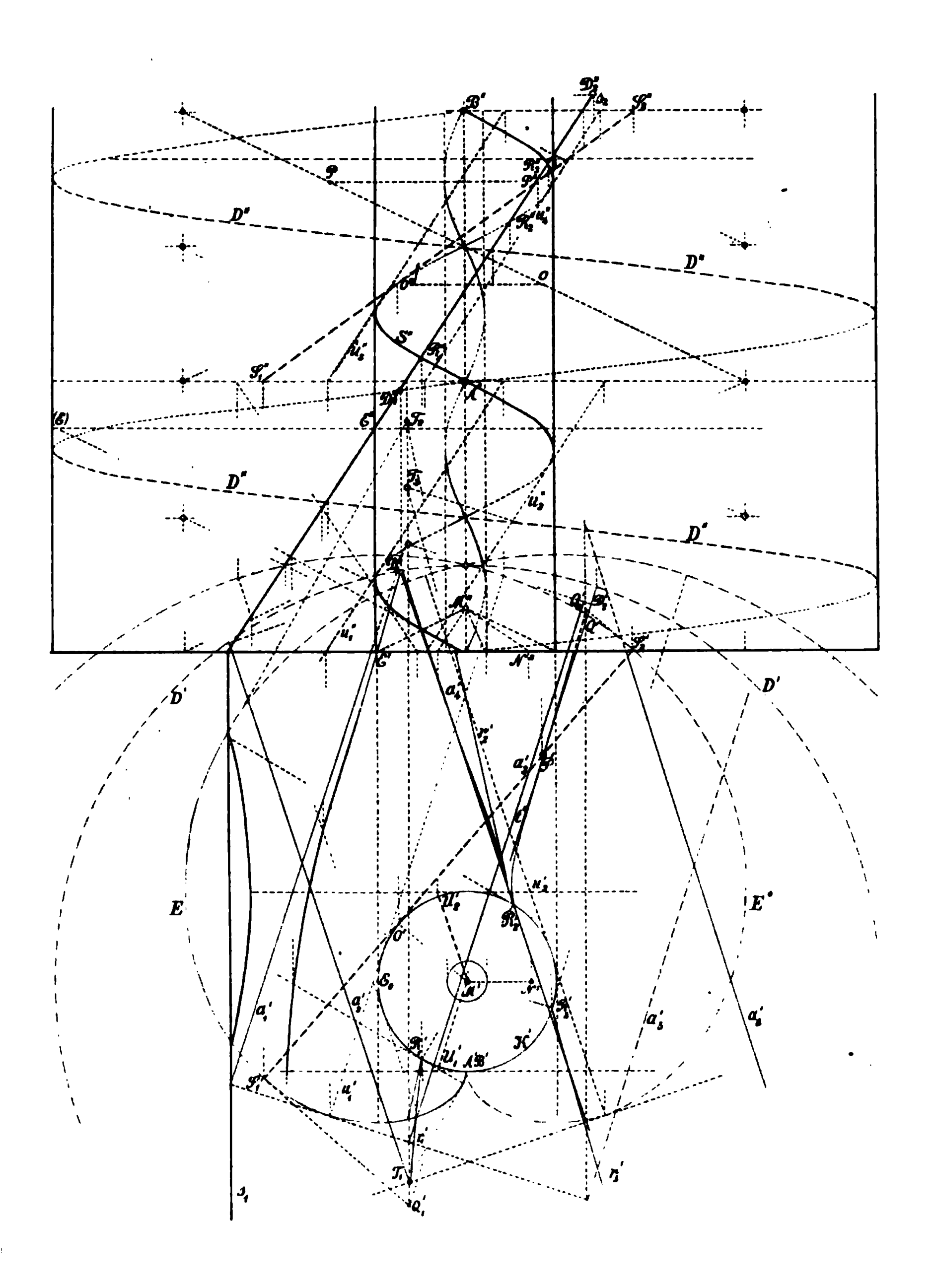



1) Man bestimme diejenigen Schmiegungsebenen einer gegebenen Schraubenlinie, welche der Halbierungsaxe $\mathfrak{h}$ parallel sind. (§ 46.; 4.)

2) Man construiere die zur Ebene $\mathbf{H}_{x'}$ parallelen Tangenten einer gegebenen Schraubenlinie, d. h. diejenigen, deren erste und zweite Projectionen zu einander parallel sind.

3) Man construiere diejenigen Tangenten einer Schraubenlinie mit zu $OZ$ paralleler Axe, welche zur zweiten Projectionsebene unter $30^0$ geneigt sind und erörtere die Bedingung ihrer Existenz.
4) Man bestimme diejenigen Schmiegungsebenen der Schraubenlinie, welche zu einer gegebenen Ebene normal sind.
5) Wenn ein Punkt der Raumcurve als Scheitel für den Richtungskegel ihrer Developpabeln genommen wird, so berührt diese den Kegel längs einer Erzeugenden nach der zweiten Ordnung, d. h. die Spur der Developpabeln und des Kegels in jeder die Spitze nicht enthaltenden Ebene berühren sich dreipunktig oder osculieren sich im Durchstosspunkt jener Erzeugenden.
6) Wie würde man für zwei developpable Flächen im Allgemeinen die Gruppen paralleler Schmiegungsebenen respective paralleler Erzeugenden bestimmen?
7) Man erläutere die Aufgaben a), b) als die Aufgabe der Bestimmung der Selbstschatten- und Schlagschattengrenzen der developpablen Schraubenfläche.
8) Die Beleuchtungsverhältnisse der developpabeln Schraubenfläche sind durch die des geraden Kreiskegels völlig bestimmt, der ihr Richtungskegel ist (vergl. §§ 124., 125.); ebenso die jeder developpablen Fläche durch die ihres Richtungskegels.

76. Einen ebenen Querschnitt der developpablen Schraubenfläche construiert man als den Ort der Durchschnittspunkte der Tangenten der Schraubenlinie und als die Enveloppe der Durchschnittslinien der Schmiegungsebenen der Schraubenlinie mit der Schnittebene. Man darf für diese Construction die zweite Projectionsebene — parallel zur Schraubenaxe — speciell so gewählt voraussetzen, dass sie zur Schnittebeue normal ist, dass also die zweite Projection der Schnittcurve in ihre zweite Spur fällt. Dann hat man die zweiten Projectionen der Punkte der Schnittcurve direct in dieser Spur auf denen der bezüglichen Tangenten der Schraubenlinien und erhält aus ihnen die ersten in den ersten Projectionen dieser Letzteren und man findet die ersten Durchstosspunkte der zugehörigen Tangenten der Schnittcurve in der



ersten Spur der Schnittebene und den ersten Spuren der jenen Tangenten entsprechenden Schmiegungsebenen oder den bezüglichen Tangenten der Kreisevolvente. (Tafel II.)

Specielles Verfahren erfordert nur die Bestimmung derjenigen Punkte der Schnittcurve, die in den zur Projectionsaxe normalen Tangenten der Curve liegen; in der Tafel II. ist der Punkt $E$ ein solcher, dem untern Gang entsprechend. Man hat $E''$ $(E)$ gleich $E_0 E'$.

Die Schnittcurve besitzt a) unendliche Aeste entsprechend denjenigen Tangenten $u_1$, $u_2$ (Tafel II.) der Schraubenlinie, welche der Schnittebene parallel sind und die Durchschnittslinien der Schnittebene mit den zu diesen Tangenten gehörigen Schmiegungsebenen der Schraubenlinie sind die entsprechenden Asymptoten der Schnittcurve. Legt man durch die Spitze $M$ des Richtungskegels eine zur Schnittebene parallele Ebene, so schneidet diese aus ihm die Erzeugenden $MU_1$, $MU_2$ aus, welche den fraglichen Tangenten der Schraubenlinie parallel sind (§ 75.; c.); schneidet diese Ebene den besagten Kegel nicht in reellen Erzeugenden, so hat die Schnittcurve keine unendlichen Aeste; berührt sie denselben längs einer Erzeugenden, so entspricht der Richtung dieser Erzeugenden ein unendlich ferner Punkt der Schnittcurve mit einer unendlich fernen Tangente, d. h. die Schnittcurve hat einen parabolischen Ast (§ 66; 10.). Alles diess wiederholt sich für jeden Umgang der Schraubenlinie und ihrer Developpabeln.

Die Schnittcurve ist b) im Allgemeinen in zwei Punkten für jeden Gang eine geodätische Linie der developpabeln Schraubenfläche, nämlich nach § 72. in denjenigen Punkten, wo die Schnittebene zur zugehörigen Tangentialebene der Schraubenfläche normal ist. Die zur Schnittebene normalen Tangentialebenen des Richtungskegels geben daher die Stellungen dieser letzteren Tangentialebenen und damit auf den entsprechenden Tangenten der Schraubenfläche die bezeichneten Punkte. In Tafel II. sind solche Punkte nicht vorhanden, weil die Normale der Schnittebene aus der Spitze ins Innere der Kegelfläche fällt.

Die Schnittcurve hat c) Doppelpunkte $D$ mit reellen und verschiedenen Tangenten in den Punkten, wo die Schnitt-

ebene denjenigen Schraubenlinien begegnet, die wir in § 74.; 9. als den Selbstdurchschnitt der Fläche bildend erkannt haben, weil sie in ihnen je zwei nicht aufeinander folgenden Tangenten der Schraubenlinie begegnet; die zweiten Projectionen derselben liegen in der zweiten Spur der Schnittebene und den zweiten Projectionen jener concentrischen Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe. Die Figur enthält zwei dieser Doppelpunkte $D_1$, $D_2$, aber für den letzteren nur den einen Curvenast.

Die Schnittcurve hat d) Rückkehrpunkte $R_1$, $R_2$, $R_3$ in den Durchschnittspunkten der Schnittebene mit der gegebenen Schraubenlinie; denn in jedem dieser Punkte wird sie von zwei aufeinander folgenden Tangenten der Schraubenlinie geschnitten und die dem erzeugten Doppelpunkt entsprechenden Tangenten $r_1$, $r_2$, $r_3$ fallen in der Schnittlinie der entsprechenden Schmiegungsebene mit der Schnittebene zusammen.

Man nennt daher die Schraubenlinie die Rückkehrkante der zugehörigen developpablen Schraubenfläche und allgemein jede Raumcurve die Rückkehrkante ihrer Tangentenfläche — weil auch das bezeichnete Verhalten ganz allgemein statt findet.

1) Man construiere in einem Doppelpunkt der ebenen Schnittcurve der developpabeln Schraubenfläche die entsprechenden Tangenten derselben.

2) Man bestimme die Schnittebene so, dass einer der besagten Doppelpunkte zum Rückkehrpunkte wird und characterisiere diesen Rückkehrpunkt näher.

3) Man construiere den ebenen Schnitt der developpabeln Schraubenfläche, welcher zwei gegebene Punkte der Schraubenlinie enthält und in einem derselben eine Gerade von gegebener erster Projection zur Rückkehrtangente hat.

4) Man verzeichne einen ebenen Schnitt der developpabeln Schraubenfläche mit parabolischem Ast.

5) Man construiere denjenigen ebenen Schnitt der developpabeln Schraubenfläche, welcher in einem gegebenen Punkte und zum zweiten mal auf einer gege-

benen Erzeugenden der Fläche Elemente einer geodätischen Linie der Fläche hat.

6) Wenn der Schnitt der developpabeln Schraubenfläche durch die Axe geht, so schneiden sich die Schnittlinien seiner Ebene mit den Schmiegungsebenen der in ihr gelegenen Punkte der Schraubenlinie in einem unendlich fernen Punkte; bei der Drehung der Ebene um die Axe durchläuft dieser Punkt die Stellung ihrer Normalebene. Aehnlich für die zur Axe parallelen Ebenen. Diese Eigenschaft gilt für jede Schnittebene und deren Drehung um eine Gerade. Wie manifestiert sich das erste in der Tafel II.?

7) Man bestimme die Schnittpunkte einer Geraden mit der developpabeln Schraubenfläche, indem man den Schnitt ihrer zweiten projicirenden Ebene mit derselben benutzt.

8) Man bestimme aus der zweiten Projection eines Punktes der developpabeln Schraubenfläche mit zu $XOY$ normalen Axe die ersten Projectionen seiner verschiedenen Lagen, indem man die zu $XOY$ parallele Ebene durch jenen Punkt und die Evolvente zu Hilfe nimmt, in welcher diese die developpable Schraubenfläche schneidet.

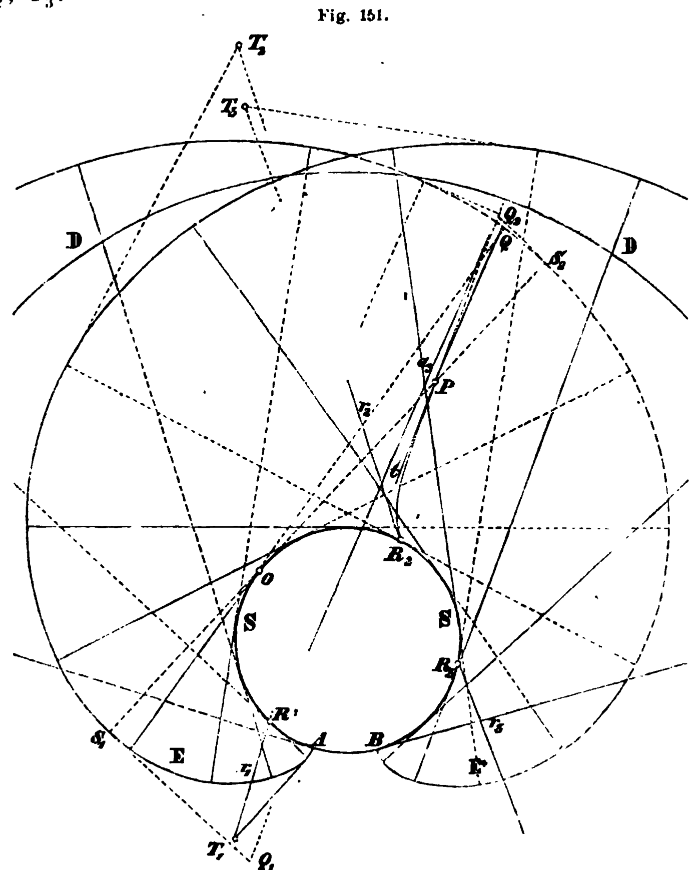
77. Für die Abwickelung der developpabeln Schraubenfläche und der auf ihr gelegenen ebenen Schnitte, etc. ergeben sich folgende Resultate: Wir haben gesehen, dass die Schraubenlinie eine Curve von constanter Krümmung ist (§ 73.; 7.) und schon vorher bemerkt, dass die Krümmungsradien einer Raumcurve sich bei der Abwickelung derselben mit ihrer developpabeln Fläche nicht verändern können (§ 63.; 4.), wie sich überdiess auch aus dem Satze des § 72. in 4. ergiebt für $\cos\varphi = 1$. Die Schraubenlinie verwandelt sich also bei der Abwickelung mit ihrer Tangentenfläche in eine ebene Curve von constantem Krümmungshalbmesser $\varrho$, d. i. in einen Kreis. Wäre der Halbmesser $\varrho$ dieses Kreises **S** nach seiner Beziehung zum Halbmesser $r$ des Schraubencylinders und zur Neigung $\beta$ der Schraubenlinie bekannt, so würde man den Kreis **S** verzeichnen, auf seine Peripherie

die Länge eines Schraubenganges $AB$ und beliebiger Theile desselben abtragen, als die Tangenten des Kreises in den bezüglichen Punkten die Entwickelungen der entsprechenden Tangenten der Schraubenlinie oder der Erzeugenden der developpabeln Fläche erhalten, endlich aber durch Abtragung der wahren Längen der Erzeugenden vom zugehörigen Punkte $O$ der Schraubenlinie bis zu einem Punkte $P$ der Fläche diesen in der Abwickelung angeben können. Die Wiederholung dieser Operation würde die Entwickelung der auf der Fläche gelegenen Curven, also insbesondere die ihrer ebenen Schnitte ergeben.

Auch die Tangenten solcher Curven erhält man durch die Benutzung der Spur der developpabeln Fläche in der ersten Projectionsebene. Man erkennt Letztere als die dem Anfangspunkt $A$ der Schraubenlinie auf dem Kreise **S** entsprechende Evolvente **E** desselben und insbesondere den Theil von ihr, welcher dem Bogen des Kreises **S** zwischen Anfangs- und Endpunkt eines Ganges entspricht, als die Abwickelung eines Umganges der Spur-Evolvente. Dazu giebt die Evolvente $\mathbf{E}^*$ von entgegengesetztem Abwickelungssinne für den Endpunkt $B$ des Ganges die Abwickelung der Spur der Developpabeln in der durch den Endpunkt des Ganges gehenden Normalebene zur Axe. Dann trägt man die Tangente $t$ einer auf der developpabeln Schraubenfläche gelegenen Curve im Punkte $P$ in die Abwickelung ein, indem man den Abschnitt $S_1T$ bestimmt, welchen sie auf der im Durchstosspunkt der betreffenden Erzeugenden gezogenen Tangente der Spur-Evolvente von jenem abgemessen bestimmt und diesen in die Abwickelung einträgt. Es ist offenbar, dass man die ausgezeichneten Punkte der Curven auf der Fläche, die Inflexionen, die Asymptoten derselben, ihre Doppelpunkte nebst den zugehörigen Tangenten durch dieselben einfachen Mittel in der Abwickelung verzeichnen kann. In der Figur 151. ist für die Schraubenlinie von § 76. für den Gang $AB$ derselben die Abwickelung des zwischen den Spurevolventen durch $A$ und $B$ gelegenen Theils verzeichnet und es sind darin für den dort construierten ebenen Querschnitt die drei Rückkehrpunkte $R_1$, $R_2$, $R_3$ mit ihren Tangenten eingetragen; von der Curve selbst erscheint der von $R_2$ nach oben gehende Ast $R_2PQ$ und es ist insbesondere

die Eintragung für den Punkt $P$ auf der Tangente der Schraubenlinie in $O$ — mittelst der wahren Länge $OP$ aus Tafel II. — und für die ihm entsprechende Tangente $t$ der Schnittcurve ersichtlich gemacht, mittelst des auf der Tangente der Evolvente **E** in $S_1$ durch sie abgeschnittenen Stückes $S_1 Q_1$; ebenso für die Rückkehrtangenten durch ihre Durchstosspunkte $T_1$, $T_2$, $T_3$.

Fig. 151.




Es erübrigt also nur die Bestimmung des Radius $\varrho$ des Kreises **S**; auch diese wird durch die Betrachtung des Vorganges der Abwickelung erreicht. Einem Gange der Schraubenlinie entspricht der Umfang des Grundkreises $2\pi r$ und seine Länge ist daher (§ 74.) $2\pi r : cos\beta$; im Sector vom Ra-

dius $\varrho$ bestimmt ein Gang daher den Centriwinkel vom Bogenmaass $2\pi r : \varrho \cos\beta$ und diess ist auch der Winkel derjenigen Erzeugenden in der Abwickelung, welche dem Anfangspunkt und dem Endpunkt eines Ganges entsprechen. Die Parallelen zu den Erzeugenden eines Ganges der Schraubenlinie bilden am Richtungskegel einen vollen Umgang oder Mantel und jede zwei derselben werden bei der Entwickelung seines Mantels in eine Ebene denselben Winkel mit einander bilden, wie die entsprechenden Erzeugenden der developpabeln Schraubenfläche in ihrer Abwickelung — vorausgesetzt nur, dass beide Abwickelungen in demselben Sinne geschehen sind. Denken wir den Richtungskegel über dem Grundkreis des Schraubencylinders beschrieben, so ist sein Basisumfang $2\pi r$ und die Länge seiner Erzeugenden zwischen Spitze und Basis $r : \cos\beta$, also der Centriwinkel des von der Abwickelung seines Mantels gebildeten Sectors im Bogenmaass $= 2\pi \cos\beta$. Man hat also nach dem Vorigen die zur Bestimmung von $\varrho$ führende Gleichheit

$$2\pi \cos\beta = \frac{2\pi r}{\varrho \cos\beta}, \text{ d. h. } \varrho \cos\beta : 1 = r : \cos\beta.$$

Wenn man also im Mittelpunkt des bezeichneten Richtungskegels eine Normale zur einen Umrisslinie desselben in $XOZ$ errichtet, so begrenzen die Letztere selbst und diese Normale in der Axe $OX$ den Krümmungsradius der Schrauenlinie. (Vergl. Tafel II., § 76.) Darnach sind alle vorher besprochenen Constructionen streng ausführbar.

1) Man construiere die Abwickelung der developpabeln Schraubenfläche und ihres ebenen Schnittes zwischen den beiden Spur-Evolventen in den Normalebenen zur Schraubenaxe durch den Anfangspunkt und den Endpunkt eines Ganges.
2) Der Gang der Schraubenlinie begrenzt auf dem Kreise vom Halbmesser $\varrho$ einen Bogen von dem Maasse $2\pi \cos\beta$; nämlich $= \frac{2\pi r}{\cos\beta} : \frac{r}{\cos^2\beta}$.
3) Die Schraubenlinien von derselben Axe und Ganghöhe auf der developpabeln Fläche (§ 74.; 2.) verwandeln sich bei der Abwickelung in Kreise, welche zum Kreis **s** concentrisch sind. Die Doppelcurven der Fläche

(§ 74.; 9.) werden auch zu solchen Kreisen und diese enthalten die Abwickelungen der Doppelpunkte aller auf der Fläche zu verzeichnenden Curven.

4) Der Halbmesser des Cylinders von derselben Axe, auf welchem die Schraubenlinie der Krümmungsmittelpunkte (§ 73.; 8.) einer gegebenen Schraubenlinie $(r, \beta)$ liegt, ist

$$\varrho - r = r^* = r \frac{1 - cos^2\beta}{cos^2\beta} = r \, tan^2\beta = r \cdot \left(\frac{h}{2\pi r}\right)^2.$$

Diess giebt die Relation

$$r r^* = \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2.$$

5) Für die Neigung $\beta^*$ der Schraubenlinie der Krümmungsmittelpunkte hat man

$$tan\,\beta^* = \frac{h}{2\pi r^*} = \frac{h}{2\pi r \; tan^2\beta} = \frac{1}{tan\,\beta} = cotan\,\beta;$$

d. h. die Tangenten der Schraubenlinie und die bezüglichen Tangenten der Schraubenlinie ihrer Krümmungscentra sind normal zu einander. Die Projectionen beider Schraubenlinien auf eine zur Axe parallele Ebene schneiden sich deshalb rechtwinklig in der Projection der Letzteren. (Vergl. Tafel II., § 76.)

6) Für $\beta = \frac{\pi}{4}$ oder $45^0$ oder $r = \frac{h}{2\pi} = 0{,}159 \cdot h$ ist die Schraubenlinie der Krümmungsmittelpunkte eine der gegebenen Schraubenlinie gleiche Schraubenlinie; für grössere Neigungen ist $r^*$ grösser, für kleinere kleiner als $r$.

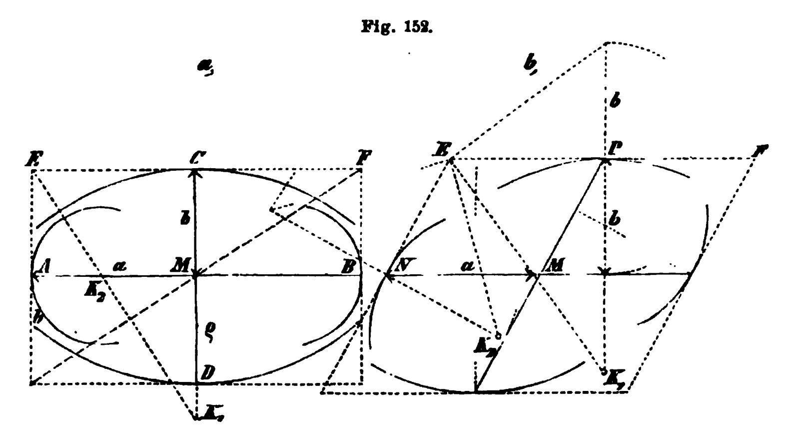
7) Man kann aus der Bestimmung des Krümmungshalbmessers der Schraubenlinie eine Formel und Construction für den Krümmungshalbmesser der Ellipse im Scheitel der kleinen Axe ableiten. (Vergl. § 36.; 2.) In § 63.; 6. ist bemerkt worden, dass der Krümmungshalbmesser einer Raumcurve im Punkte $P$ dem Krümmungshalbmesser ihrer Projection auf die zugehörige Schmiegungsebene gleich ist. Eine solche Projection der Schraubenlinie — durch Parallelen zur Axe $OZ$ — ist aber die Ellipse, in welcher

die Schmiegungsebene des Punktes den Schraubencylinder schneidet und diese hat $r$ und $r : cos\beta$ zu ihren Hauptaxen $b$ und $a$. Man erhält also für den fraglichen Krümmungshalbmesser den Ausdruck in den Halbaxen der Ellipse $a$ und $b$

$$\varrho = a^2 : b,$$

und begründet daraus die beistehende Construction a). Sie giebt auch den Krümmungshalbmesser für die Endpunkte der grossen Axe.

Fig. 152.

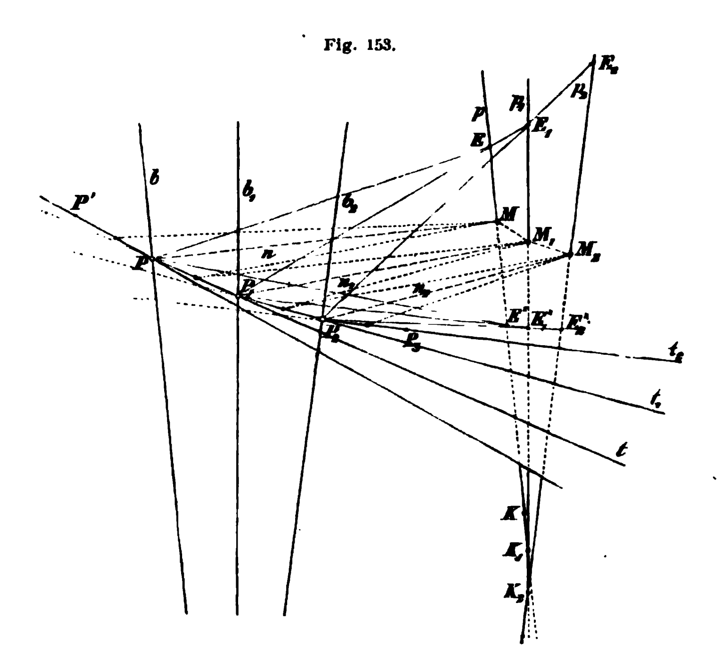



8) Da die Relation $\varrho = a^2 : b$ allgemein gilt, wenn $a$ der Halbdurchmesser des Kegelschnitts ist, welcher nach dem gegebenen Punkte $P$ der Curve geht und $b$ die normale Entfernung des Punktes $P$ von diesem, so erhält man die Construction b) für den Krümmungsradius eines beliebigen Punktes der Ellipse mittelst dieser Durchmesser.

78. An das Vorige knüpfen sich Begriffe und Erklärungen, die für alle Raumcurven gelten. Die Gerade, in welcher der Krümmungsmittelpunkt der Schraubenlinie für einen Punkt $P$ derselben liegt, ist eine Normale der Schraubenlinie, insofern sie zu ihrer Tangente im Punkte $P$ normal ist; sie ist insbesondere diejenige unter den Normalen der Curve im Punkte $P$, welche in der Schmiegungsebene dieses Punktes liegt und wird die Hauptnormale $n$ der Curve in $P$ genannt (Fig. 153.). Das Strahlenbüschel aller Normalen der

Curve in $P$ bildet die Normalebene derselben in $P$, die durch $P$ zur entsprechenden Tangente normal geht. Unter den Strahlen dieses Büschels ist ferner derjenige hervorzuheben, der auf der Schmiegungsebene und somit auf zwei Nachbartangenten der Curve zugleich normal steht und den man die Binormale $b$ nennt. Zwei auf einander folgende Normalebenen der Curve schneiden sich in einer zur betreffenden Schmiegungsebene normalen also zur Binormale parallelen Geraden, die durch den Krümmungsmittelpunkt $M$ in der Schmiegungsebene geht und die Polarlinie $p$ des Punktes

Fig. 153.




genannt wird. Zwei auf einander folgende Polarlinien schneiden einander in dem Durchschnittspunkt $K$ der drei bei ihrer Erzeugung benutzten auf einander folgenden Normalebenen, d. i. in dem Mittelpunkt der betreffenden Schmiegungskugel. Die Polarlinien bilden also die Erzeugenden einer developpabeln Fläche, der Polarfläche, welche von den Normalen umhüllt wird und deren Rückkehrkante der Ort der Mittelpunkte $K$, $K_1$, $K_2$, $\cdots$ der Schmiegungskugeln der Curve ist.

Die auf einander folgenden Hauptnormalen $n, n_1, n_2, \cdots$ liegen nicht paarweis in einer Ebene und bilden somit eine Regelfläche, d. i. eine durch Bewegung einer Geraden erzeugbare Fläche, die man zum Unterschied von den Developpabeln als eine windschiefe bezeichnet. (Vergl. § 102., f.) Auch die auf einander folgenden Binormalen $b, b_1, b_2, \cdots$ liegen nicht paarweis in einer Ebene und bilden daher eine andere windschiefe Regelfläche.

Legt man endlich durch jede Tangente der Raumcurve die Normalebene zur betreffenden Schmiegungsebene, oder durch die zugehörige Binormale, so erzeugen diese auf einander folgenden Ebenen eine developpable Fläche, für welche die Curve die Eigenschaft hat, dass ihre Schmiegungsebene immer normal zur betreffenden Tangentialebene ist, für welche die gegebene Curve also eine geodätische Linie ist und bei deren Abwickelung in eine Ebene sie sich somit in eine Gerade verwandeln muss; man nennt diese Fläche deshalb die rectificierende Developpable der Curve.

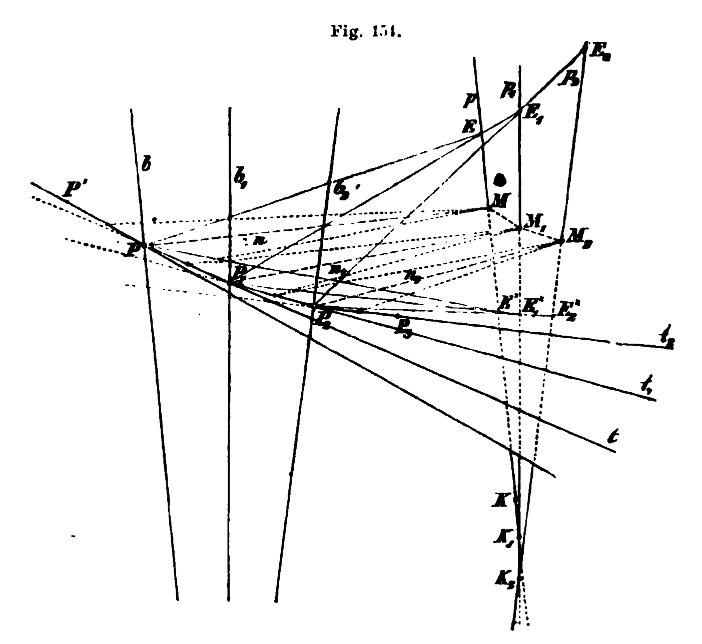
Wenn eine Tangente der Curve auf ihr ohne Verschiebung gleitet (wie bei der Bildung der Kreisevolvente), so beschreibt jeder ihrer Punkte eine Curve auf der developpabeln Fläche der Raumcurve, welche man eine Evolvente derselben nennt; sie ist normal zu den Curventangenten in den Punkten derselben. Jeder Punkt in der Tangente erzeugt eine Evolvente; die Tangentenfläche ist der Ort aller Evolventen.

Wenn von einem Punkte $P$ der Raumcurve (Fig. 154.) nach einem Punkte $E$ der entsprechenden Polarlinie eine Gerade gezogen wird, so schneidet diese verlängert in einem Punkte $E_1$ die nächstfolgende Polarlinie, und verbindet man $E_1$ mit dem folgenden Punkte $P_1$ der Curve durch eine Gerade, so schneidet diese die folgende Polarlinie in $E_2$, etc. So entsteht zu jedem Punkte $E$ der Polarlinie eines gegebenen Punktes $P$ der Curve eine neue Curve auf der Polarfläche, welche mit der ursprünglichen in der Beziehung steht, dass ihre Tangenten als in den Normalebenen von jener gelegen zu den entsprechenden Tangenten derselben normal sind; es ist also nach dem Vorigen die Curve der $P$, d. i. die gegebene Curve, Evolvente der neugebildeten Curve der $E$, d. h. diese Letztere ist eine Evolute der gegebenen. Jeder Punkt der Polarlinie giebt einer Evo-

lute der Curve den Ursprung, die Polarfläche ist der Ort aller Evoluten.

1) Die Evolventen einer Raumcurve haben die nämliche durch diese selbst gehende Polarfläche, nämlich die rectificierende Developpable der Raumcurve.
2) Die Polarlinie ist die Axe der geraden Kreiskegel, welche über dem Krümmungskreis stehen.
3) Wenn ein schwingender Massen-Punkt eine Raumcurve beschreiben soll, so muss er an zwei undehnbaren und vollkommen biegsamen Fäden aufgehangen sein,

Fig. 154.




die sich längs zweier Evoluten $E$, $E^*$ der Raumcurve auf ihre Polarfläche aufwickeln. (Siehe Fig. 154.)
4) Die Evoluten sind geodätische Linien der developpabeln Polarfläche der Curve, d. i. durch Abwickelung derselben werden sie alle zu Geraden.
5) Die Evolventen einer Raumcurve sind Curven auf ihrer developpabeln Fläche von der Eigenschaft, dass die Normalen der letzteren in ihren auf einander folgenden Punkten sich schneiden. Ein anderes System

von Linien dieser Art auf der developpabeln Fläche bilden die geraden Erzeugenden derselben. Man bezeichnet beide Systeme von Linien, welche sich überall rechtwinklig durchschneiden, als die Krümmungslinien der developpabeln Fläche. (Vergl. § 103.; c.)

6) Die Krümmungslinien der Kegelflächen sind die geraden Erzeugenden derselben und die Curven der vom Mittelpunkt äquidistanten Punkte in diesen; für die Cylinderflächen treten an Stelle der letzteren Curven ihre Normalschnitte.

7) Die Linie des kürzesten Abstandes von zwei auf einander folgenden Hauptnormalen ist parallel zur entsprechenden Erzeugenden der rectificierenden Fläche der Curve.

8) Die Tangente der Curve ist die Linie des kürzesten Abstands zwischen zwei auf einander folgenden Binormalen derselben.

9) Die Polarlinien der Schraubenlinie (Fig. 155.) sind die Tangenten der neuen Schraubenlinie, welche der Ort der Mittelpunkte der Krümmungskreise und Schmiegungskugeln derselben ist (§73.; 6.u.77.; 4, 5.) Die rectificierende Developpable der Schraubenlinie ist der Schraubencylinder. Die Evolventen der Schraubenlinie sind die Evolventen der entsprechenden Normalschnitte dieses Cylinders. Die Schraubenlinien desselben Cylinders mit demselben Anfangspunkt sind die Evoluten der Grundkreisevolvente für diesen Punkt.

10) Die Beziehung der beiden Schraubenlinien, von denen die zweite den Ort der Krümmungscentra der ersten bildet, ist gegenseitig, die erste ist auch der Ort der Krümmungscentra der zweiten; sie haben die Hauptnormalen gemein, die Tangenten- und Evolventenfläche der einen ist die Polaren- und Evolutenfläche der andern.

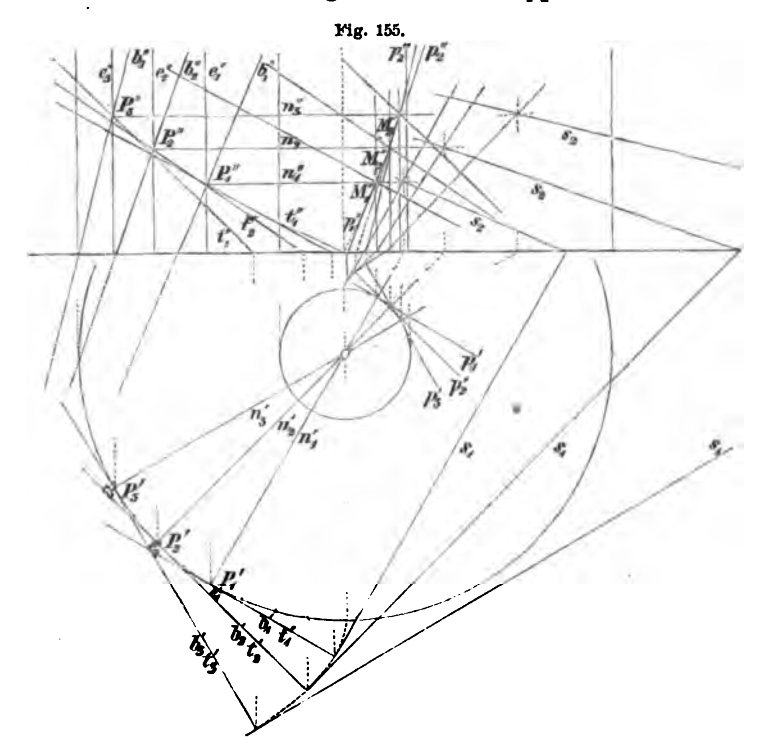
11) Für eine ebene Curve ist die Tangentenfläche und die Fläche der Hauptnormalen ihre Ebene selbst; alle ihre Evolventen liegen in dieser. Die Polarfläche und die Fläche der Evoluten wird zu einem zur Ebene

der Curve normalen Cylinder (vergl. 9.); die Fläche der Binormalen und die rectificierende Fläche vereinigen sich in der Cylinderfläche, für welche die Curve der Normalschnitt ist.

12) Welches sind die Besonderheiten der vorigen Gebilde für eine auf der Oberfläche einer Kugel gelegene Curve?

13) Man zeige, dass sich jede Raumcurve mit einer gewissen durch sie gehenden developpabeln Fläche in

Fig. 155.



einen Kreis abwickeln lässt, dessen Halbmesser innerhalb gewisser Grenzen willkürlich ist.

14) Man erörtere die Bedingung, unter welcher eine developpable Fläche sich auf eine andere developpable Fläche abwickeln lässt.

15) Wenn eine Kegelfläche auf eine mit ihr concentrische andere Kegelfläche abgewickelt wird, so beschreibt

ein mit ihr fest verbundener Punkt eine (sphärische) Raumcurve, deren Construction erörtert werden soll; besonders in dem Specialfall gerader Kreiskegel.

16) Man erläutere die Construction der Cycloiden durch die Abwickelung des geraden Kreiscylinders auf die Ebene oder auf einen andern geraden Kreiscylinder.

17) Man erkläre die Entstehung der Evolventen ebener Curven, insbesondere der Kreisevolvente nach dem Vorhergehenden.

79. Zu weiteren Untersuchungen über die Raumcurven veranlasst die Betrachtung der Durchschnittscurven von zwei Kegel- oder Cylinder-Flächen; insbesondere die der Durchschnittscurven von zwei Kegeln zweiten Grades, welche zumeist begegnen.

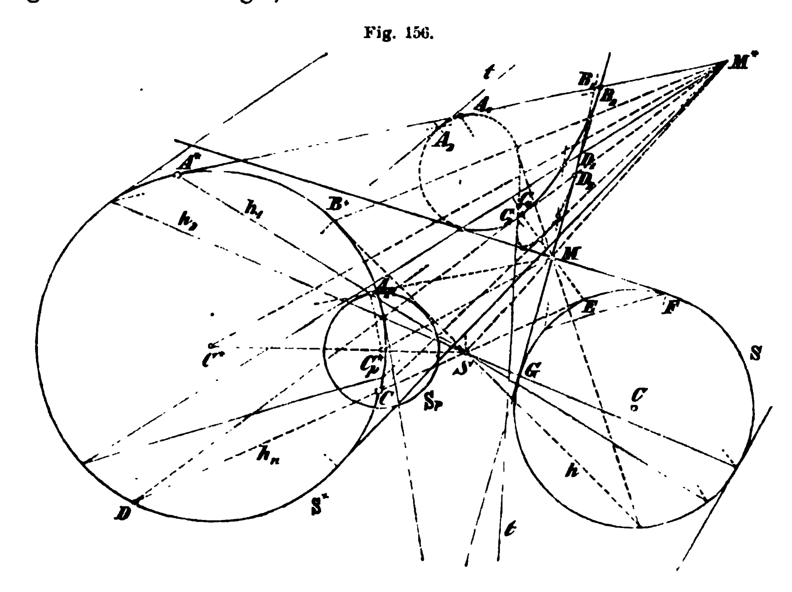
Die Construction der Durchschnittscurve von irgend zwei durch die Spitzen $M$, $M^*$ und die respectiven ebenen Leitcurven $L$, $L^*$ gegebenen Kegelflächen ergiebt folgende Momente. Jede Ebene, welche die Spitzen $M$, $M^*$ beider Kegelflächen enthält, schneidet beide in Erzeugenden und die zur nämlichen Ebene gehörenden Erzeugenden der einen und der andern Kegelfläche schneiden einander in Punkten der Durchdringungscurve; die beiden Tangentialebenen der Kegelflächen, welche dieselben in den Erzeugenden eines Punktes der Durchdringungscurve berühren, schneiden einander in der entsprechenden Tangente der Letztern. Bezeichnet man also durch $D$, $D^*$ die Schnittpunkte der Geraden $MM^*$ mit den Ebenen der Leitcurven $L$, $L^*$ respective, durch $d$ die Schnittlinie dieser Letzteren und durch $D_1$ den Punkt derselben, welchen eine Ebene des Hilfsebenenbüschels — also $MM^*D_1$ — enthält, so sind $D_1D$ und $D_1D^*$ die Durchschnittslinien dieser Ebene mit den Leitcurvenebenen und die Schnittpunkte $A_1$, $B_1$, $\cdots$; $A_1^*$, $B_1^*$, $\cdots$ welche diese mit den respectiven Leitcurven $L$, $L^*$ bestimmen, liefern mit $M$, $M^*$ verbunden die Erzeugenden beider Kegelflächen, welche in dieser Hilfsebene liegen. (Vergl. § 56.; 2.) Ist $P$ ein Durchschnittspunkt von zwei solchen Erzeugenden, die in $A_1$ und $B_1^*$ ihre Leitcurven schneiden, so bestimmen die Tangenten von $L$, $L^*$ in $A_1$, $B_1^*$ respective mit $M$, $M^*$ die beiden Ebenen, deren Durchschnittslinie die Tangente der Durchdringungs-

curve in $P$ ist. Die Aufeinanderfolge dieser Tangenten erzeugt die developpabele Fläche dieser Raumcurve.

Nehmen wir die Leitcurven als Spuren, insbesondere als gleichnamige Spuren an, so sind durch den entsprechenden Durchstosspunkt $S_i$ ($S$ in Fig. 156.) der Geraden $MM^*$ die gleichbenannten Spuren der Ebenen des Hilfsebenenbüschels zu legen und man erhält in den Schnitten einer solchen mit den Spuren der Kegel die gleichnamigen Durchstosspunkte der zugehörigen Erzeugenden.

Zieht man dann in den Durchstosspunkten der Erzeugenden beider Kegel, die sich im Punkte $P$ der Curve schnei-

Fig. 156.




den, die Tangenten der betreffenden Leitcurven, so geben diese als die gleichnamigen Spuren der bezüglichen Tangentialebenen den Durchstosspunkt der entsprechenden Tangente und damit die Bestimmung derselben. (Fig. 156. Tangenten $t$ in $A_2$ und $C_2$.)

Während die Spur der Hilfsebene sich um den Durchstosspunkt $S_i$ stetig dreht, rücken die auf ihr liegenden Erzeugenden auf beiden Kegeln und in Folge dessen die entsprechenden Punkte der Durchdringungscurve in ihren Gruppen stetig fort und man sichert durch die zweckmässige Bezeich-

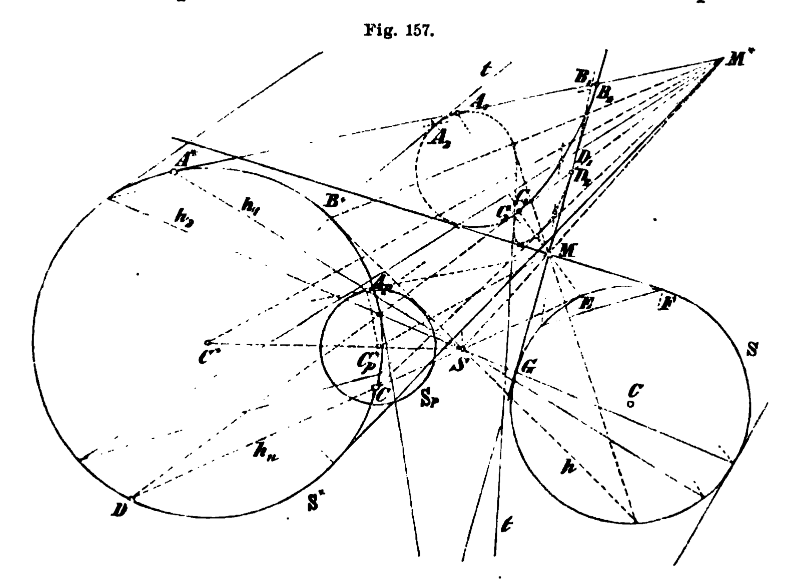
nung der Punkte die Ordnung ihrer Verbindung. Man wird etwa allen Punkten der ersten Hilfsebene von der Spur $h_1$ den Index 1 und die Buchstaben $A, B, C, D \cdots$ geben; bei der nächstfolgenden zweiten Hilfsebene $h_2$ aber in den Nachbarpunkten, d. i. den Schnittpunkten der den vorigen benachbarten Erzeugenden die gleichen Buchstaben mit dem Index 2 anwenden; etc. Man erhielte so die Gruppen von Nachbarpunkten $A_1, A_2, \cdots$; $B_1, B_2, \cdots$; $C_1, C_2, \cdots$; etc. (Fig. 157.) und in gleicher Weise die zugehörigen Tangenten in entsprechenden Gruppen $a_1, a_2, \cdots$; $b_1, b_2, \cdots$; etc., nämlich durch die Gruppen der Durchstosspunkte derselben in der Leitcurvenebene. Immer wenn die Spur der Hilfsebene in die Lage einer Tangente einer der Leitcurven kommt, erhält man die Verbindung von verschiedenen Gruppen der Curvenpunkte, respective Curventangenten durch ihre gemeinschaftlichen Elemente; die Durchstosspunkte der letztern in der Leitcurvenebene bilden so gleichfalls eine Curve, die Spur der developpabeln Fläche der Tangenten der Durchdringungscurve in der Leitcurvenebene. Die Hilfsebene oder ihre Spur aus $S_i$ beschreibt ein vollständiges Büschel nur dann, wenn jede durch den Durchstosspunkt $S_i$ gehende Gerade beide Spurcurven schneidet; im Allgemeinen bewegt sie sich zwischen zwei Grenzlagen $h$ und $h_n$, in denen sie die eine der Spuren — wir denken sie als geschlossene Curven, wenn wir diess ohne Ausnahme sagen — berührt und die andere noch schneidet.

Man kann den Fall, wo die Grenzlagen Tangenten der Spur desselben Kegels sind, als eine Durchdringung des einen Kegels durch den andern, von dem Fall, wo die eine von ihnen Tangente der Spur des einen, die andere Tangente der Spur des andern ist als einer gegenseitigen Eindringung unterscheiden. Die Figur 157. zeigt den letztern Fall, jedoch nur in einer, etwa der ersten Projection. Alles diess gilt gleichmässig für Central- und für Parallel-Projectionen und so für Cylinder- wie für Kegel-Flächen.

1) Unendliche Aeste der Durchdringungscurve entspringen aus den Paaren paralleler Erzeugenden beider Kegelflächen. Um dieselben zu ermitteln, denken wir durch die Spitze $M$ die Parallelen zu den Erzeugenden des Kegels $M^*$ und bestimmen dadurch

die gleichnamige Spur des parallel sich selbst nach $M$ verlegten Kegels $M^*$, $\mathbf{S}_i^*$; dann sind die Schnittpunkte derselben mit der Spur von $M$ die Durchstosspunkte der Erzeugenden von $M$, zu welchen parallele Erzeugende auf $M^*$ existieren und die Paare ihrer Durchstosspunkte liegen je in der Spur einer Ebene des Hilfsebenenbüschels. Die gegebene Spur von $M^*$ und die des Parallelkegels aus $M$ sind ähnliche und ähnlich gelegene Curven mit dem gleichnamigen Durchstosspunkt der Geraden $MM^*$ als Aehnlichkeitspunkt.

Fig. 157.



In der Fig. 157. ist in $\mathbf{S}_p$ die Spur des Parallelkegels zu $M^*$ aus $M$ eingetragen; sie schneidet $\mathbf{S}$ nicht, die Durchschnittscurve besitzt keine unendlichen Aeste. In den Richtungen der so bestimmten parallelen Erzeugenden geht die Durchdringungscurve in's Unendliche und zwar immer von zwei benachbarten Gruppen aus auf entgegengesetzten Mänteln der Kegelflächen.

Die zugehörigen Tangenten oder die Asymptoten der Durchdringungscurve sind die Schnittlinien der Tangentialebenen der Kegel je in den Paaren der

parallelen Erzeugenden. Die entsprechenden Schmiegungsebenen sind als asymptotische Ebenen der Curve anzusehen.

2) Man gebe die Bedeutung der besondern Hilfsebenen, deren Spuren durch die Punkte $A^*, B^*, ., . E, F, G$ gehen, für die Durchdringungscurve an, welche in der Fig. 157. construiert ist.

3) Wenn entsteht in der Durchdringungscurve ein parabolischer Ast?

4) Man erläutere die Construction der Paare paralleler Erzeugenden in Centralprojection.

5) Die Durchdringungscurve einer Kegel- und einer Cylinderfläche hat unendliche Aeste nur dann, wenn unter den Erzeugenden des Kegels eine Parallele zu den Erzeugenden des Cylinders vorkommt. Die Durchdringungscurve von zwei Cylinderflächen hat keine unendlichen Aeste, wenn nicht ihre Leitcurven selbst in's Unendliche gehen.

6) Man construiere die Durchdringungscurve von zwei Kegelflächen mit kreisförmigen Spuren in Centralprojection durch Punkte und Tangenten für den Fall von zwei reellen unendlichen Aesten — indem man die Fluchtkreise so anordnet, dass sie einander schneiden.

7) Es sind die Richtungen zu bestimmen, in denen das Bild der Durchdringungscurve in's Unendliche geht. Ihre Zahl und Lage bestimmt sich durch die Zahl und Lage der Schnittpunkte der Curve mit der Verschwindungsebene, d. h. der Punkte, welche die Spuren der Kegelflächen in der Verschwindungsebene mit einander gemein haben. Sie kann daher im Falle kreisförmiger Spuren nur zwei sein.

8) Man construiere in einem Punkte $P$ der Durchdringungscurve von zwei Kegelflächen die entsprechende Schmiegungsebene — nach § 63.; 7.

9) Man erläutere das besondere Verhalten der durch das Projectionscentrum gehenden Hilfsebene in Bezug auf die Construction der bezüglichen Punkte und Tangenten der Schnittcurve — in beiden Projectionsarten.

10) Kann eine Schmiegungsebene der Durchdringungscurve von zwei Kegelflächen ganz in unendlicher Ferne liegen und unter welchen Bedingungen?

Man erläutere dieselben nach ihrer constructiven Form für Central- und für Parallel-Projection.

11) Durch centrische Collineation (§ 41.; 3.) kann jeder Kegel so transformiert werden, dass eine bestimmte unter seinen Tangentialebenen unendlich fern ist; zwei Kegelflächen zweiten Grades also stets so, dass beide Cylinder zweiten Grades und insbesondere der eine ein parabolischer Cylinder ist. Man erläutere die Besonderheiten der Construction der Durchdringung von zwei Cylindern zweiten Grades, deren einer parabolisch ist.

80. Sind die Leitcurven der Kegel algebraische Curven, also von bestimmten Ordnungszahlen $m$ und $m^*$ respective, so sind die Kegel von den gleichen Ordnungszahlen (§ 65.), die Ebenen des Hilfsebenenbüschels schneiden sie also, reelle und nicht reelle Erzeugende gleichmässig gezählt, in $m$, respective $m^*$ Erzeugenden und jede derselben enthält somit $mm^*$ Punkte der Durchdringungscurve. Auch andere als die Ebenen des Hilfsebenenbüschels schneiden diese Curve in $mm^*$ Punkten, weil sie die Kegel in Curven von den Ordnungen $m$ und $m^*$ schneiden und solche $mm^*$ gemeinsame Punkte haben, reelle und nicht reelle — entsprechend den gemeinsamen Auflösungen der sie in Punktcoordinaten darstellenden Gleichungen von den Graden $m$ und $m^*$. (§ 137.) Man nennt das Product $mm^*$ die Ordnungszahl der Raumcurve, in welcher sich die Kegel durchdringen.

In demselben Bezug zur algebraischen Ausdrucksweise spricht man die Sätze aus: Zwei Flächen von den Ordnungen $m_1$, $m_2$ haben eine Curve von der Ordnung $m_1 m_2$ gemein. Die Flächen von den Ordnungen $m_1$, $m_2$, $m_3$ schneiden sich in $m_1 m_2 m_3$ Punkten; eine Curve von der Ordnung $m_1 m_2$ wird von einer Fläche der Ordnung $m_3$ in $m_1 m_2 m_3$ Punkten geschnitten.

In demselben Sinne ist es endlich begründet zu sagen: Wenn eine Curve von der Ordnung $m_1$ in der Ebene mit einer Curve von der Ordnung $m_2$ mehr als $m_1 m_2$ Punkte ge-

mein hat, so hat sie alle ihre Punkte mit ihr gemein. Wenn eine Raumcurve von der Ordnung $m_1$ mit einer Fläche von der Ordnung $m_2$ mehr als $m_1 m_2$ Punkte gemein hat, so liegt sie ganz in derselben; etc. (§ 143.)

Wir werden von diesen Sätzen und den ihnen nach dem Princip der Dualität entsprechenden jetzt und später Gebrauch machen.

Die Durchdringungscurve von zwei Kegelflächen zweiten Grades ist somit eine Raumcurve von der vierten Ordnung. Als solche kann sie vier unendlich ferne Punkte also unendliche Aeste und vier Asymptoten haben — wenn nämlich die Fluchtcurven beider Kegel in der centralprojectivischen Darstellung derselben oder die gleichnamigen Spuren der durch Parallelverschiebung concentrisch gemachten Kegel in der Parallelprojection sich in vier Punkten schneiden.

1) Hinsichtlich der unendlichen Aeste und Asymptoten der Raumcurve vierter Ordnung aus zwei Kegeln zweiten Grades sind folgende Fälle möglich:

a) Die vorbezeichneten Curven zweiter Ordnung schneiden sich in vier reellen und verschiedenen Punkten; vier unendliche Aeste mit reellen Asymptoten.

b) Diese Curven schneiden sich in zwei reellen Punkten; zwei unendliche Aeste mit angebbaren Asymptoten.

c) Diese Curven schneiden sich nicht in reellen Punkten; die Curve besitzt keine unendlichen Aeste, sie ist im Endlichen abgeschlossen.

Als Grenzfälle treten hinzu: d) dass die bezeichneten Curven zweiten Grades sich in zwei reellen Punkten schneiden und in einem Punkte berühren;

e) dass sie das letztere, aber nicht das erstere thun — welches eine unendlich ferne Asymptote in bekannter Ebene oder einen parabolischen Ast und entweder d) zwei gewöhnliche unendliche Aeste mit ihren Asymptoten oder e) keine solchen bedingt.

Sodann f) dass diese Curven sich in zwei Punkten berühren, welches zwei parabolische Aeste mit sich bringt;

g) dass sie sich in einem Punkte in der zweiten

Ordnung, d. i. dreipunktig berühren (osculieren) und in einem andern einfach schneiden — eine gewöhnliche Asymptote und eine unendlich ferne Schmiegungsebene;

h) dass sie sich in einem Punkte in der dritten Ordnung, d. i. vierpunktig berühren — wie ein Kegelschnitt mit dem Krümmungskreis im Scheitel — welches bedingt, dass die Durchdringungscurve in unendlicher Ferne eine stationäre Schmiegungsebene hat. (§ 63.)

2) Da jeder Kegel zweiten Grades in Kreisen geschnitten werden kann (vergl. § 95.), so darf man unter Voraussetzung einer Transformation unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, dass von den sich durchdringenden Kegeln der eine eine kreisförmige Spur habe. Man soll die Spuren zweier Kegel zweiten Grades in einer Kreisschnittebene des einen von ihnen so anordnen, dass ihre Durchdringungscurve einem der Fälle a) bis h) unter 1) entspreche und erörtere die jeweilen noch erfüllbaren Bedingungen.

3) Man ordne unter derselben Voraussetzung die Spuren so an, dass die Ebene derselben für die Durchdringungscurve eine Schmiegungsebene in gegebenem Punkte sei.

4) Desgleichen so, dass sie die Ebene von zwei Tangenten der Durchdringungscurve in gegebenen Punkten — also eine doppelt berührende Ebene — sei.

5) Endlich so, dass sie zur stationären Ebene derselben in gegebenem Punkte werde.

6) Wenn durch centrische Collineation ein Punkt der Raumcurve in's Unendliche fällt, so wird seine Schmiegungsebene zur asymptotischen Ebene der Curve; wie unterscheidet sich der Fall der stationären asymptotischen Ebene von dem Fall der gewöhnlichen asymptotischen Ebene? (Vergl. § 65.; 7.)

7) Eine Raumcurve kann durch centrische Collineation stets so transformiert werden, dass eine bestimmte von ihren Schmiegungsebenen unendlich fern ist; man erläutere diess näher.

8) Die Gerade ist die einzige Linie erster Ordnung —

weil zwei Punkte in ihr und ein ausser ihr gelegener Punkt stets eine Ebene bestimmen, die sie ganz enthalten muss.

9) Der Kegelschnitt ist die einzige Curve zweiter Ordnung, weil drei Punkte einer solchen eine Ebene bestimmen, die sie ganz enthält.

10) Eine Curve dritter Ordnung ist entweder eben oder sie ist die Durchschnittscurve von zwei Flächen zweiter Ordnung, die eine Gerade gemeinschaftlich haben — wir denken sie zunächst als den Schnitt von zwei Kegelflächen zweiten Grades mit einer gemeinschaftlichen Erzeugenden. (Vergl. § 81.)

81. Wir kehren zu den Entwickelungen des § 79. zurück. Wenn unter den Ebenen des Hilfsebenenbüschels eine ist, welche beide Kegelflächen zugleich berührt, so liefert dieselbe einen Punkt der Durchdringungscurve — und für Kegelflächen zweiten Grades nur einen Punkt derselben — in welchem zwei Aeste derselben sich durchschneiden, einen Doppelpunkt der Raumcurve, in welchem nach der Bezeichnung des § 79. zwei Paare von Gruppen $A$, $B$; $C$, $D$ zusammenstossen und die Kegelflächen einander berühren. Dem Doppelpunkt entsprechen zwei Tangenten der Durchdringungscurve, die beide in der besagten Grenzhilfsebene liegen und durch die Betrachtung der Tangentenfläche der Curve gefunden werden: Ihre Durchstosspunkte sind die Schnittpunkte der gleichnamigen Spur der Hilfsebene mit den beiden entsprechenden Aesten der Spur der developpabeln Fläche.

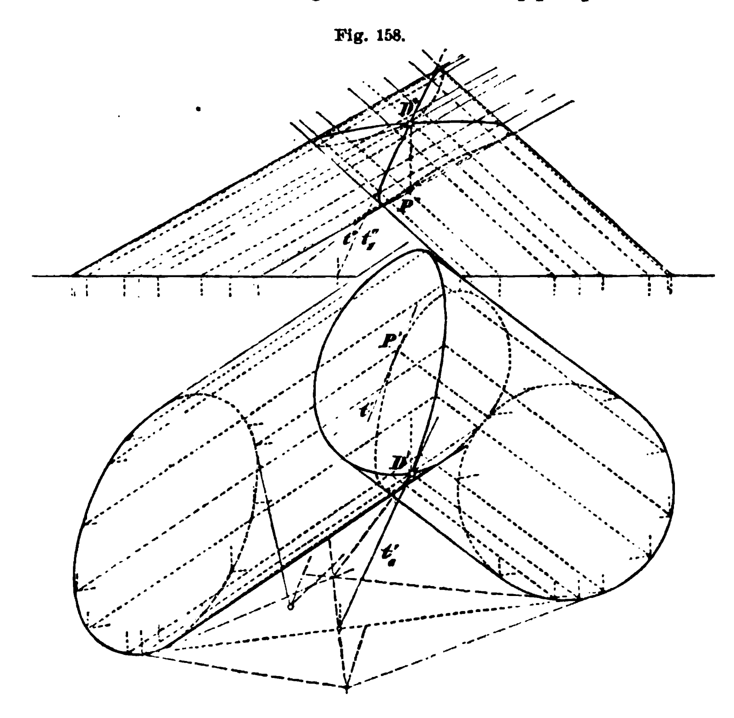
Die Figur 158. zeigt die Durchdringung zweier Cylinder zweiten Grades, für welche die Ebene von der Horizontalspur $s_1$ eine gemeinschaftliche Tangentialebene ist und die daher in $D$ einen Doppelpunkt hat; die eine der Tangenten $t_1$ ist angegeben; überdiess für einen Punkt $P$ die Tangente $t$.

Jede Hilfsebene von dieser Eigenschaft giebt einem Doppelpunkte den Ursprung. Für Kegelflächen zweiter Ordnung sind aber offenbar nur zwei Hilfsebenen von solcher Art möglich, Ebenen, deren Spuren ein Paar gemeinsame Tangenten der Spuren beider Kegelflächen von solcher Lage sind, dass jede durch ihren Schnittpunkt gehende Gerade, welche den

einen Kegelschnitt schneidet, diess auch mit dem andern thut und umgekehrt.

Auch kann eine Durchdringungscurve vierter Ordnung nicht drei Doppelpunkte haben, ohne ganz in der Ebene derselben zu liegen, weil diese mit der Curve sechs Punkte gemein hätte und also unendlich viele mit ihr gemein haben müsste. (§ 80.) Wenden wir dann dieselbe Schlussweise auf den Fall der Durchdringungscurve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten an,

Fig. 158.



so folgt, dass eine Ebene durch die beiden Doppelpunkte in diesen vier Punkte mit der Curve gemein hat, dass jede Ebene dieses Büschels, die durch einen weitern Punkt der Curve gelegt wird, noch unendlich viele Punkte der Curve enthalten muss; dass also die Durchdringung aus zwei ebenen Curven, d. h. aus zwei Kegelschnitten besteht, welche die Doppelpunkte gemein haben. Die Spur der developpabeln Fläche der Durchdringungscurve geht

gleichzeitig in zwei gerade Linien über, die gleichnamigen Spuren der Ebenen dieser Kegelschnitte.

Gehört die Verbindungslinie $MM^*$ beider Spitzen als eine gemeinsame Erzeugende zu beiden Kegeln, so ist zu unterscheiden, ob die Kegelflächen längs derselben auch eine gemeinsame Tangentialebene haben oder nicht. Im ersten Falle erscheint die Gerade $MM^*$ als die Vereinigung von zwei gemeinschaftlichen unendlich nahe benachbarten Erzeugenden und der Rest der Durchdringung kann also nur eine Curve zweiter Ordnung oder ein Kegelschnitt sein. Jede Ebene des Hilfsebenenbüschels $MM^*$ schneidet aus jedem der beiden Kegel eine Erzeugende heraus und bestimmt so einen Punkt der Curve; die entsprechenden Tangentialebenen schneiden sich in der zugehörigen Tangente des Kegelschnitts. Im andern Falle, wo die Gerade $MM^*$ nur eine einfache gemeinsame Erzeugende ist, wird der Rest der Durchdringung eine Raumcurve dritter Ordnung; jede durch $MM^*$ gehende Ebene schneidet sowohl den Kegel $M$ als auch den Kegel $M^*$ noch in einer Geraden, deren Schnittpunkt zur Durchdringungscurve gehört und diese Curve kann offenbar keine ebene Curve sein. Die zugehörigen Tangentialebenen der Kegel schneiden einander in der Tangente der Durchschnittscurve im entsprechenden Punkte.

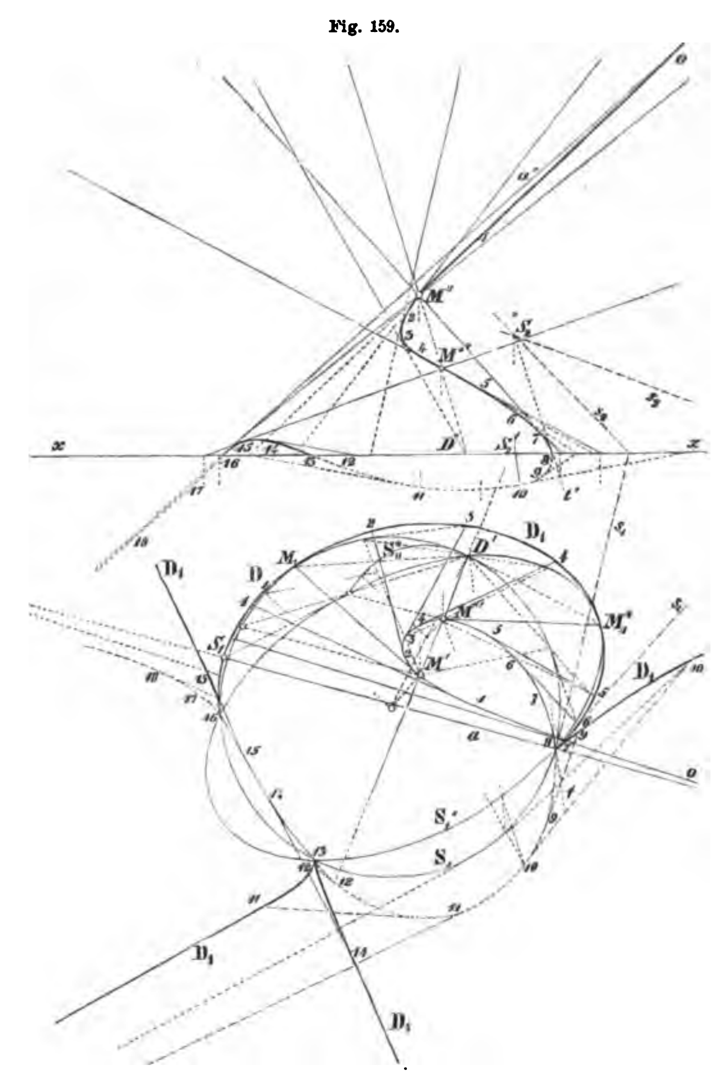
Denkt man dann nach § 79.; 1. die unendlichen Aeste und die Asymptoten der Curve dritter Ordnung bestimmt, in welcher sich zwei Kegel zweiten Grades durchdringen, so ergiebt sich (vergl. § 80.; 1.) dass dieselbe

a) einen unendlichen Ast und eine Asymptote immer haben muss — weil zwei Kegelschnitte, die einen Punkt gemein haben, noch einen zweiten gemein haben müssen, und noch drei gemein haben können; schneiden sich diese Kegelschnitte in vier Punkten, so hat die Raumcurve dritter Ordnung

b) drei unendliche Aeste und Asymptoten. Wir nennen sie im Falle a) eine cubische Ellipse, im Falle b) eine cubische Hyperbel. Die Figur 159. stellt eine cubische Ellipse in Orthogonalprojection dar. $M$, $\mathrm{s}_1$ und $M^*$, $\mathrm{s}_1^*$ sind die beiden Kegel, $MD$ ist die gemeinschaftliche Erzeu-

gende; $a$ ist die mittelst des Parallelkegels $M^*$, $S_1^*$ construierte Asymptote der Curve. Dieselbe ist durch Punkte und Tangenten bestimmt und zwar sind diese Punkte von oben her durch

Fig. 159.



die fortlaufenden Nummern und die horizontalen Durchstosspunkte der Tangenten d. i. die Punkte der Horizontalspur D der Developpabeln durch dieselben Nummern 1 bis 18 be-

zeichnet. Für die Punkte 3, 6, 10 ist die Construction vollständig ersichtlich gemacht.

Berühren sich ferner die Kegelschnitte in einem von $D$ verschiedenen Punkte einfach, so haben sie ausser $D$ noch einen Schnittpunkt und es entspricht dem Letztern

c) ein gewöhnlicher unendlicher Ast, jener Berührungsstelle aber ein solcher mit unendlich ferner Asymptote oder ein parabolischer Ast; wir nennen die Curve eine cubische hyperbolische Parabel. Osculieren sich endlich die Kegelschnitte, die sich in $D$ schneiden, in einem andern Punkte, so entspricht

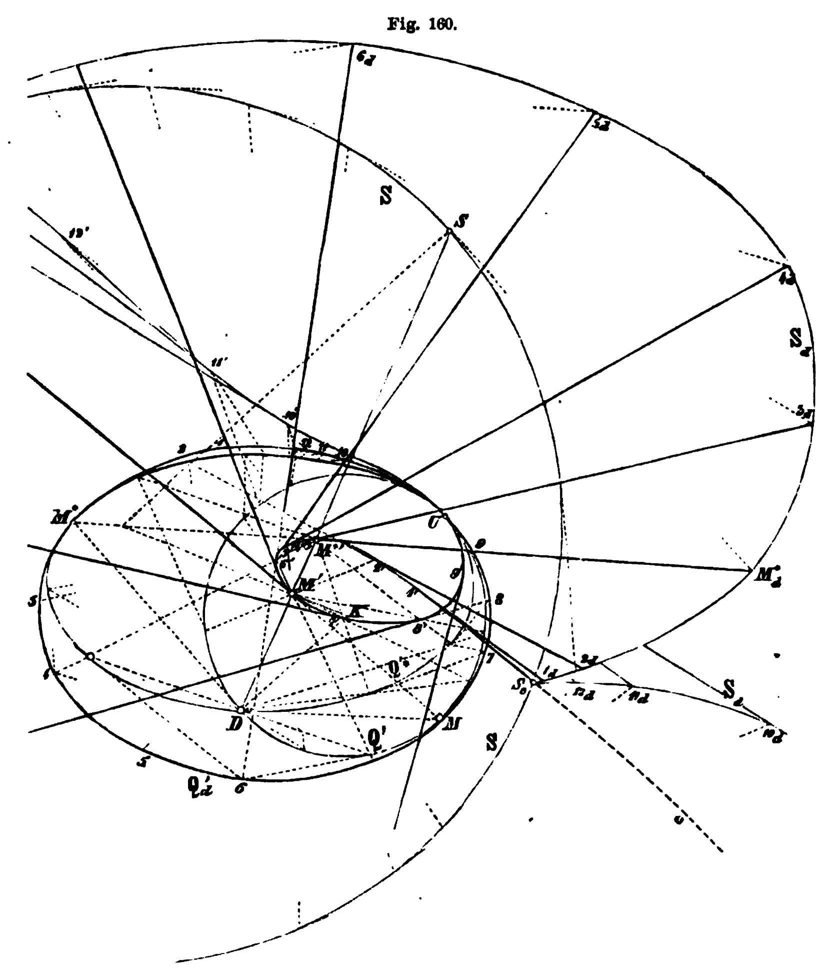
d) diesem Punkte eine unendlich ferne Schmiegungsebene und wir nennen die Curve eine cubische Parabel. Dass man die Raumcurven dritter Ordnung auf Grund ihrer wesentlichen Eigenschaften als cubische Kegelschnitte bezeichnen darf, wird die weitere Betrachtung zeigen. Die Figur 160. giebt in Centralprojection die cubische Parabel. Die Kegel von den Spitzen $M$ und $M^*$ und der gemeinschaftlichen Erzeugenden $SD$ — $D$ bezeichnet den Fluchtpunkt derselben, $S$ ihren Durchstosspunkt — haben zu Fluchtlinien die Ellipse $\mathbf{Q}^{*\prime}$ und den Krümmungskreis $\mathbf{Q}'$ derselben für den Punkt $U'$, welcher durch $D$ geht. Von den Spurcurven ist nur der Kreis $\mathbf{S}$ verzeichnet, die Ellipse $\mathbf{S}^*$ wäre zu $\mathbf{Q}^{*\prime}$ ähnlich und in ähnlicher Lage und geht durch die Punkte $S$ und $S_c$. Die Curve ist durch Punkte und Tangenten verzeichnet, und die developpable Fläche durch die Letztern, sowie die Fluchtcurve $\mathbf{Q}_d'$ und den erreichbaren Theil der Spurcurve $\mathbf{S}_d$ dargestellt. Die Punkte der Curve sind von der Bildebene nach hinten gezählt $1', 2', \cdots$ bis zu den vor der Verschwindungsebene gelegenen Punkten $10', 11', 12'$; die Fluchtpunkte der entsprechenden Tangenten sind durch die gleichen Nummern ohne Strich, und die Durchstosspunkte durch dieselben mit dem Index $d$ bezeichnet. Ebenso sind $M'$ und $M^{*\prime}$ behandelt. Die Tangenten von $\mathbf{S}_d$ und die von $\mathbf{Q}_d'$ in den entsprechenden Punkten sind parallel als Spuren und Fluchtlinien der bezüglichen Tangentialebenen der developpabeln Fläche.

Die Fluchtcurve ist ein Kegelschnitt, der $\mathbf{Q}'$ und $\mathbf{Q}^{*\prime}$ in $M$ und $M^*$ respective berührt. (Vergl. § 84.; 7.) Die Spur-

curve berührt in $M_d$ den Kreis **S** und würde in $M_d^*$ die Ellipse **S**$_d^*$ berühren; in $S_c$ liegt ihr Rückkehrpunkt.

1) Man ordne die Durchdringung eines schrägen Kreiskegels und eines elliptischen Cylinders so an, dass

Fig. 160.



dieselbe in einer gegebenen Erzeugenden des erstern einen Doppelpunkt habe.

2) In einem Doppelpunkt der Durchdringungscurve haben die schneidenden Flächen — und diess gilt nicht nur für Kegelflächen (vergl. § 87.) — dieselbe Tangen-

tialebene für den gemeinschaftlichen Punkt, d. h. sie berühren einander in ihm.

3) Man ordne die Fluchtcurven und Spitzen von zwei Kegeln zweiten Grades so an, dass ihre Durchdringung aus zwei Hyperbeln mit einer gemeinsamen Asymptotenrichtung besteht.

4) Ebenso die Durchdringung von zwei Cylinderflächen zweiten Grades so, dass zwei gegebene sich schneidende Gerade die Durchdringungscurve in gegebenen Punkten berühren.

5) Wenn zwei Kegelschnitte $K$, $K^*$ sich in einem Punkte $S$ berühren, so schneiden sich die Paare von Tangenten, welche an sie in den Punkten eines um $S$ sich drehenden Strahls gezogen werden, in Punkten einer Geraden $s$, welche die reelle oder ideale gemeinschaftliche Secante der Kegelschnitte ist, die $S$ nicht enthält. Verbindet man von den Paaren solcher Punkte der Kegelschnitte $K$, $K^*$ den zu $K$ gehörigen mit dem einen $M$ und den zu $K^*$ gehörigen mit dem andern $M^*$ von zwei festen mit $S$ in einer Geraden gelegenen Punkten, so erzeugen die zwei so entstehenden Strahlenbüschel als Ort der Schnittpunkte ihrer entsprechenden Elemente einen Kegelschnitt. Denn $K$, $K^*$ sind die gleichnamigen Spuren von zwei Kegelflächen zweiten Grades von den Spitzen $M$ und $M^*$, welche sich längs der Erzeugenden $MM^*S$ berühren.

6) Man construiere eine Raumcurve dritter Ordnung durch sechs gegebene Punkte $P_i$, von denen keine vier in einer Ebene liegen — indem man zwei derselben als Scheitel $M$, $M^*$ von zwei Kegelflächen zweiten Grades wählt, welche durch die Kanten $MM^*$, $MP_1$, $MP_2$, $MP_3$, $MP_4$ und $M^*M$, $M^*P_1$, $M^*P_2$, $M^*P_3$, $M^*P_4$ respective bestimmt sind, und die Durchdringung derselben ermittelt. In den durch je fünf Punkte bestimmten gleichnamigen Spuren der Kegelflächen — wählt man die Ebene durch eine Gruppe von drei Punkten $P_i$, z. B. $P_1P_2P_3$ zur Grundebene, so sind die Spuren durch die vier gemeinsamen Punkte und je einen fünften Punkt bestimmt — construiert man linear

(§ 27.; 1[b].) die Paare ihrer Schnittpunkte mit einem um den gleichnamigen Durchstosspunkt von $MM^*$ sich drehenden Strahl und erhält durch ihre Verbindungslinien mit $M$, respective $M^*$ je einen Punkt der Curve; man construiert ebenso linear die den Paaren dieser Schnittpunkte des sich drehenden Strahls entsprechenden Tangenten der Spuren und erhält damit den jedesmaligen gleichnamigen Durchstosspunkt der zum entsprechenden Punkt der Raumcurve gehörigen Tangente. Die Aufeinanderfolge dieser Durchstosspunkte der Tangenten bildet die Spur der developpabeln Fläche der Curve; die Tangente der Raumcurve im Punkte $P$ und die Tangente der Spurcurve der Developpabeln im Durchstosspunkt derselben bestimmen die Schmiegungsebene der Raumcurve im Punkte $P$.

7) Alle diejenigen Kegel zweiten Grades, welche dieselben gleichnamigen Spuren und dieselben zugehörigen Projectionen der Spitzen und den nämlichen zugehörigen Durchstosspunkt ihrer Verbindungslinie haben, erzeugen Durchdringungscurven, für welche die gleichnamige Projection und die gleichnamige Spur ihrer Tangentenfläche dieselben sind — denn diese wie jene werden ganz ohne Zuziehung der andern Projectionen der Spitzen bestimmt.

8) Was entspricht dem in 7) bezeichneten Verhalten in der centralprojectivischen Darstellung?

9) Zwei Projectionen eines Punktes der Raumcurve, die eine Projection der ganzen Curve und die zugehörige Spur ihrer Developpabeln reichen hin zur Bestimmung der Curve und ihrer developpabeln Fläche.

10) Es ist unmöglich, dass bei der Raumcurve dritter Ordnung zwei nicht auf einander folgende Tangenten sich schneiden — weil sonst in der Ebene derselben die Spuren der erzeugenden Kegel zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte sein müssten, für die die Verbindungslinie der Spitzen den einen Berührungspunkt enthielte. (Vergl. den Text.) Die developpabele Fläche der Raumcurve dritter Ordnung hat also keine Doppelcurve. (Vergl. § 74.; 10.)

11) Eine stationäre Schmiegungsebene kann eine Raumcurve dritter Ordnung nicht enthalten.

12) Man construiere eine Raumcurve dritter Ordnung so, dass die erste Projectionsebene sie in einem gegebenen Punkte nach einer gegebenen Geraden osculiere, während die erste Spur der einen Kegelfläche ein Kreis ist.

13) Ein Kegel und ein Cylinder zweiten Grades mit einer gemeinschaftlichen Erzeugenden können nur eine cubische Ellipse zur Durchdringung haben; man ordne ihre Durchdringung so an, dass ihre Asymptote durch einen gegebenen Punkt geht.

14) Man construiere eine cubische Hyperbel, wenn ihre Asymptotenrichtungen, die Spitzen der beiden sie erzeugenden Kegel und ein fernerer Punkt der Curve, z. B. in einer Projectionsebene gegeben ist.

15) Man erörtere, ob eine cubische Parabel möglich und bestimmt ist, wenn ein Kegel zweiten Grades gegeben ist, auf dem sie liegt, dazu entweder die Spitze eines zweiten Kegels oder die Erzeugende ihres unendlich fernen Punktes auf dem ersten Kegel.

82. Man hat im Vorhergehenden gesehen, dass die constructive Behandlung einer Raumcurve durch die Vermittelung von zweierlei ebenen Curven geschieht, von denen die einen die Projectionen der Raumcurve selbst sind, die andern aber ebene Querschnitte ihrer developpabeln Fläche insbesondere Spuren derselben in Projectionsebenen sind.

Die Besonderheiten der Raumcurve nach Form und Lage müssen Besonderheiten dieser ebenen Curven bedingen und aus solchen erkennbar sein. Eine nähere Untersuchung der Beziehungen der Raumcurve selbst zu ihren durch Parallel- oder Central-Projection erzeugten ebenen Abbildungen und zu den ebenen Querschnitten ihrer developpabeln Fläche wird die Regeln für die Bildung der bezüglichen Urtheile ergeben.

Das Projectionscentrum und die Bildebene denken wir willkürlich gewählt, setzen also zunächst voraus, dass das erstere nicht in einer Tangente der Curve oder auf dieser

selbst liege und die Letztere nicht durch eine solche gehe, noch auch selbst eine Schmiegungsebene der Curve sei. Um unsere Schlüsse noch mehr zu präcisieren, nehmen wir an, dass Bild und Spur algebraische Curven, d. h. von bestimmter Ordnungs- und Classenzahl seien. Die Methode der Betrachtung bleibt jedoch gültig auch für Curven, die nicht algebraisch sind und für solche, die nur gezeichnet vorliegen und über deren mathematische Natur daher nichts bekannt ist.

So untersuchen wir zuerst den Zusammenhang zwischen der Raumcurve und ihren ebenen Abbildungen, d. h. nach § 64. zwischen ihr und den Kegelflächen, die sie aus beliebigen Punkten des Raumes projicieren.

Die Erzeugenden eines solchen Kegels sind die projicierenden Strahlen der Punkte der Curve, seine Tangentialebenen die projicierenden Ebenen ihrer Tangenten; die Bilder der Curvenpunkte oder die Punkte des Curvenbildes sind die Durchstosspunkte seiner Erzeugenden in der Projectionsebene; die Bilder der Tangenten der Curve oder die Tangenten des Bildes der Curve sind die gleichnamigen Spuren jener Tangentialebenen. (Vergl. Fig. 161.)

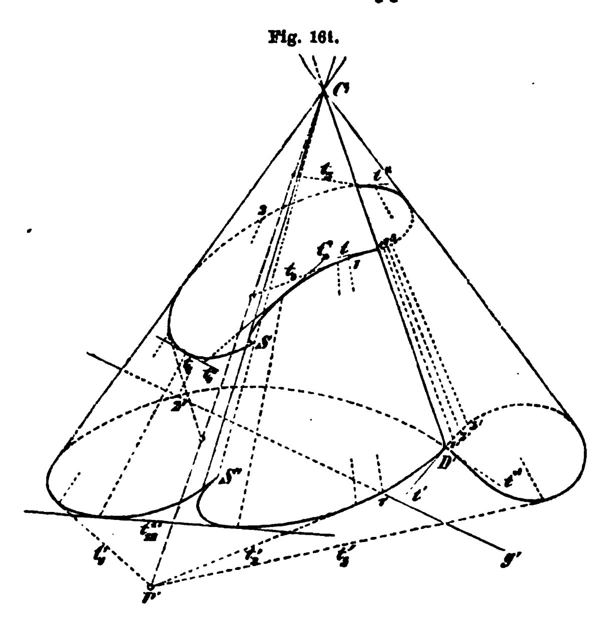
Der projicierende Kegel und somit die ebene Abbildung der Curve sei von der Ordnung $m$ und der Classe $n$ mit $d$ Doppelerzeugenden respective Doppelpunkten, $t$ Doppeltangentialebenen respective Doppeltangenten, mit $k$ Rückkehrerzeugenden und Rückkehrpunkten, und $i$ Inflexionstangentialebenen und Inflexionstangenten. Dann ergiebt sich:

a) Die $m'$ Schnittpunkte des Bildes mit einer Geraden $g'$ in der Bildebene sind die Bilder der Punkte der Curve, welche in der projicierenden Ebene jener Geraden, d. i. in der durch einen beliebigen Punkt — das Projectionscentrum — nach einer beliebigen Geraden der Bildebene gehenden Ebene, also in einer Ebene von ganz allgemeiner und unabhängiger Lage enthalten sind; d. h. die Ordnungszahl $m'$ des Bildes einer Raumcurve ist der Ordnungszahl $m$ dieser Curve selbst gleich — wenn man dieselbe als die Anzahl der Punkte definiert, die sie mit einer Ebene gemein haben kann.

b) Die $n'$ Tangenten des Bildes aus einem Punkte $P'$ der Bildebene sind die Bilder von $n'$ Tangenten der Raumcurve,

deren projicierende Ebenen die projicierende Gerade jenes Punktes enthalten, die also selbst diese Letztere, d. h. eine Gerade von allgemeiner Lage als die Verbindungslinie von zwei beliebigen Punkten schneiden. Die Classenzahl $n'$ des Bildes einer Raumcurve stimmt überein mit der Rangzahl $r$ der Raumcurve und ihrer Developpabeln selbst, die wir als die Zahl der Tangenten der Curve oder der Erzeugenden der Developpabeln erklären, welche eine beliebige Gerade schneiden, oder als die Zahl der Schnittpunkte einer solchen mit der developpabeln Fläche.

Fig. 161.




c) Die $d'$ Doppelpunkte $D'$ des Bildes sind die Durchstosspunkte von solchen projicierenden Linien, welche die Raumcurve in zwei verschiedenen nicht auf einander folgenden Punkten treffen; d. h. die Zahl $d'$ der Doppelpunkte des Bildes einer Raumcurve stimmt überein mit der Zahl $h$ derjenigen Geraden, welche von einem beliebigen Punkte des Raumes aus so gezogen werden können, dass sie die Curve zweimal schneiden. Die beiden Tangenten $t'$, $t^{*\prime}$ des Bildes im Doppelpunkt sind die Bilder derjenigen beiden Tangenten der Raumcurve, welche

ihre Berührungspunkte auf der projicierenden Geraden des Doppelpunktes haben.

d) Die $t'$ Doppeltangenten $t_{12}$*' des Bildes sind die Spuren von solchen projicierenden Ebenen, welche zwei nicht auf einander folgende Tangenten der Raumcurve enthalten, und die zu einer solchen Doppeltangente gehörigen beiden Berührungspunkte sind die Bilder der Berührungspunkte der entsprechenden beiden Tangenten der Raumcurve. Die Zahl $t'$ der Doppeltangenten des Bildes ist also der Zahl $y$ der Ebenen gleich, die durch einen beliebigen Punkt des Raumes so gehen, dass sie je zwei Tangenten der Raumcurve enthalten, also diese doppelt berühren.

e) Die $k'$ Rückkehrpunkte $S'$ des Bildes sind die Bilder von ebenso vielen singulären Punkten der Raumcurve, nämlich von Punkten, in welchen ein Stillstand und Rückgang bei der Bewegung stattgefunden hat, durch welche die Curve als Ort eines Punktes erzeugt ward; von Doppelpunkten mit unendlich klein gewordener Schleife und einziger Tangente. (Vergl. § 63.) Die Zahl $k'$ der Rückkehrpunkte des Bildes ist also der Zahl $\beta$ der stationären Punkte der Raumcurve gleich.

f) Jede der $i'$ Inflexionstangenten des Bildes ist das Bild solcher zwei auf einander folgender Tangenten der Raumcurve, welche in der nämlichen projicierenden Ebene liegen, oder die Spur einer projicierenden Ebene, welche zugleich eine Schmiegungsebene der Curve ist. Denn die Inflexionstangente enthält drei Nachbarpunkte 1', 2', 3' des Bildes, also ihre projicierende Ebene die drei Nachbarpunkte 1, 2, 3 der Raumcurve, die ihnen entsprechen. Die Zahl $i'$ der Inflexionstangenten des Bildes stimmt also mit der Zahl $n$ der Schmiegungsebenen der Raumcurve überein, die durch einen beliebigen Punkt gehen. Wir können diese Zahl als die Classenzahl der developpabeln Fläche der Raumcurve bezeichnen.

*) Die Relationen der Anmerkung des § 62. liefern sonach für die Charactere der algebraischen Raumcurven — gleichviel von welcher Herkunft — die Gleichungen

$$r = m(m-1) - 2h - 3\beta, \quad m = r(r-1) - 2y - 3n,$$
$$n - \beta = 3(r - m);$$

und für das Geschlecht

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - (h + \beta) = \frac{(r-1)(r-2)}{2} - (y + n).$$

Es bestehen also drei Relationen zwischen den sechs Grössen $m, n, r, \beta, h, y$; und beim Uebergang zu einer neuen Raumcurve, die aus der gegebenen so entspringt, dass jedem Punkt und jeder Tangente und Schmiegungsebene der einen ein Punkt, eine Tangente und Schmiegungsebene der andern entspricht, z. B. beim Uebergang zu einer collinearen Curve, tritt zu diesen eine vierte durch die Unveränderlichkeit des Geschlechts hinzu.

1) Ordnung und Classe der Horizontalprojection einer Raumcurve bestimmen sich durch die Zahl der Schnittpunkte der Curve, respective ihrer Developpabeln mit einer Ebene und einer Geraden; sie hat so viel Doppelpunkte als Verticallinien die Curve zweifach schneiden und so viel Doppeltangenten als Verticalebenen sie zweifach berühren; endlich so viel Inflexionen als verticale Schmiegungsebenen und so viel Rückkehrpunkte als die Raumcurve selbst.

2) Die orthogonale Parallelprojection der Schraubenlinie in der zu ihrer Axe parallelen Projectionsebene hat Inflexionstangenten in den auf der Projection der Axe gelegenen Punkten, weil die entsprechenden Schmiegungsebenen zu dieser Projectionsebene normal sind. (Vergl. § 73.; 3.)

3) Dieselbe Projection hat die entsprechenden Umrisslinien des Schraubencylinders zu mehrfachen Tangenten.

4) Die schräge Parallelprojection der Schraubenlinie auf eine Kreisschnittebene des Schraubencylinders hat Inflexionspunkte, d. h. ist eine verkürzte Cycloide (§ 73.; 2.), wenn die Neigung $\beta_1$ des projicierenden Strahles gegen die Grundkreisebene kleiner ist als die Neigung $\beta$ der Schraubenlinie — weil es dann zwei projicierende Strahlen in jedem Gange giebt, welche in Schmiegungsebenen der Schraubenlinie liegen.

Die Projection hat Doppelpunkte, d. h. sie ist eine verlängerte Cycloide, wenn $\beta_1 > \beta$ (§ 73.; 2.). (Vergl. § 84.; 3. die Erklärung der Rückkehrpunkte der gemeinen Cycloide.)

5) Man erläutere, wie die Centralprojection der Schraubenlinie zwei Doppeltangenten, eine beschränkte Anzahl von Inflexionstangenten und eine unbegrenzte Anzahl von Doppelpunkten darbieten müsse. (Vergl. § 75.; a.). Wie sind die Inflexionsstellen zu construieren?

6) Die Ebenen, welche zwei nicht benachbarte Tangenten einer Raumcurve enthalten, bilden eine developpable Fläche von der Classe $y$ — denn es gehen $y$ derselben durch einen beliebigen Punkt des Raumes. Jede derselben berührt diese längs der Geraden, welche die Berührungspunkte jener Tangenten mit der Curve verbindet. Wir nennen diese developpable Fläche die der Raumcurve doppelt umschriebene Developpable.

7) Man erläutere für die Schraubenlinie die besondern Verhältnisse der doppelt umschriebenen Developpabeln.

8) Die Raumcurve dritter Ordnung hat keine doppelt umschriebene Developpable, da sonst ihr Bild d. h. eine Curve dritter Ordnung Doppeltangenten zulassen müsste.

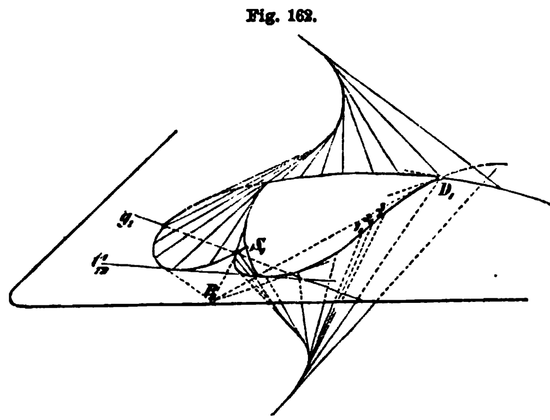
9) Die Kegel zweiten Grades, aus deren Durchdringung eine Raumcurve vierter Ordnung hervorgeht, sind derselben doppelt umschriebene developpable Flächen; ihre Gesammtclasse ist $= 4$. Bilden sie die vollständige doppelt umschriebene Developpable der Curve? (Vergl. § 86. und das Folgende.)

83. Wir untersuchen ferner den Zusammenhang zwischen der Raumcurve und den ebenen Schnitten ihrer developpabeln Fläche, die wir (Fig. 162.) als Curven von bestimmter Ordnung und Classe $m_1$, $n_1$, mit $d_1$ Doppelpunkten und $t_1$ Doppeltangenten, mit $i_1$ Inflexionstangenten und $k_1$ Rückkehrpunkten voraussetzen. Ihre Punkte sind die Durchstosspunkte der Tangenten der Raumcurve oder der Erzeugenden der developpabeln Fläche in der Schnitt-

ebene; ihre Tangenten sind die Spuren der Schmiegungsebenen der Curve oder der Tangentialebenen der Developpabeln in derselben. Man findet also in der schon gemachten Voraussetzung über die Unabhängigkeit der Lage der Schnittebene das Folgende.

a) Die Ordnung $m_1$ der Schnittcurve, d. h. die Zahl der Punkte, die sie mit einer Geraden $g_1$ (Fig. 162.) der Schnittebene gemein hat, ist dem Rang $r$ der Raumcurve und der developpabeln Fläche gleich, d. i. gleich der Zahl der Tangenten derselben, welche eine beliebige Gerade schneiden. Diese Zahl kann somit als die Ordnungszahl der developpabeln Fläche angesehen werden.

Fig. 162.



b) Die Classe $n_1$ der Schnittcurve, d. h. die Zahl ihrer Tangenten aus einem Punkte der Schnittebene, ist zugleich die Zahl $n$ der durch diesen Punkt oder durch einen beliebigen Punkt des Raumes gehenden Schmiegungsebenen der Raumcurve.

c) Die Zahl $d_1$ der Doppelpunkte der Schnittcurve ist die Zahl $x$ solcher Punkte ihrer Ebene, d. i. einer beliebigen Ebene, in welchen zwei nicht auf einander folgende Tangenten der Raumcurve oder Erzeugende der Developpabeln sich schneiden; die zugehörigen Tangenten der Schnittcurve sind die Spuren derjenigen Tangential- oder Schmiegungs-Ebenen, welche den im Doppelpunkt zusammentreffenden Erzeugenden oder Tangenten angehören.

d) Die Zahl $t_1$ der Doppeltangenten der Schnittcurve ist die Zahl $g$ der Geraden ihrer Ebene, d. h. einer beliebigen Ebene, in welchen zwei nicht auf einander folgende Schmiegungs- oder Tangential-Ebenen einander schneiden; die zugehörigen Berührungspunkte der Schnittcurve sind die Durchstosspunkte der zu diesen Schmiegungsebenen gehörigen Tangenten der Raumcurve.

e) Die Zahl $k_1$ der Rückkehrpunkte der Schnittcurve ist die Zahl $m$ der Punkte der Raumcurve selbst, welche in der Schnittebene liegen; denn sie sind Doppelpunkte mit zusammenfallenden Tangenten, sie entspringen also aus der Begegnung zweier solchen Tangenten der Raumcurve in der Schnittebene, denen nur eine Schmiegungsebene entspricht, d. h. welche benachbart sind oder sich in der Curve schneiden.

f) Die Inflexionstangenten der Schnittcurve können als Doppeltangenten mit zusammenfallenden Berührungspunkten angesehen werden, sind also die vereinigten Spuren von je zwei solchen Schmiegungsebenen, welche zu einer und derselben Tangente gehören, d. i. zusammenfallen; sie entsprechen also Singularitäten der developpabeln Fläche, nämlich den stationären Ebenen oder Inflexionstangentialebenen derselben (§ 63.) und ihre Zahl $i_1$ ist der Zahl dieser stationären Ebenen $\alpha$ gleich.

*) Die Relationen der Anmerkung des § 62. liefern sonach für die Charactere der algebraischen Raumcurven die ferneren Gleichungen

$$n = r(r-1) - 2x - 3m;\quad r = n(n-1) - 2g - 3\alpha;$$
$$\alpha - m = 3(n-r);$$

und für das Geschlecht

$$p = \frac{(r-1)(r-2)}{2} - (x+m) = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (g+\alpha),$$

welche beide letztern Ausdrücke mit den entsprechenden des vorigen § identisch sind.

Zwischen den neun Grössen $m, n, r, g, h, x, y, \alpha, \beta$, den Characterzahlen einer algebraischen Raumcurve, bestehen demnach sechs Gleichungen und eine siebente tritt beim Ueber-

gang zu einer eindeutig entsprechenden Curve, z. B. zu einer Evolute, etc. durch die Constanz des Geschlechts hinzu. Man muss also im Allgemeinen drei, und wenn das Geschlecht bekannt ist, zwei dieser Charactere kennen, um alle andern zu erfahren.

1) Die Durchschnittspunkte der gleichnamigen Spuren zweier Kegel sind Rückkehrpunkte in der Spur der developpabeln Fläche ihrer Durchdringungscurve.
2) Der Anfangspunkt der Schraubenlinie in der zu ihrer Axe normalen Projectionsebene ist Rückkehrpunkt der Evolvente des Grundkreises, welche die Spur ihrer developpabeln Fläche ist.
3) Die Spur der developpabeln Schraubenfläche hat keine Inflexionstangenten, weil die Fläche keine stationäre Ebene besitzt. (Vergl. § 63.; 4. § 73.; 5.)
4) Warum hat die Spur der developpabeln Schraubenfläche in der Normalebene des Schraubencylinders keine Doppeltangenten?
5) Der Richtungskegel einer developpabeln Fläche hat die Charactere eines ebenen Querschnitts derselben, — nämlich die Charactere ihrer Fluchtcurve, d. h. ihres unendlich fernen ebenen Querschnitts.
6) Die Punkte, in welchen sich zwei nicht benachbarte Tangenten einer Raumcurve schneiden, bilden eine Curve von der Ordnung $x$ — denn es liegen $x$ derselben in einer beliebigen Ebene. Wir nennen diese Curve die doppelt eingeschriebene Curve der developpabeln Fläche oder kurz ihre Doppelcurve. (Vergl. die Doppelcurve der developpabeln Schraubenfläche § 74.)
7) Man erläutere die Reciprocität der Charactere $m$, $n$; $r$, $r$; $g$, $h$; $x$, $y$; $\alpha$, $\beta$ der Raumcurven und ihrer developpabeln Flächen; z. B. (vergl. § 99.)

| | |
|---|---|
| $g$ Gerade in einer Ebene, durch deren jede zwei nicht benachbarte Schmiegungsebenen der Curve gehen. | $h$ Gerade durch einen Punkt, in deren jeder zwei nicht benachbarte Punkte der Curve liegen. |

8) Die developpable Fläche der Raumcurve dritter Ordnung besitzt keine Doppelcurve (vergl. § 82.; 8.) —

weil sonst zwei nicht auf einander folgende Tangenten in einer Ebene lägen und diese vier Punkte mit der Curve gemein hätte; für diese Developpable ist $x = 0$ und zugleich $y = 0$; aus analogem Grunde ist auch eine stationäre Ebene nicht möglich — also $\alpha = 0$. (Vergl. § 63.) Ebenso ist $\beta = 0$ nach den Untersuchungen des § 81. Das Bild einer solchen Curve hat also weder Doppeltangenten noch Spitzen und die Spur ihrer Developpablen weder Doppelpunkte noch Inflexionen.

*9) In der That sind die sechs Gleichungen unter *) bei § 82. und 83. für

$$m = 3, \; x = 0, \; y = 0, \; \alpha = 0, \; \beta = 0$$

(vergl. § 63.; 4.), d. i.

$$r = 6 - 2h, \; 3 = r(r-1) - 3n, \; n = 3r - 9$$
$$n = r(r-1) - 9, \; r = n(n-1) - 2g, \; 3 = 3(r-n)$$

mit einander verträglich und liefern die einzige Gruppe von Werthen

$$r = 4, \; n = 3, \; g = 1, \; h = 1.$$

Das Bild der Raumcurve dritter Ordnung ist eine Curve dritter Ordnung und vierter Classe mit einem Doppelpunkt und drei Inflexionen ohne andere Singularitäten. Hat jener reelle Tangenten, so sind zwei der Inflexionen nicht reell. Wenn sie reell sind, so liegen die drei Inflexionspunkte in einer Geraden. (Vergl. § 84.; 9., 19.) Die Spur ihrer developpabeln Fläche ist eine Curve vierter Ordnung und dritter Classe mit einer Doppeltangente und drei Rückkehrpunkten — von welchen Letzteren zwei nicht reell sein können, indess zugleich die Doppeltangente zu einer isolierten oder conjugierten Geraden wird. Diese Ergebnisse sind für den Zeichner von Wichtigkeit. (Vergl. Figur 159.)

*10) Für die Raumcurven dritter Ordnung und ihre Developpabeln sind die reciproken Charactere einander gleich

$$m = n, \; g = h, \; \alpha = \beta, \; x = y;$$

ganz so wie für die ebenen Kegelschnitte.

*11) Für $m = 4$ gestatten die sechs Gleichungen verschiedene Lösungen, nämlich für $h = 2$ und $h = 3$, jenachdem kein Doppelpunkt in der Curve auftritt oder ein solcher vorhanden ist, wie im Falle der Berührung der Kegel. (§ 81.) Man erhält für $h = 3$, $m = 4$ einzig die Gruppe

a) $n = 6$; $r = 6$; $\alpha = 4$, $\beta = 0$; $g = 6$; $x = 6$, $y = 4$;

dagegen für $h = 2$, $m = 4$ die beiden Gruppen

b) $n = 12$; $r = 8$; $\alpha = 16$, $\beta = 0$; $g = 38$; $x = 16$, $y = 8$;
c) $n = 4$; $r = 5$; $\alpha = 1$, $\beta = 1$; $g = 2$; $x = 2$, $y = 2$.

Die Letztere zeigt wieder die Gleichheit der reciproken Charactere und hat daher besonderes theoretisches Interesse. (Vergl. § 85.)

Man erläutere den Werth der in Gruppe a) enthaltenen Zahlen für den Zeichner.

*12) Für die Durchdringungscurve von zwei Kegeln zweiten Grades im Falle der Berührung sind diese Kegel selbst allein die doppelt umgeschriebene Developpabele — denn sie liefern vollständig $y = 4$. Wir werden im § 86. sehen, dass die vollständige doppelt umschriebene Developpable im allgemeinen Fall ($y = 8$) aus vier solchen Kegeln besteht.

84. Wir untersuchen ferner einige besondere Lagen, welche Projectionscentrum und Schnittebene zur Raumcurve und ihrer developpabeln Fläche haben können, hinsichtlich der durch sie bedingten Modificationen der Ergebnisse der vorigen §§. Zunächst für das Projectionscentrum, dass es a) auf einer Tangente der Curve, b) in einem Punkte der Curve, c) in einem stationären Punkte derselben liege; sodann für die Schnittebene, dass sie d) durch eine Tangente der Curve gehe, e) mit einer Schmiegungsebene derselben und endlich f) mit einer stationären Ebene derselben zusammenfalle.

a) Wenn das Projectionscentrum auf einer Tangente $t$ der Curve liegt, so bleibt die Ordnung des Bildes ungeändert, gleich $m$; die Classe des Bildes vermindert sich auf $(r - 1)$, weil diejenige Tangente bei der Bildung nicht mit zählt, welche das Centrum enthält; die Zahl der Doppel-

punkte wird $(h - 1)$, weil die Tangente $t$ selbst eine Gerade durch das Centrum ist, welche die Curve zweimal schneidet, ohne doch einen Doppelpunkt hervorzurufen; die Zahl der Doppeltangenten wird $y - (r - 4)$ — denn jede Tangente der Curve, also auch die durch das Centrum, wird von $(r - 4)$ andern Tangenten derselben geschnitten und bestimmt mit ihnen Ebenen, welche keine Doppeltangenten des Bildes hervorrufen; die Zahl der Rückkehrpunkte vermehrt sich um Eins auf $(\beta + 1)$, weil die durch das Centrum gehende Tangente einen stationären Punkt im Bilde der Curve bedingt (vergl. 1.); endlich vermindert sich die Zahl der Inflexionstangenten auf $(n - 2)$, weil die beiden durch $t$ und das Centrum gehenden benachbarten Schmiegungsebenen keine Inflexionen mehr erzeugen — sondern statt dessen den Rückkehrpunkt der vorigen Bemerkung.

b) Ist das Centrum ein Punkt $P$ der Curve, so kommt für das Bild derselben die Ordnung auf $(m - 1)$, die Classe auf $(r-2)$; die Zahl der Doppelpunkte auf $h-(m-2)$, weil eine Ebene durch die Tangente der Curve in $P$ die Curve in $(m - 2)$ weiteren Punkten schneidet, die mit $P$ verbunden zweifach schneidende projicierende Gerade liefern, welche keine Doppelpunkte hervorbringen; die Zahl der Doppeltangenten kommt auf $y-(2r - 8)$, weil die doppelte Verminderung des Falles a) eintritt; die Zahl der Rückkehrpunkte bleibt $\beta$, die der Inflexionstangenten aber wird $(n-3)$, weil drei Schmiegungsebenen sich im Centrum $P$ schneiden, welche keine Inflexionen hervorbringen können.

c) Für die Lage des Centrums in einem stationären Punkt ergiebt sich die Ordnung $(m - 2)$, die Classe $(r - 3)$; die Zahl der Doppelpunkte $h - 2(m - 3)$ die der Doppeltangenten $y - (3r - 13)$; die Zahl der Rückkehrpunkte kommt auf $(\beta - 1)$, die der Inflexionstangenten auf $(n - 4)$.

Sodann für die speciellen Lagen der Schnittebene.

d) Für den Schnitt der Developpabeln mit einer Ebene, welche eine Tangente der Curve enthält, werden Ordnung und Classe respective $r - 1$, $n$; die Anzahlen der Doppelpunkte und Doppeltangenten $x - (r - 4)$, $g - 1$; der Rückkehrpunkte und Inflexionstangenten $m - 2$, $\alpha + 1$ respective.

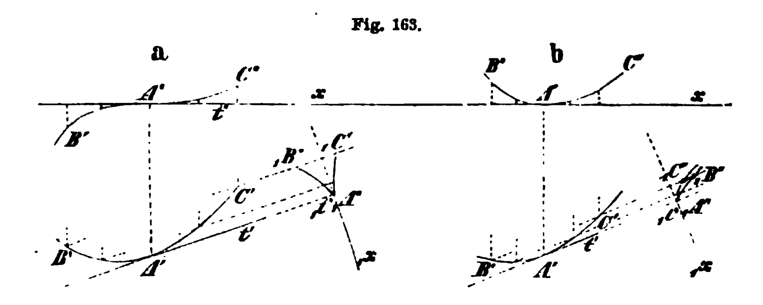
e) Der **Schnitt** mit einer **Schmiegungsebene** giebt für Ordnung und Classe $r-2$, $n$; für Doppelpunkte und Doppeltangenten $x-(2r-9)$, $g-2$; für Rückkehrpunkte und Inflexionstangenten $m-4$, $\alpha+2$ respective.

f) Der **Schnitt** mit einer **stationären** Ebene respective und in derselben Ordnung

$$r-3,\ n-2;\ x-(3r-13),\ g-2(n-3);\ m-4,\ \alpha-1.$$

1) Wenn eine Raumcurve durch parallele Strahlen so projiciert wird, dass die erste Projectionsebene eine ihrer Schmiegungsebenen ist, so liegt die zweite Projection des zugehörigen Punktes $A$ in der Axe $x$ und diese selbst ist Inflexionstangente in demselben für die zweite Projection der Curve, d. h. die Projectionen

Fig. 163.




der benachbarten Punkte $B''$, $C''$ liegen auf verschiedenen Seiten derselben. Führt man dann (Fig. 163., a.) eine neue zweite Projectionsebene normal zur Tangente $t$ der Curve in $A$ ein, also mit einer Axe $_1x$, so entsteht in der neuen zweiten Projection auf diese der gewöhnliche Rückkehrpunkt. Denn das Projectionscentrum für dieselbe liegt auf der Tangente $t$. (Vergl. den Text unter a).

2) Wäre die erste Projectionsebene eine stationäre Ebene im Punkte $A$ der Curve (Fig. 163., b.), so dass die zweite Projection der Curve in der Nachbarschaft von $A$ auf einerlei Seite der Axe $x$ liegt, so giebt die neue zweite Projection, die in der vorigen Art entsteht, einen Rückkehrpunkt, für welchen beide Aeste

der Curve auf derselben Seite der Rückkehrtangente liegen.

3) Die schiefe Parallelprojection der Schraubenlinie auf die Normalebene zu ihrer Axe ist eine Cycloide mit Rückkehrpunkten (gemeine Cycloide), wenn die Neigung der projicierenden Geraden der Neigung der Schraube gleich ist — weil dann das Projectionscentrum auf einer Tangente der Schraubenlinie gelegen ist.

4) Warum wird jede Tangente der Curve von $r-4$ andern Tangenten derselben geschnitten? Die Existenz einer Doppelcurve der developpabeln Fläche ist dadurch bedingt, dass der Rang derselben die Zahl 4 übersteigt. Daher hat die der Raumcurve dritter Ordnung keine Doppelcurve.

5) Für die Raumcurve dritter Ordnung ist der projicierende Kegel aus jedem ihrer Punkte ein Kegel zweiten Grades und also jedes Bild derselben aus einem solchen ein Kegelschnitt. Die Zahlen von § 83.; *9. geben für die bezüglichen Charactere nach b)

$$m' = n' = 2; \quad d' = t' = i' = k' = 0.$$

Es ist in Folge dessen für die durch sechs Punkte des Raumes bestimmte Curve dritter Ordnung (§ 81.; 6.) gleichgültig, welche zwei derselben man als Spitzen $M$, $M^*$ der sich durchdringenden Kegel wählt.

6) Durch die cubische Ellipse geht nur ein Cylinder zweiten Grades, während die cubische Hyperbel deren drei und die hyperbolische Parabel zwei zulässt, von denen einer parabolisch ist. Wie bei der cubischen Parabel?

7) Jede Schmiegungsebene einer Raumcurve dritter Ordnung schneidet die developpable Fläche derselben in einer Curve zweiten Grades; bei der cubischen Parabel in einer Parabel.

8) Die Fluchtcurve der developpabeln Fläche der cubischen Parabel ist ein Kegelschnitt. (Vergl. Fig. 160.)

9) Die Schmiegungsebenen der Raumcurve dritter Ordnung in drei Punkten derselben schneiden sich in einem Punkte der Ebene dieser Letztern.

10) Die Rückkehrtangenten in den drei Spitzen der Spur der developpabeln Fläche dritter Ordnung schneiden sich in einem Punkt.

11) Die gemeinsamen Tangentialebenen von zwei Kegelschnitten in verschiedenen Ebenen, welche die Durchschnittslinie dieser Letzteren in verschiedenen Punkten berühren, sind die Schmiegungsebenen einer Raumcurve dritter Ordnung; die Verbindungslinien der entsprechenden Berührungspunkte sind die Erzeugenden der developpabeln Fläche derselben. Diese kann somit als Grenzfläche für das von der einen Kegelschnittfläche ausgehende durch die nach der andern Kegelschnittlinie begrenzte Oeffnung fallende Licht angesehen werden. Insbesondere erzeugen sie zwei Parabeln in parallelen Ebenen.

12) Aus sechs Schmiegungsebenen, von denen keine vier durch einen Punkt gehen, kann die Curve dritter Ordnung und ihre developpable Fläche linear construiert werden — etwa indem man zwei derselben zu Projectionsebenen wählt.

13) Drei projectivische Ebenenbüschel erzeugen durch die Schnittpunkte der Tripel ihrer entsprechenden Ebenen eine Raumcurve dritter Ordnung.

14) Drei projectivische Punktreihen erzeugen durch die Verbindungsebenen der Tripel ihrer entsprechenden Punkte die developpable Fläche einer Raumcurve dritter Ordnung.

15) Man erläutere die Gründe der Reductionen in c), d), e) und f) des Textes.

16) Aus einem Punkte der Doppelcurve der developpabeln Fläche wird die zugehörige Raumcurve so projiciert, dass ihr Bild die Ordnung $m$, die Classe $r - 2$, Doppelpunkte $h - 2$ und Doppeltangenten $y - (2r - 9)$, Rückkehrpunkte $\beta + 2$ und Inflexionstangenten $n - 4$ hat.

17) Eine Ebene der doppelt umschriebenen Developpabeln einer Raumcurve schneidet ihre developpable Fläche in einer Curve von den Characteren $m_1 = r - 2$,

$n_1 = n$, $d_1 = x - (2r - 9)$, $t_1 = g - 2$, $k_1 = m - 4$, $i_1 = \alpha + 2$.

*18) Die Durchdringungscurve von zwei Kegeln zweiten Grades ohne Doppelpunkt wird aus einem ihrer Punkte als eine Curve dritter Ordnung und sechster Classe, mit neun Inflexionstangenten ohne Doppelpunkte, Rückkehrpunkte und Doppeltangenten projiciert; aus einem Punkte der Doppelcurve entsprechen dem Bilde für dieselben Charactere respective die Zahlen 4, 6, 8, 0, 2, 1.

*19) Die beiden Fälle der vorigen Durchdringungscurve ohne und mit Berührung der Kegelflächen geben für den Schnitt der developpabeln Fläche mit einer Schmiegungsebene die folgenden Charactere:

$m_1 = 6{,}4$; $n_1 = 12{,}6$; $d_1 = 9{,}3$; $t_1 = 36{,}4$; $k_1 = 0{,}0$; $i_1 = 18{,}6$.

Für die des Schnittes mit einer stationären Ebene aber

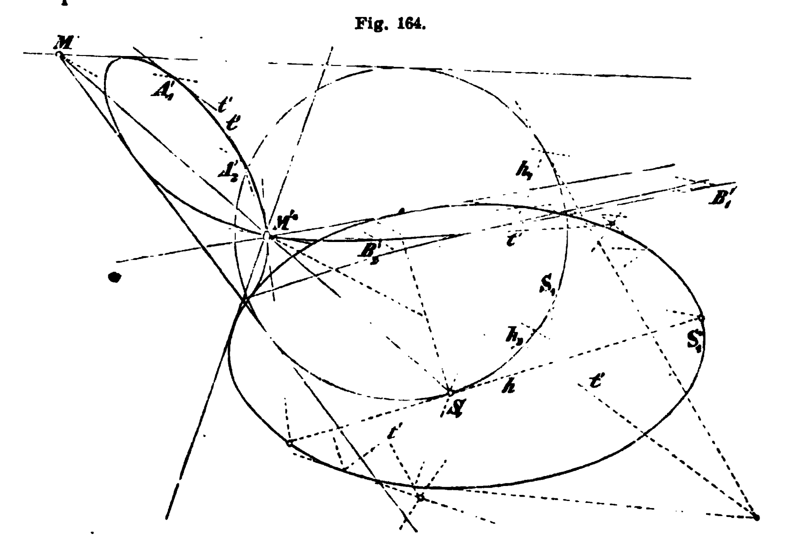
$m_1 = 5{,}3$; $n_1 = 10{,}4$; $d_1 = 5{,}1$; $t_1 = 20{,}0$; $k_1 = 0{,}0$; $i_1 = 15{,}3$.

85. In § 81. ist als Ursache eines Doppelpunktes in der Durchdringung zweier Kegelflächen die Berührung derselben nachgewiesen worden; die vorigen Betrachtungen leiten auf eine andere Entstehung, die ebenso von vorn herein erkennbar gewesen wäre. Wir sprechen speciell von der Durchdringung von zwei Kegeln zweiten Grades, der Raumcurve vierter Ordnung, und schliessen den Fall ihrer Reduction durch die Existenz einer gemeinsamen Erzeugenden der Kegelflächen aus. Wenn diese Curve einen Doppelpunkt besitzt, so wird sie nach den Betrachtungen des vorigen § von demselben aus durch einen Kegel zweiten Grades projiciert, denn die allgemeine Ordnung $m = 4$ des Bildes wird um zwei vermindert, weil jede durch den Doppelpunkt gehende Ebene die Curve nur noch in $(m - 2)$ weiteren Punkten schneiden kann (§ 84.; b). Projiciert man also die Durchdringungscurve in Fig. 158. von $D$ aus, so geschieht diess wieder durch einen Kegel zweiten Grades und die Curve kann somit auch als Durchdringung dieses Kegels aus $D$ mit einem der beiden ursprünglichen Kegel (Cylinder) angesehen werden. Diese beiden Kegel

stehen aber in der besondern Beziehung, dass die Spitze des einen auf der Fläche des andern liegt, während die Spitze dieses Letztern sich ausserhalb der Fläche des erstern befindet.

In der That denken wir den Kegel $M$, $\mathbf{S}_1$ (Fig. 164.) und auf seiner Oberfläche also in einer seiner Erzeugenden $MS_1$ die Spitze $M^*$ eines zweiten Kegels mit der ersten Spur $\mathbf{S}_1{}^*$, so ist $MM^*S_1$ die Verbindungslinie der Spitzen und jede durch sie gehende Ebene schneidet den Kegel $M$ in noch einer Erzeugenden, den Kegel $M^*$ in zwei Erzeugenden, die mit jener Punkte der Curve liefern; insbesondere schneidet die Ebene durch $MM^*S_1$, welche den Kegel $M$ berührt, aus $M^*$ zwei Erzeugende heraus, die in $M^*$ die Curve berühren, welchen also zwei durch $M^*$ gehende Aeste der Durchdringungscurve entsprechen.

Fig. 164.



Wir bemerken auch, dass diese neue Form der Bedingung für die Entstehung eines Doppelpunktes von der des § 81., der Berührung der Flächen, nicht eigentlich verschieden ist, da die Berührungsebene des Kegels $M$, $\mathbf{S}_1$ in Bezug auf den Kegel $M^*$, $\mathbf{S}_1{}^*$ allerdings in $M^*$ die Eigenschaft der Tangentialebene hat, dass jede durch $M^*$ in ihr gezogene Gerade diese Kegelfläche in zwei zusammenfallenden Punkten trifft.

Man erkennt aus der Construction, dass nur die Kegel der Curve eigentlich doppelt umschrieben sind, welche ihre Spitzen nicht im Doppelpunkt der Curve haben — im Einklang mit dem gefundenen Resultat (§ 83.; *11, a.) $y = 4$.

Zugleich aber lehrt die Betrachtung dieses Falles eine wichtige Specialität kennen, die in den vorhergehenden allgemeinen Untersuchungen berührt aber nicht zur Anschauung gebracht worden ist: Man kann die Entstehung des stationären Punktes in der Raumcurve nachweisen, indem man die Tangenten der beiden durch den Doppelpunkt gehenden Curvenäste zum Zusammenfallen bringt und so die Schleife auf einen Punkt reduciert. Es ist augenscheinlich, dass diess eintritt, wenn die beiden Kegel $M$, $\mathbf{S}_1$ und $M^*$, $\mathbf{S}_1^*$, von denen der erste die Spitze des Letztern enthält, aber nicht umgekehrt, von der nämlichen Ebene $M^* S_1 S_1^*$ (Fig. 165., p. 299.) berührt werden, nämlich der Kegel $M$ längs der Erzeugenden $M S_1$, welche auch $M^*$ enthält, und der Kegel $M^*$ längs der Erzeugenden $M^* S_1^*$. In diesem Falle wird der Punkt $M^*$ zu einem stationären oder Rückkehrpunkt der Raumcurve vierter Ordnung und man hat den in § 83. unter *11, c) als möglich erkannten Fall der Raumcurve vierter Ordnung mit dem Character $\beta = 1$, der durch die Reciprocität seiner sämmtlichen Charactere theoretisch so grosses Interesse hat. Man hat dort gesehen, dass sie auch eine stationäre Ebene besitzt, welche dann die developpable Fläche in einer Curve zweiten Grades schneidet. Die Construction lehrt, dass nur der Kegel aus $M$ als ein eigentlicher doppelt berührender Kegel der Curve betrachtet werden kann, im Einklang mit dem am angeführten Orte gefundenen Resultat $y = 2$.

Denken wir die Polare $p_1$ des Punktes $S_1$ im Kegelschnitt $\mathbf{S}_1^*$ (Fig. 165.), eine durch $S_1^*$ gehende Gerade, so hat die durch $M^*$ nach ihr gelegte Ebene mit der Curve ausser dem Rückkehrpunkt $M^*$ nur noch einen Punkt $E$ gemein und bestimmt als die zugehörige Berührungsebene des Kegels $M$, $\mathbf{S}_1$ von der Spur $s_1$ die entsprechende Schmiegungsebene der Durchdringungscurve, die stationäre Ebene derselben — welche vier auf einander folgende Punkte derselben enthält.

Die Doppelcurve $\mathbf{D}$ — ein Kegelschnitt ($x = 2$ in § 83.;

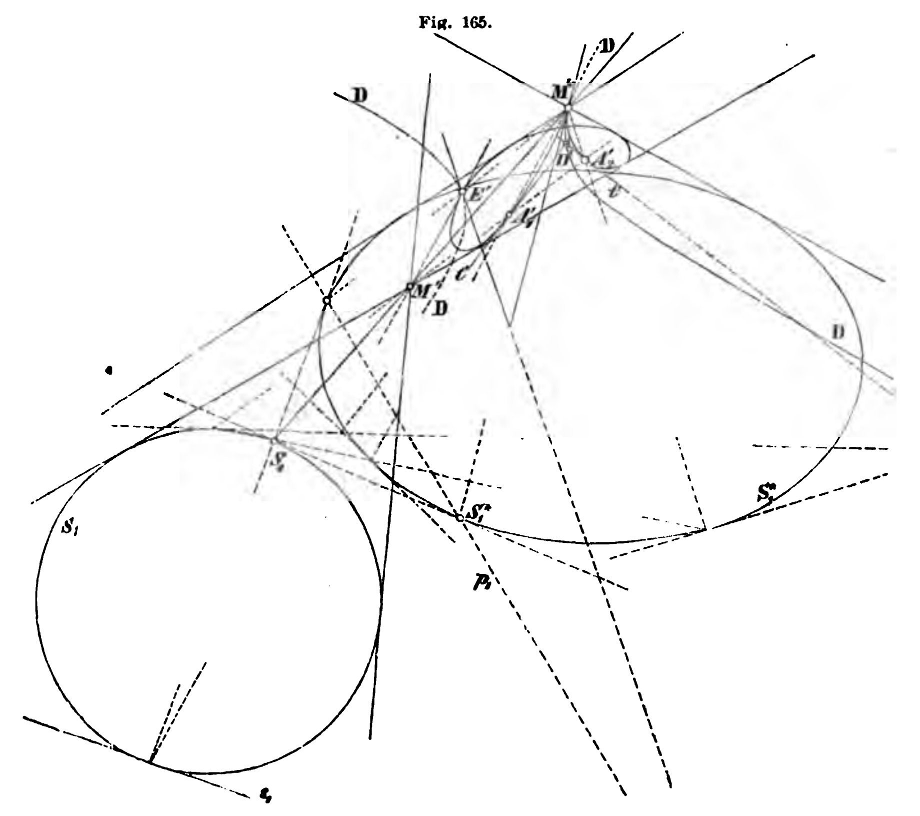
*11, c.) — liegt in der Polarebene $M^*p_1$ des Punktes $M$ in Bezug auf den Kegel $M^*$ und geht durch den Punkt $E$ der stationären Ebene, sowie durch den stationären Punkt $M^*$. (Vergl. § 86.) Je zwei Punkte der Durchdringungscurve wie $A_1$, $A_2$, die auf derselben Erzeugenden des Kegels $M$ liegen, haben Tangenten, welche in einem Punkte $D$ dieser Curve, und Schmiegungsebenen, welche in der entsprechenden Tangente derselben convergieren. Die Gerade $M^*S_1^*$ und die Gerade von $E$ nach dem Schnittpunkt von $s_1$ und $p_1$ sind Tangenten derselben. Nach den Eigenschaften von Pol und Polarebene sind alle diese Paare von Punkten, Geraden und Ebenen durch den Punkt $M$ und die Ebene $M^*p_1$ harmonisch getrennt und können somit als entsprechende Paare von Elementen einer involutorischen Centralcollineation im Raume angesehen werden, für welche $M$ das Centrum und $M^*p_1$ die Collineationsebene ist.

1) Man ordne die Durchdringung eines Kegels und eines Cylinders vom zweiten Grade so an, dass die Durchdringung einen gegebenen stationären Punkt besitzt mit einer gegebenen Geraden als der entsprechenden Tangente, und bezeichne die Lage ihrer stationären Ebene.
2) Wenn die Durchdringung einer Cylinder- und einer Kegelfläche einen unendlichen Ast besitzt, so entspricht diesem stets ein Doppelpunkt; wie erhält man seine Tangenten?
3) Man ordne die Durchdringung zweier Kegel zweiten Grades und sodann die eines Cylinders und eines Kegels vom zweiten Grade so an, dass dieselbe einen Doppelpunkt in unendlicher Ferne besizt; man characterisiere die Curve in der Umgebung desselben.
4) Eine Raumcurve vierter Ordnung soll einen stationären Punkt in unendlicher Ferne haben und als Durchdringung eines Cylinders und eines Kegels vom zweiten Grade construiert werden. Man characterisiere die Doppelcurve ihrer developpabeln Fläche.
5) Man construiere eine Raumcurve vierter Ordnung mit einem Rückkehrpunkt und zwei Asymptoten.
6) Die stationäre Ebene schneidet die developpable Fläche

der Raumcurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt in einem Kegelschnitt, welcher den zugehörigen Punkt der Curve enthält und ihre entsprechende Tangente, d. h. ihre Schnittlinie mit der Collineationsebene $M^* p_1$ berührt.

7) Die Schmiegungsebenen der Raumcurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt sind gemeinschaftliche Tan-

Fig. 165.



gentialebenen zweier Kegelschnitte, die einen Punkt $E$ gemein haben und von denen der eine die Durchschnittslinie ihrer Ebenen zu seiner Tangente in diesem Punkte hat.

8) Die Raumcurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt ist bestimmt, wenn die beiden Kegel zweiten Grades bestimmt sind, aus denen wir sie abgeleitet haben;

dazu genügt aber die Angabe des stationären Punktes $M^*$ als Spitze des einen Kegels, des Punktes der stationären Ebene $E$, der Spitze $M$ des doppelt umschriebenen Kegels, des Durchschnittspunkts der Ebene $M^* p_1$ mit der stationären Ebene und der gemeinsamen Tangentialebene beider Kegel, und eines einzigen von $M^*$ und $E$ verschiedenen Punktes der Curve. Denn diese Stücke liefern von jedem der beiden Kegel fünf Erzeugende.

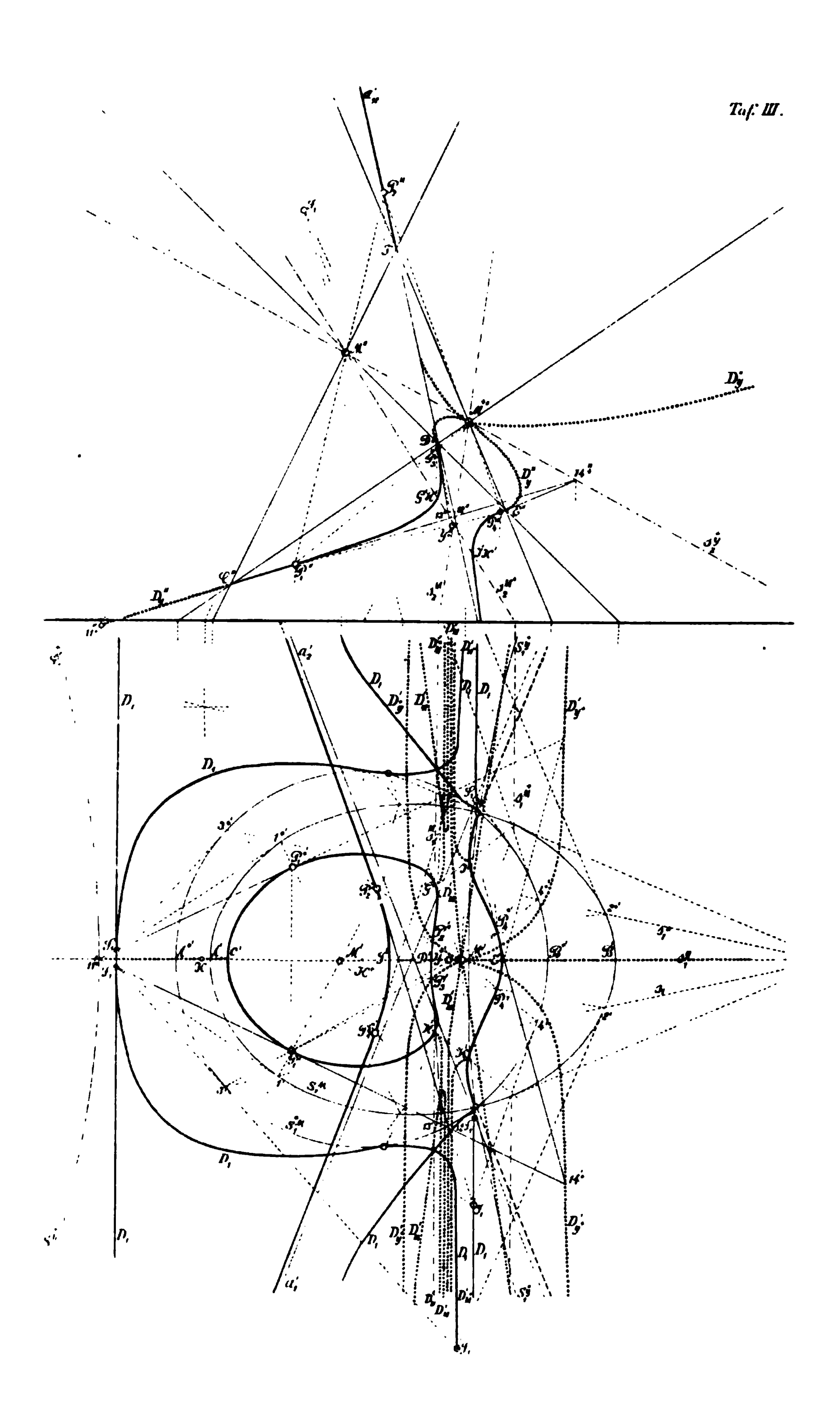
9) Da fünf Punkte im einen und ihre entsprechenden im andern von zwei collinearen Räumen willkürlich gewählt werden dürfen (vergl. § 44.), um dieselben zu bestimmen, so sind jede zwei und somit sämmtliche Raumcurven vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt unter einander collinear.

10) Man zeige, dass die beiden Kegelschnitte von 7) und somit die Developpable der Raumcurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt durch fünf Ebenen bestimmbar sind und erläutere den Schluss, dass daher jede Raumcurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt zu der developpabeln Fläche einer beliebigen andern solchen Curve projectivisch reciprok ist.

11) Die vier im Sinne des Schlusssatzes im Texte entsprechenden zu Schnittpunkten einer Ebene mit der Raumcurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt liegen wieder in einer und zwar in der zu jener entsprechenden Ebene.

12) Die entsprechenden zu den Schmiegungsebenen der Raumcurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt, welche von einem Punkte des Raumes ausgehen, gehen durch einen und zwar durch den zu jenem entsprechenden Punkt.

86. Die vorhergehenden Untersuchungen erschöpfen in einem gerade für die constructive Behandlung wichtigen Stück den Specialfall der Durchdringung von zwei Kegeln zweiten Grades nicht, nämlich rücksichtlich der doppelt-umschriebenen Developpabeln der Durchdringungscurve und der doppelt eingeschriebenen Curve der Developpabeln.


Taf. III.

Von der erstern ist bemerkt, dass die die Curve erzeugenden nämlich sich in ihr durchdringenden Kegel zweiten Grades selbst einen Theil derselben bilden, mit der Classenzahl vier, so dass ein zweiter Theil mit derselben Classenzahl noch nachzuweisen bliebe. Für die Doppelcurve ist nur das Resultat gewonnen, dass sie insgesammt von der Ordnungszahl 16 ist und dass sie von unendlich vielen Geraden, nämlich von allen Tangenten der Curve in je vier Punkten geschnitten wird. Man darf daraus schliessen, dass sie auf einer Fläche vierter Ordnung liegt und dass sie auch von der Raumcurve selbst in 16 Punkten geschnitten werden wird. Zu einer ebenso einfachen als nützlichen Erledigung dieser Fragen führt uns die Betrachtung der Durchdringung in Bezug auf ihre Symmetrieverhältnisse.

Die speciellste Form, in der die Symmetrieverhältnisse unserer Curven auftreten, ist die im Falle einer gemeinsamen Hauptebene beider Kegel, d. h. einer gemeinsamen Diametralebene derselben, welche alle zu ihr normalen Sehnen der Kegelflächen halbiert (vergl. § 68.). Jede zur gemeinsamen Hauptebene normale Ebene schneidet beide Kegelflächen in Curven zweiten Grades, für welche zwei Axen in der Schnittlinie mit jener Hauptebene vereinigt sind. Machen wir diese Hauptebene zur zweiten Projectionsebene unter Voraussetzung orthogonaler Parallel-Projection, so zeigt die Construction der Durchdringungscurve und ihrer Developpabeln folgende Besonderheiten. (Tafel III.)

Die zur Axe $OX$ parallele Verbindungslinie der ersten Projectionen der Spitzen $M$, $M^*$ enthält zwei Axen $A'B'$, $A^{*\prime}B^{*\prime}$ der ersten Spuren $\mathbf{s}_1^M$, $\mathbf{s}_1^{M^*}$ der Kegel und den ersten Durchstosspunkt der Geraden $MM^*$. Die zweiten Umrisse des einen mögen die des andern Kegels schneiden in $C''$, $D''$, $E''$, $F''$; dann sind diese die zweiten Projectionen von Punkten der Durchdringungscurve, deren erste Projectionen $C'$, $D'$, $E'$, $F'$ in der gemeinsamen Axe der ersten Spuren liegen und in denen die Tangenten der Curve zur Axe $OY$ parallel sind. Die Ebenen des Hilfsbüschels (§ 79.) liegen paarweis symmetrisch zur gemeinsamen Hauptebene, ihre Horizontalspuren zur gemeinsamen Hauptaxe der Spuren der Kegel; denken wir ein solches Spurenpaar $s_1$, $s_1^*$, von welchem die erste die

Spuren $\mathfrak{s}_1^M$, $\mathfrak{s}_1^{M*}$ der Kegel in den respectiven Punkten 1, 2, 3, 4, die zweite aber dieselben in der nämlichen Folge in den Punkten 1*, 2*, 3*, 4* schneidet, so folgt aus der orthogonalen Symmetrie der Spuren in Bezug auf die gemeinsame Axe, dass 11*, 22*, 33*, 44* je in einer Normale zu dieser liegen, also einerlei zweite Projection haben; es folgt also auch, dass die nach ihnen gehenden Kegelerzeugenden nicht nur ihre ersten Projectionen in Paaren $M'1'$, $M'1^{*\prime}$; $M'2'$, $M'2^{*\prime}$; $M^{*\prime}3'$, $M^{*\prime}3^{*\prime}$; $M^{*\prime}4'$, $M^{*\prime}4^{*\prime}$ symmetrisch zu $A'B'$, sondern auch ihre zweiten Projectionen paarweis zusammenfallend haben, nämlich $M''1''$, $M''1^{*\prime\prime}$; etc. Nun bestimmen aber die Paare der Erzeugenden $M1$, $M^*3$; $M1$, $M^*4$; $M2$, $M^*3$; $M2$, $M^*4$ mit einander vier Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ und die Paare $M1^*$, $M^*3^*$; $M1^*$, $M^*4^*$; $M2^*$, $M^*3^*$; $M2^*$, $M^*4^*$ vier weitere Punkte $P_1^*$, $P_2^*$, $P_3^*$, $P_4^*$ der Durchdringungscurve und man sieht, dass dieselben in der ersten Projection in Paaren $P_1$, $P_1^*$; etc. in Normalen zur Axe $OX$ liegen, während ihre zweiten Projectionen in den entsprechenden Paaren sich decken.

Die zweite Projection der Durchdringungscurve hat also die Eigenschaft, dass jeder ihrer Punkte zwei Punkte der Curve projiciert, deren erste Projectionen orthogonal-symmetrisch zur gemeinsamen Spurenaxe liegen (analog für die Tangenten — siehe weiterhin); sie ist somit ein Theil eines Kegelschnitts, der durch die Punkte $C''$, $D''$, $E''$, $F''$ geht und in denselben begrenzt ist. Der zweite projicierende Cylinder der Durchdringungscurve ist also ein doppelt projicierender oder ein Theil der doppelt umschriebenen developabeln Fläche der Durchdringungscurve. Zu den beiden die Curve erzeugenden Kegeln hinzu genommen ist in der Construction die doppelt umschriebene Developpable in drei doppelt projicierenden Kegelflächen zweiter Classe, also mit der Gesammtclasse sechs nachgewiesen und es erübrigt noch der Nachweis eines Restes derselben ($y = 8$) von der Classe zwei, der somit gleichfalls nur ein doppelt projicierender Kegel zweiter Classe sein kann. (Vergl. § 80.; 9. mit Berücksichtigung des Princips der Dualität.)

Dieser Nachweis ist leicht zu führen. In der zweiten Projection liegen die Punktepaare $P_1''$, $P_3''$; $P_2''$, $P_4''$ in Ge-

raden aus $M^{*''}$; die Geraden $P_1''P_4''$, $P_2''P_3''$ schneiden sich also in einem Punkte $Y^{*''}$, welcher der Pol der Geraden $M''M^{*''}$ in Bezug auf den die Durchdringungscurve repräsentierenden Kegelschnitt ist und in welchem sich eben deshalb die entsprechenden Verbindungslinien aller so gebildeten Gruppen von Punkten — wie sie aus je zwei zur Hauptebene symmetrischen Ebenen des Hilfsebenenbüschels entspringen — schneiden müssen. Somit enthalten die Ebenen $P_1P_1^*P_4^*P_4$, $P_2P_2^*P_3^*P_3$ eine zur Axe $OY$ parallele Gerade, die zugleich der Durchschnitt der Polarebene von $M$ im Kegel zweiten Grades aus $M^*$ und von $M^*$ im Kegel zweiten Grades aus $M$ ist und deren Durchschnittspunkt mit der gemeinschaftlichen Hauptebene somit der wirkliche Schnittpunkt der vier Geraden $P_1P_4^*$, $P_1^*P_4$, $P_2P_3^*$ und $P_2^*P_3$ ist, wie es die erste Projection bestätigt. Da auch dieser letzte Theil der gemachten Schlüsse für alle die Gruppen von je acht Punkten der Curve gilt, welche sich aus je zwei symmetrischen Hilfsebenen ergeben, so ist $Y^*$ der Scheitel eines doppelt projicierenden Kegels zweiter Classe für die Durchdringungscurve, des letzten Restes ihrer doppelt umschriebenen Developpabeln. In der Hyperbel $\mathbf{S}_1^{Y^*}$ ist die Horizontalspur desselben verzeichnet.

Betrachten wir ferner die Tangentialebenen der Kegelflächen $M$, $M^*$ in den nach $1, 2, 3, 4, 1^*, \cdots$ gehenden Erzeugenden, so sind dieselben nach der orthogonalen Symmetrie der Kegel in Bezug zur gemeinsamen Hauptebene selbst in Paaren symmetrisch zu dieser, nämlich diejenigen in $M1$, $M1^*$; $M^*3$, $M^*3^*$; etc. und dieselben Paare schneiden sich daher in Geraden auf der besagten Hauptebene; da nun die Tangente in $P_1$ als Schnittlinie der Tangentialebenen nach $M1$, $M^*3$ und die Tangente in $P_1^*$ als Schnittlinie der Tangentialebenen nach $M1^*$, $M^*3^*$ erhalten wird, so folgt, dass beide sich in einem Punkte der gemeinsamen Hauptebene durchschneiden. Das Gleiche ergiebt sich sofort für die Tangentenpaare der Durchdringungscurve in $P_2$, $P_2^*$; $P_3$, $P_3^*$; $P_4$, $P_4^*$. Es folgt ebenso für alle die Gruppen von Tangenten in solchen acht Punkten der Durchdringungscurve, wie sie durch je ein Paar symmetrische Hilfsebenen gefunden werden. Somit liegt in dieser Hauptebene eine Doppelcurve

der developpabeln Fläche der Durchdringungscurve. Es ist evident, dass dieselbe in $C$, $D$, $E$, $F$ der Durchdringungscurve selbst begegnet. Wir bemerken auch, dass die Ebene dieser Doppelcurve die Spitzen der drei doppelt projicierenden Kegel $M$, $M^*$, $Y^*$ enthält.

Damit ist nun deutlich der Weg zur Erkenntniss der Lage der übrigen Doppelcurven und der Symmetrieverhältnisse für den allgemeinen Fall gewiesen. Die orthogonale Symmetrie der Kegelflächen aus $M$, $M^*$, $Y^*$ und ihrer gemeinsamen Durchdringungscurve in Bezug auf die gemeinsame Hauptebene ist nichts anderes als die specielle Form einer involutorischen Collineation derselben, nämlich mit der Collineationsebene $MM^*Y^*$ und für den unendlich fernen Punkt $Y$ der Axe $OY$ als Centrum. (Vergl. § 42.)

Solcher involutorischer Centralcollineationen sind aber noch drei vorhanden, nur dass ihre Centra endlich entfernt und sie daher von allgemeinerer Form sind.

Für $M$ als Centrum sind die Kegel zweiten Grades aus $M^*$, $Y^*$ und der Richtung $Y$ von $OY$ durch die Curve, diese Curve selbst und ihre developpable Fläche in centrischer involutorischer Collineation mit der Collineationsebene $M^*Y^*Y$; also ist diese Ebene die Ebene einer Doppelcurve der Developpabeln, in welcher diejenigen Tangentenpaare der Raumcurve sich schneiden, deren Berührungspunkte auf einerlei Erzeugenden des Kegels aus $M$ liegen.

Ebenso ist für $M^*$ als Centrum die Gruppe der Kegel aus $M$, $Y^*$, $Y$, die Curve und ihre Developpable in involutorischer Collineation für die Ebene $MY^*Y$, und für $Y^*$ als Centrum die Gruppe der Kegel aus $M$, $M^*$, $Y$, etc. für die Ebene $MM^*Y$; diese letztern Ebenen enthalten daher gleichfalls Doppelcurven der developpabeln Fläche der Durchdringungscurve und zwar schneiden sich in ihnen diejenigen Tangentenpaare der Durchdringungscurve, für welche die Paare der Berührungspunkte respective auf denselben Erzeugenden aus $M^*$ oder aus $Y^*$ liegen.

In jedem Falle ist das Centrum der Involution der Durchschnitt der Polarlinien der Collineationsebene in Bezug auf die Kegel der Gruppe oder ihr Pol in Bezug auf dieselben.

Zwei dieser Centra sind somit in ihrer Verbindungslinie die Punkte des gemeinsamen Paares der beiden Involutionen, welche durch die beiden bezüglichen involutorischen Collineationen in ihr bestimmt werden. Die Ebenen der Doppelcurven der Developpabeln sind die Ebenen, welche durch die Spitzen der doppelt projicierenden Kegel der Curve zu je dreien bestimmt werden.

Jede Erzeugende der Developpabeln oder jede Tangente der Durchdringungscurve schneidet vier andere Tangenten derselben, nämlich in denjenigen vier Punkten, in welchen sie den vier Ebenen durch je drei der Spitzen der doppelt projicierenden Kegel der Curve begegnet und zwar in jeder dieser Ebenen die Tangente in dem Punkte der Curve, der mit ihrem eigenen Berührungspunkt auf derselben Erzeugenden desjenigen doppelt projicierenden Kegels derselben liegt, dessen Spitze jener Ebene nicht angehört. (Vergl. § 84.)

Man sieht leicht, wie diese Beziehungen für die Construction der Durchdringungscurve von grösstem Werthe sind.

Die Fig. der Tafel III. giebt die Doppelcurven, welche den Spitzen $M$, $M^*$, $Y^*$, $Y$ entsprechen, als $\mathrm{D}_M$, $\mathrm{D}_{M^*}$, $\mathrm{D}_{Y^*}$ (in der Horizontalprojection), $\mathrm{D}_Y$ (in der Verticalprojection); die Tangente in $P_1$ wird von den Tangenten in $P_2$, $P_3$, $P_4^*$, $P_1^*$ respective in den zu jenen Curven gehörigen Punkten 12, 13, 14*, 11* getroffen, die Tangente in $P_1^*$ von denen in $P_2^*$, $P_3^*$, $P_4$, $P_1$ in Punkten derselben Curven. Die horizontalen Durchstosspunkte dieser fünf Tangenten sind durch $S_1$ bezeichnet und auf den entsprechenden Zweigen der Horizontalspur $\mathrm{D}_1$ der developpabeln Fläche zu finden.

In $G$, $H$, $I$, $K$ wird die Curve von der Doppelcurve $\mathrm{D}_{M^*}$ getroffen; ihnen entsprechen die vier Punkte, wo die Spur $\mathrm{S}_1{}^M$ von der Horizontalspur der developpabeln Fläche berührt wird — und diese Inflexionen hat, nach den Spuren der stationären Ebenen der Developpabeln. In $a_1$ und $a_2$ sind endlich die Asymptoten der Curve verzeichnet und ihre horizontalen Durchstosspunkte sind als Punkte $S_1$ angegeben.

Die allgemeine Benutzung der entwickelten Eigenschaften ist durch das Vorige gesichert, denn es gilt der Satz: Sind $M_1$ und $M_2$ die Spitzen von zwei Kegelflächen zweiten Grades $K_1$ und $K_2$, so findet man die Scheitel

$M_3$, $M_4$ der beiden andern doppelt projicierenden Kegel $K_3$, $K_4$ ihrer Durchdringungscurve in der Geraden, in welcher sich die Polarebenen von $M_1 M_2$ im Kegel $M_2$ und von $M_2 M_1$ im Kegel $M_1$ durchschneiden; und zwar als diejenigen Punkte derselben, die das gemeinsame Paar der beiden Involutionen harmonischer Pole bilden, die in ihr durch die beiden Kegel $K_1$ und $K_2$ respective bestimmt werden. Dann sind die Ebenen $M_1 M_2 M_3$, $M_2 M_3 M_4$, $M_3 M_4 M_1$, $M_4 M_1 M_2$ die Ebenen, in welchen die Doppelcurven der developpabeln Fläche der Durchdringungscurve liegen, und die in dem vorher begründeten Sinne den Scheiteln $M_4$, $M_1$, $M_2$, $M_3$ respective entsprechen.

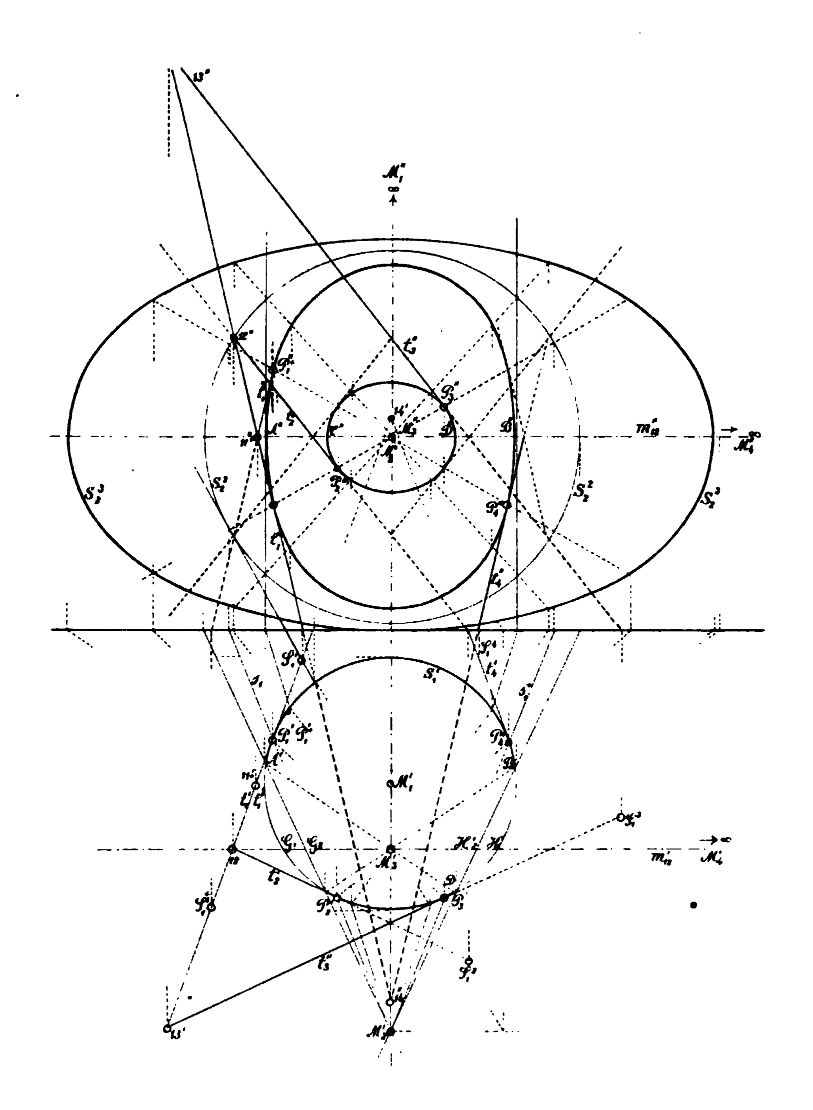
1) Wenn die gegebenen Kegelflächen eine gemeinsame zur nämlichen Richtung conjugierte Diametralebene haben, so würde bei schräger Parallelprojection — nämlich für jene Diametralebene als Projectionsebene und diese Richtung als Richtung der projicierenden Strahlen — die bezügliche Projection der Durchdringungscurve ein Kegelschnitt sein.

2) Man zeige wie der Fall der Kegel mit gemeinsamer Hauptebene durch centrisch collineare Ableitung in den allgemeinen Fall übergeführt wird. Durch welcherlei Ableitung erhält man aus ihm den Specialfall unter 1)?

3) Man erläutere näher die constructive Benutzung der Scheitel der doppelt projicierenden Kegel und ihrer Ebenen — von jenen Gruppen von acht Punkten aus, wie $P_1, \cdots P_4$; $P_1^* \cdots P_4^*$, welche von $P_1$ und $P_1^*$ aus in zwei Gruppen von je vier zerfallen, deren Tangenten die Tangente in $P_1$, respective $P_1^*$ durchschneiden.

4) Unter welchen Bedingungen sind die beiden weitern Kegel zweiten Grades — d. h. die Spitzen $M_3$, $M_4$ derselben — welche durch die Schnittcurve von zwei Kegeln zweiten Grades $K_1$, $K_2$ aus $M_1$, $M_2$ gehen, nicht reell? (Vergl. § 31.; 13.)

5) Wenn von den Spitzen $M_1$, $M_2$ die eine so liegt, dass von ihr an den Kegel der andern keine Tangential-



ebenen gehen, so sind die Spitzen der beiden andern doppelt projicierenden Kegel stets reell.

6) Die Punkte — in der Fig. Tafel III. $C, D, E, F, G, H, I, K$ — in welchen die Doppelcurven der developpabeln Fläche der Raumcurve vierter Ordnung dieser Curve selbst begegnen, sind die Punkte stationärer Ebenen derselben. Ihre Gesammtzahl ist 16; in dem durchgeführten Falle sind 8 reell, die in zwei Seitenflächen des Tetraeders der Spitzen der doppelt berührenden Kegel liegen — in $MY^*M^*$ und $MY^*Y$. Die Doppelcurven sind ebene Curven vierter Ordnung. ($x = 4.4$)

7) Die Doppelpunkte der Spur der developpabeln Fläche der Curve liegen in den gleichnamigen Spuren der Ebenen ihrer Doppelcurven.

8) Wodurch sind die Punkte characterisiert, in welchen die Spur der developpabeln Fläche der Durchdringungscurve die gleichnamigen Spuren der doppelt berührenden Kegel derselben tangiert?

9) Man bestimme die zwei fehlenden Spitzen der doppelt projicierenden Kegel für die Durchdringungscurve einer Cylinderfläche und einer Kegelfläche vom zweiten Grade mit einer gemeinsamen Hauptebene und construiere mittelst der Ebenen der Doppelcurven ihrer Developpabeln diese Durchdringung durch Punkte und Tangenten. Speciell für einen zur Axe $OZ$ parallelen geraden Kreiscylinder $M_1$, $S_1^1$ und einen Rotationskegel $M_2$, $S_2^2$, dessen Axe die seinige schneidet und zu $OY$ parallel ist. Die Tafel IV. giebt sie und die daran sich knüpfenden Beziehungen zu den Punkten und Tangenten der Durchdringungscurve. Die Schnittlinie der Polarebenen von $M_1$ und $M_2$ in den Kegeln $M_2 S_2^2$ und $M_1 S_1^1$ respective ist $m_{12}$, die in ihr liegenden Involutionen, $G_1$, $H_1$; $G_2$, $H_2$ (es sind ihre Doppelpunkte) haben zu gemeinsamen Elementen den Mittelpunkt $M_3$ und den unendlich fernen Punkt $M_4$. Von den vier doppelt berührenden Kegeln der Curve ist nur der zu $M_4$ gehörige hyperbolische nicht gezeichnet, da seine Spur in der dritten Projectionsebene liegt. Für $M_3$ ist die Ellipse $S_2^3$ die zweite

Spur; für $M_2$ der Vollkreis $\mathbf{s}_2^2$, für $M_1$ die zwischen den Umrissen des Kegels $M_2$ liegenden Bögen $AB$, $CD$ des Kreises $\mathbf{s}_1^1$; die Hyperbel $\mathbf{s}_3^4$ würde auch nur zwischen den Umrissen des Cylinders $M_1$ als Projection reeller Curventheile erscheinen.

Die Construction der Punkte und Tangenten ist für die symmetrischen Hilfsebenen $s_1$, $s_1^*$ durchgeführt und bezeichnet; wenn die Tangente $t_1$ in $P_1$ als Schnitt bezüglicher zwei Tangentialebenen bestimmt ist, so ergeben sich mittelst der Horizontalprojectionen von $t_1^*$, $t_2$, $t_3$, $t_4$ und durch die Punkte der Doppelcurven 11*, 12, 13, 14 die Tangenten in $P_1^*$, $P_2$, $P_3$, $P_4$ in der Verticalprojection; die $t_2''$, $t_3''$ sind parallel. Die Tangenten in den übrigen drei Punkten der Gruppe von acht Punkten, welche $s_1$, $s_1^*$ liefern, sind damit offenbar mit bestimmt; sie sind in Paaren parallel. Man characterisiere die acht reellen stationären Ebenen in diesem Falle eingehender.

10) Man construiere dasselbe für die Durchdringung von zwei geraden Kreiscylindern mit sich rechtwinklig kreuzenden Axen — respective parallel $OX$, $OZ$. Ebenso in andern speciellen Fällen.

11) Man construiere die fehlenden Scheitel der doppelt projicierenden Kegel und die Ebenen der Doppelcurven der Developpabeln für die Durchdringungscurven von zwei Kegeln zweiten Grades in Centralprojection unter der Voraussetzung von zwei reellen unendlichen Aesten derselben.

12) Man discutiere die Verhältnisse der Construction der Spitzen doppelt projicierender Kegel und damit der Ebenen doppelt eingeschriebener Curven bei der Raumcurve vierter Ordnung mit Doppel- respective Rückkehrpunkt (§ 85.) und bei der dritter Ordnung mit ihrer Secante; endlich bei der in zwei Kegelschnitte zerfallenden Durchdringung vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten.

13) Man beweise den Satz: Die vier Ebenen, welche eine Tangente der Curve vierter Ordnung aus zwei Kegelflächen zweiten Grades mit den Mittelpunkten der

vier Kegelflächen zweiter Ordnung bestimmt, welche durch sie gehen, bilden ein Büschel von constantem Doppelverhältniss; d. h. nach den Bezeichnungen der Tafel III.

$$(t_1 \cdot YMM^* Y^*) = const.$$

oder auch

$$(t_1 \cdot t_1^* t_2 t_3 t_4^*) = const.,$$

d. h. die vier Ebenen, welche eine Tangente mit den vier andern Tangenten der Curve bestimmt, die sie schneidet, bilden eine Gruppe von constantem Doppelverhältniss.

14) Bemerkt man, dass die Spuren dieser Ebenenbüschel Strahlenbüschel von constantem Doppelverhältniss bilden, so ergiebt sich speciell für die acht Tangenten einer Gruppe $t_1, t_2, t_3, t_4, t_1^*, \cdots t_4^*$ aus

$$(t_1 \cdot t_1^* t_2 t_3 t_4^*) = (t_1^* \cdot t_1 t_2^* t_3^* t_4),$$

dass die Durchstosspunkte derselben in einer beliebigen Ebene also z. B. ihre $S_1$ acht Punkte eines und desselben Kegelschnitts sind.

Man findet auch, dass die Projectionen der acht Tangenten in einer beliebigen Ebene Tangenten eines Kegelschnitts sind. (Vergl. § 101.)

**B. Von den krummen Flächen im Allgemeinen und den Flächen zweiten Grades insbesondere.**

87. Wir fassen eine krumme Fläche zunächst als den Ort einer gesetzmässig bewegten und dabei ihre Form stetig verändernden Curve und nennen sie eine Fläche $m^{ter}$ Ordnung, wenn eine gerade Linie sie in höchstens $m$ Punkten schneidet, so dass jede Gerade ihr ganz angehören oder alle ihre Punkte mit ihr gemein haben muss, welche mehr als $m$ Punkte der Fläche enthält. (Vergl. § 62.; § 80.)

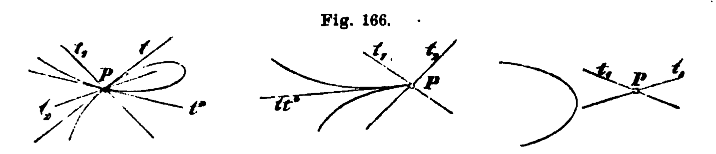
Eine Gerade $t$, welche zwei unendlich nahe Punkte der Fläche mit einander verbindet, wird eine Tangente derselben und die Vereinigung $P$ dieser Punkte ihr Berührungspunkt genannt. Es lassen sich auf der Fläche durch diesen Punkt unendlich viele Curven ziehen, welche in ihm von dieser Geraden berührt werden, unter ihnen alle die ebenen Querschnitte der Fläche, welche durch sie hindurchgehen, Curven $m^{ter}$ Ordnung, die von $t$ ausser in $P$ noch in $(m - 2)$ andern Punkten getroffen werden.

Denken wir in einem Punkte $P$ der Fläche zwei Tangenten $t_1$, $t_2$ an dieselbe gezogen, so bestimmen dieselben mit einander eine Ebene, deren Schnittcurve mit der Fläche in $P$ sowohl mit $t_1$ als mit $t_2$ zwei zusammenfallende Punkte gemein hat, in welcher also der Punkt $P$ ein doppelter Punkt ist. In Folge dessen haben aber alle durch $P$ gehende in der Ebene $t_1 t_2$ gelegene Gerade in $P$ ein Paar zusammenfallender Punkte mit der Fläche gemein und sind somit Tangenten derselben. Die Ebene, welche sie alle enthält, nennen wir die Tangentialebene der Fläche im Punkte $P$ und sie ist durch zwei Tangenten derselben in $P$ d. h. durch zwei Gerade bestimmt, welche in $P$ die Fläche d. i. auf ihr gelegene Curven berühren. Die Normale derselben im Punkte $P$ wird als die Normale der Fläche in $P$ bezeichnet.

Unter allen Tangenten der Fläche im Punkte $P$ sind die beiden $t$, $t^*$ hervor zu heben, welche zugleich Tangenten der Schnittcurve der Tangentialebene mit der Fläche im Punkte $P$ sind und die daher in $P$ mit der Fläche nicht nur wie alle

andern Geraden der Ebene $t_1$, $t_2$ zwei, sondern drei unendlich nahe Nachbar-Punkte gemein haben. Weil in Folge dessen jeder durch $t$ oder $t^*$ geführte ebene Schnitt der Fläche mit $t$ respective $t^*$ in $P$ drei auf einander folgende Punkte gemein oder diese Gerade zur Inflexionstangente mit dem Berührungspunkte $P$ hat, so sollen $t$, $t^*$ die **Inflexionstangenten der Fläche** im Punkte $P$ heissen — man nennt sie auch die **Haupttangenten**.

Fig. 166.



Je nach der Natur des Doppelpunktes $P$ in der Schnittcurve der Tangentialebene (§ 62.) als einfacher Doppelpunkt, als Rückkehrpunkt oder als isolierter Punkt — für solche Punkte ebener Curven zeigt sich hier ihre geometrische Entstehung — sind diese Inflexionstangenten entweder reell und verschieden oder sie decken sich oder sie sind nicht reell. Und man unterscheidet hiernach **hyperbolische Punkte der Fläche** d. i. solche mit reellen und verschiedenen Inflexionstangenten von **parabolischen Punkten der Fläche** oder solchen mit vereinigten Inflexionstangenten und von **elliptischen Punkten** derselben mit nicht reellen Inflexionstangenten. (Fig. 166.)

1) Im Allgemeinen schneiden sich zwei Flächen von den Ordnungen $m_1$ und $m_2$ in einer Raumcurve von der Ordnung $m_1 m_2$; drei Flächen von den respectiven Ordnungen $m_1$, $m_2$, $m_3$ haben eine Gruppe von $m_1 m_2 m_3$ Punkten mit einander gemein.

2) Man sagt, zwei Flächen berühren einander im Punkte $P$, wenn sie diesen Punkt gemein und einerlei Tangentialebene in ihm haben. Zwei Flächen berühren einander längs einer Curve, wenn sie alle ihre Punkte gemein und in jedem derselben die nämliche Tangentialebene haben. Man sagt dann, sie seien einander nach dieser Curve um- oder eingeschrieben.

3) Das elementare Beispiel der Kugel zeigt den Character

der elliptischen Punkte; der Berührungspunkt ist als ein Kreis von unendlich kleinem Radius anzusehen, die Tangenten an denselben von seinem Mittelpunkte aus sind die von da nach den imaginären Kreispunkten der Ebene gehenden Geraden.

4) Die parabolischen Punkte einer Fläche bilden im Allgemeinen die Grenzlinie zwischen den Regionen elliptischer und hyperbolischer Punkte auf derselben. Jedes Modell einer Terrainfläche ist geeignet, diesen Uebergang zu erläutern.

5) Liegt eine gerade Linie $t$ in der Fläche, so ist sie für alle ihre Punkte die eine der Inflexionstangenten; daher ist auch die zweite Inflexionstangente in jedem derselben reell und die Punkte der Fläche in der Geraden sind hyperbolisch. Legt man dann durch den Punkt $P$ der Geraden eine Curve auf der Fläche und die Tangente $t_1$ dieser Curve in $P$, so bestimmt $t_1$ mit $t$ die bezügliche Tangentialebene der Fläche. Dieselbe berührt im Allgemeinen die Fläche nur im Punkte $P$.

6) In einer developpabeln Fläche sind alle Punkte parabolisch, die Erzeugende des Punktes ist die Vereinigung der Inflexionstangenten der Fläche in ihm — die Tangentialebene berührt in allen Punkten der Erzeugenden. Diess Verhalten der Tangentialebene trennt die developpabeln Flächen von den eigentlich krummen.

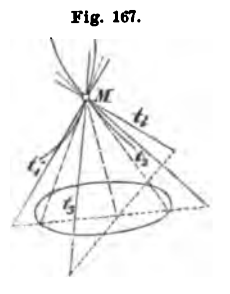
7) Während die developpabeln Flächen eine einfach unendliche Schaar von Tangentialebenen haben, und die Curven eine einfach unendliche Reihe von Punkten — jedes Element nur einem nächstfolgenden benachbart — zeigen die eigentlich krummen Flächen eine doppelt unendliche Schaar von Tangentialebenen wie eine doppelt unendliche Reihe von Punkten.

8) Die Berührung einer Fläche mit einer Tangentialebene in einem parabolischen Punkt derselben wird als eine stationäre bezeichnet. Die Ebene berührt die Fläche in zwei auf einander folgenden Punkten.

88. Das im Vorigen entwickelte Grundgesetz der Tangentialebene lässt eine Ausnahme zu, die man so aussprechen kann: Wenn durch den Punkt $M$ der Fläche mit zwei Tangenten $t_1$, $t_2$ derselben eine nicht in der Ebene der letzteren gelegene Gerade $t_3$ geht, welche in $M$ auch zwei zusammenfallende Punkte mit der Fläche gemein hat, so thut diess jede durch $M$ gehende Gerade $t_i$ und $M$ ist ein Doppelpunkt der Fläche oder ein conischer Punkt derselben.

Denn die Ebene $t_3 t_i$ schneidet die Fläche in einer Curve, welche in $M$ die Gerade $t_3$ berührt und auch die Schnittlinie der Ebenen $t_1 t_2$ und $t_3 t_i$ in zwei in $M$ zusammenfallenden Punkten trifft; also schneidet jede durch $M$ gehende Ebene die Fläche in einer Curve, die in $M$ einen Doppelpunkt hat. Im Allgemeinen hat jede dieser Curven in $M$ zwei reelle und verschiedene, oder vereinigte oder nicht reelle Tangenten, welche in $M$ drei auf einander folgende Punkte mit der Fläche gemein haben; die Fläche hat also in einem solchen Punkte $M$ unendlich viele Paare von Inflexionstangenten und diese bilden eine Kegelfläche zweiter Ordnung und Classe (Fig. 167.), da ihrer nicht mehr als zwei in einer Ebene liegen. Jede Ebene, die diesen Kegel berührt, schneidet die Fläche in einer Curve mit Rückkehrpunkt in $M$ und mit der zugehörigen Erzeugenden des Kegels als Rückkehrtangente.

Fig. 167.




In analoger Weise wie der doppelte oder zweifache kann ein $p$facher Punkt der Fläche definiert werden. Jede durch ihn gehende Gerade hat in ihm $p$ vereinigte Punkte mit der Fläche gemein, jeder durch ihn geführte ebene Schnitt hat in ihm einen $p$fachen Punkt, d. h. die Schnittcurve geht $p$mal durch ihn hindurch und hat in ihm $p$ im Allgemeinen von einander verschiedene Tangenten; diese Tangenten haben in dem gedachten Punkte $(p+1)$ vereinigte Punkte mit der Fläche gemein und bilden, weil in jeder den Punkt enthaltenden Ebene nicht mehr als $p$ von ihnen liegen, einen Kegel von der Ordnung $p$ als eigentlichen Tangentenkegel der Fläche.

1) Hat eine Fläche von der Ordnung $m$ einen $m$fachen Punkt in $M$, so liegt jede Gerade, welche von diesem

nach einem andern Punkte der Fläche geht, ganz in derselben, weil sie Punkte in der Zahl $(m+1)$, also alle ihre Punkte mit der Fläche gemein hat. Somit ist die Fläche eine Kegelfläche $m^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Kegel zweiter Ordnung sind die einzigen Flächen zweiter Ordnung mit einem Doppelpunkt.

2) Eine developpable Fläche enthält in ihrer Doppelcurve unendlich viele Doppelpunkte; für jeden derselben zerfällt der Kegel der Inflexionstangenten in das Paar der bezüglichen Tangentialebenen der Fläche.

3) Die Rückkehrkante der developpabeln Fläche ist der Ort von Doppelpunkten derselben, für welche der Kegel der Inflexionstangenten ein in der entsprechenden Schmiegungsebene vereinigtes Ebenenpaar ist.

4) In analoger Weise wie die developpabeln Flächen kann auch eine krumme Fläche eine doppelte oder mehrfache Curve enthalten.

*) Ihre Ordnungszahl kann nicht grösser sein als $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$, weil eine ebene Curve $m^{\text{ter}}$ Ordnung nicht mehr als so viel Doppelpunkte haben kann.

89. Eine Fläche zweiter Ordnung ist jede Fläche, welche mit einer Geraden nicht mehr als zwei Punkte gemein haben kann, ohne sie ganz zu enthalten. Eine solche Fläche wird von einer Ebene im Allgemeinen in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten.

Fallen die zwei Schnittpunkte einer Geraden mit der Fläche in einen Punkt $P$ zusammen, so ist die Gerade eine Tangente der Fläche in $P$. Legt man in einem Punkte $P$ zwei Tangenten $t_1$, $t_2$ an die Fläche, so bestimmen dieselben mit einander die Tangentialebene $\mathbf{T}$ der Fläche im Punkte $P$ und diese schneidet die Fläche in einer Curve zweiter Ordnung mit Doppelpunkt in $P$, deren beide Tangenten in diesem Punkte die Inflexionstangenten der Fläche in $P$ sind; dieselben können reell und verschieden, oder vereinigt oder nicht reell sein. Sie sind im Falle ihrer Realität identisch mit dem Paar sich in $P$ schneidender Geraden, welche den in der Tangentialebene entstehenden Kegelschnitt mit Doppelpunkt in $P$ bilden. Und da jede von ihnen drei auf einander fol-

gende Punkte mit der Fläche zweiter Ordnung gemein hat, so liegen sie ganz in der Fläche. Man hat den Satz: Durch jeden Punkt einer Fläche zweiter Ordnung gehen zwei reelle und verschiedene oder in eine vereinigte oder zwei nicht reelle Gerade, welche ganz in der Fläche liegen.

Denken wir die Inflexionstangenten der Fläche zweiter Ordnung im Punkte $P$ reell und verschieden und bezeichnen sie durch $g$ und $l$, so gehen durch jeden andern Punkt $P_1$ derselben Fläche zwei Ebenen $P_1 g$ und $P_1 l$, von denen die erste die Fläche in einer weitern durch $P_1$ gehenden Geraden $l_1$ und die zweite sie in einer ebenfalls durch $P_1$ gehenden Geraden $g_1$ schneidet. Diese zwei Geraden $g_1$, $l_1$ bestimmen die Tangentialebene $T_1$ der Fläche zweiter Ordnung in $P_1$. Man hat also die Sätze: Alle Punkte einer Fläche zweiter Ordnung sind hyperbolisch, wenn ein einziger Punkt derselben hyperbolisch ist. Durch jeden Punkt $P$ einer solchen Fläche zweiter Ordnung gehen zwei reelle und verschiedene Gerade $g_1$ und $l_1$, die ganz in ihr liegen. Alle Geraden $g$ auf der Fläche schneiden jede Gerade $l$ und keine zwei Geraden $g$ schneiden einander; alle Geraden $l$ schneiden jede Gerade $g$ und keine zwei $l$ einander. Die Ebenen, welche durch eine Gerade $g$ mit je einer Geraden $l$ bestimmt werden, sind die Tangentialebenen der Fläche in den Punkten von $g$, in denen die bezüglichen $l$ ihr begegnen.

Die Flächen zweiter Ordnung mit hyperbolischen Punkten enthalten somit zwei Schaaren von unendlich vielen Geraden; sie heissen daher die Regelflächen zweiter Ordnung und jede wird als Vereinigung von zwei Regelschaaren — nämlich der der $g$ und der der $l$ — betrachtet, die die ganze Fläche in windschiefe Vierecke zerlegen.

1) Wenn die Inflexionstangenten $g$ und $l$ in einem Punkte $P$ der Fläche zweiter Ordnung zusammenfallen, so berührt die Tangentialebene der Fläche in $P$ — die dann durch eine weitere Tangente der Fläche in $P$ zu bestimmen ist — dieselbe in allen Punkten von

$gl$ oder $e$ — denn alle diese Punkte sind doppelte Punkte in ihrem Schnitt mit der Fläche.

2) In demselben Falle ist die Fläche eine Kegel- oder Cylinderfläche zweiten Grades; denn jeder Punkt $P_1$ der Fläche bestimmt mit den zusammenfallenden Inflexionstangenten von $P$ zwei vereinigte Ebenen, die die Fläche in den somit auch zusammenfallenden Inflexionstangenten $g_1$, $l_1$ oder $e_1$ von $P_1$ schneiden. Die Kegelflächen zweiter Ordnung sind die Flächen zweiter Ordnung mit parabolischen Punkten.

90. Wir studieren zunächst die Flächen zweiter Ordnung mit hyperbolischen, später dann die mit elliptischen Punkten. (§ 93. f.)

Denken wir drei Gerade $g_1$, $g_2$, $g_3$ der einen Regelschaar einer Regelfläche zweiter Ordnung — von denen also keine zwei in einer Ebene liegen können — so ist jede Gerade $l_i$ der zweiten Regelschaar dieser Fläche eine Transversale derselben und alle Geraden dieser zweiten Schaar, somit auch die Regelfläche zweiter Ordnung selbst sind also durch jene bestimmt; und zwar geht durch jeden Punkt $A_{11}$ von $g_1$ eine Gerade $l_1$, die Schnittlinie der beiden Ebenen $A_{11}, g_2$ und $A_{11}, g_3$ und anderseits liegt in jeder Ebene $\mathbf{A}_{11}$ durch $g_1$ eine Gerade $l_1$, die Verbindungslinie der Punkte $\mathbf{A}_{11}, g_2$ und $\mathbf{A}_{11}, g_3$. Die Geraden der Regelschaar $l$ sind somit

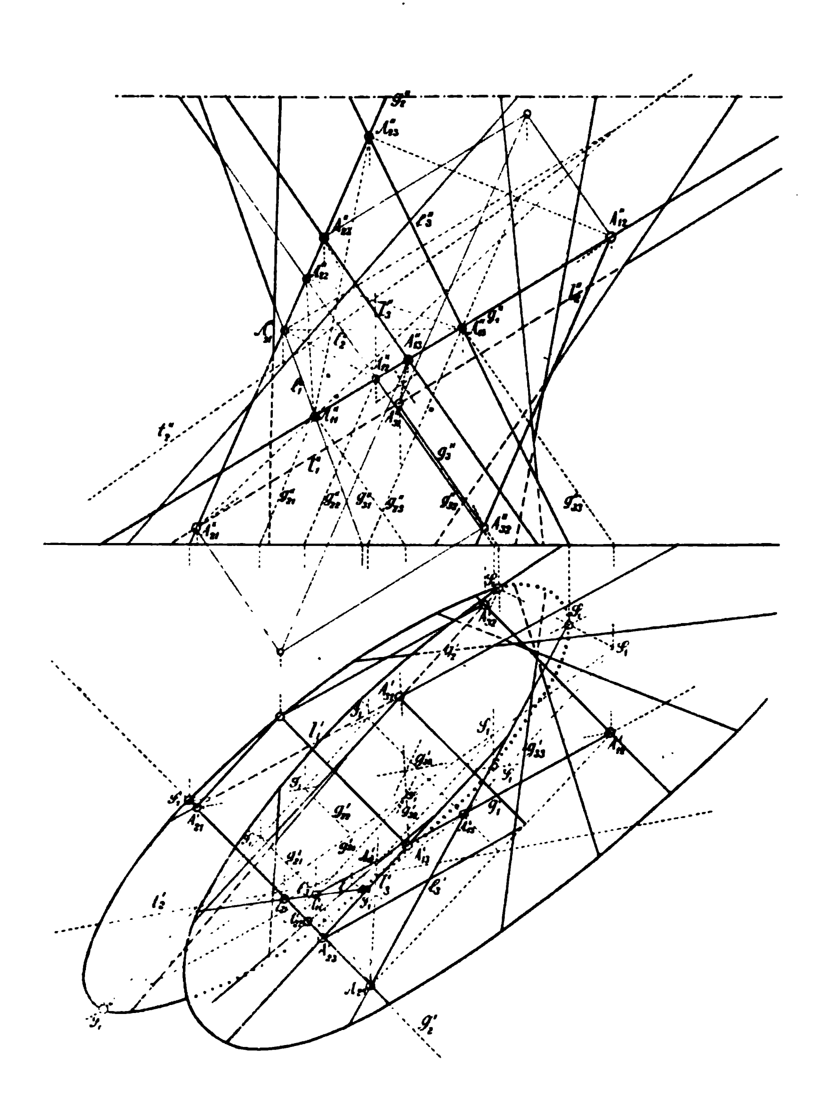
a) die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenen von zwei projectivischen Ebenenbüscheln, deren Scheitelkanten zwei Gerade der Schaar $g$ sind und welche zu der Punktreihe in einer dritten Geraden dieser Schaar perspectivisch liegen. Die Geraden der Schaar $l$ sind

b) die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte von zwei projectivischen Punktreihen, deren Träger zwei Gerade der Schaar $g$ sind und welche zu dem Ebenenbüschel aus einer dritten Geraden dieser Schaar perspectivisch liegen.

Nach denselben Constructionen bestimmt man aus drei Geraden der Schaar $l$ alle die Geraden der Schaar $g$ — natürlich auch die übrigen Geraden der Schaar $l$ durch diese.

Beide Constructionen sind projectivisch (§ 29.), werden also am Raumgebilde selbst ausgeführt, indem man sie in der





Projection vollzieht; sie sind daher auch für alle Projectionsmethoden gleich vortheilhaft.

Eine Regelfläche zweiter Ordnung heisst ein hyperbolisches Paraboloid, wenn sie von der unendlich fernen Ebene berührt wird, d. h. wenn zwei ihrer Geraden, je eine von jeder Schaar ganz im Unendlichen liegen. In jedem andern Falle schneidet die unendlich ferne Ebene die Fläche in einem eigentlichen Kegelschnitt und soll ein einfaches Hyperboloid heissen.

1) Man construiere zu drei durch ihre ersten und zweiten Projectionen gegebenen Geraden der Schaar $g$ die Geraden der Schaar $l$ nach der Methode a).

Wählen wir auf $g_1$ die Punkte $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{13}$, so bestimmen wir die von ihnen aus gehenden Geraden $l_1$, $l_2$, $l_3$ wie folgt: Wir ziehen durch $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{13}$ respective parallel $g_2$ die Geraden $g_{21}$, $g_{22}$, $g_{23}$ und parallel zu $g_3$ die Geraden $g_{31}$, $g_{32}$, $g_{23}$ und erhalten die $l_1$, $l_2$, $l_3$ als die Schnittlinien der Ebenenpaare $g_2g_{21}$, $g_3g_{31}$; $g_2g_{22}$, $g_3g_{32}$; $g_2g_{23}$, $g_3g_{33}$. Dazu wird die Bestimmung eines Punktes der jedesmaligen Schnittlinie gefordert, etwa eines Durchstosspunktes derselben; in Tafel V. ist der horizontale Durchstosspunkt benutzt, der als Schnittpunkt der Verbindungslinien der gleichnamigen Durchstosspunkte von $g_2$ und $g_{2i}$, respective $g_3$ und $g_{3i}$ entsteht. Dabei liegen die Durchstosspunkte der $g_{2i}$ respective $g_{3i}$ in einer Geraden mit dem gleichnamigen Durchstosspunkt von $g_1$. Zuweilen kann vortheilhaft der Durchschnittspunkt der Erzeugenden mit der Halbierungsebene $\mathbf{H}_{x'}$ (§ 46.; 3.) benutzt werden. Man erhält dabei als Ort der gleichnamigen Durchstosspunkte die betreffende Spur der Regelfläche zweiter Ordnung.

Bezeichnen wir die respectiven Schnittpunkte von $l_1$, $l_2$, $l_3$ mit $g_2$ durch $A_{21}$, $A_{22}$, $A_{23}$ und mit $g_3$ durch $A_{31}$, $A_{32}$, $A_{33}$, so sind die Reihen $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{13}$, $\cdots$; $A_{21}$, $A_{22}$, $A_{23}$, $\cdots$; $A_{31}$, $A_{32}$, $A_{33}$, $\cdots$ projectivisch zu einander und nach der früher entwickelten Construction (§ 17.) können also zu jedem Punkte $A_{in}$ in $g_i$ die entsprechenden Punkte in $g_k$ und $g_l$ hinzu con-

struiert werden, die dann mit jenem in einer Geraden $l_n$ gelegen sind.

Ebenso sind die Reihen $A_{11}, A_{21}, A_{31}, \cdots$ in $l_1$, $A_{12}, A_{22}, A_{32}, \cdots$ in $l_2$, $A_{13}, A_{23}, A_{33}, \cdots$ in $l_3$ zu einander projectivisch; etc.

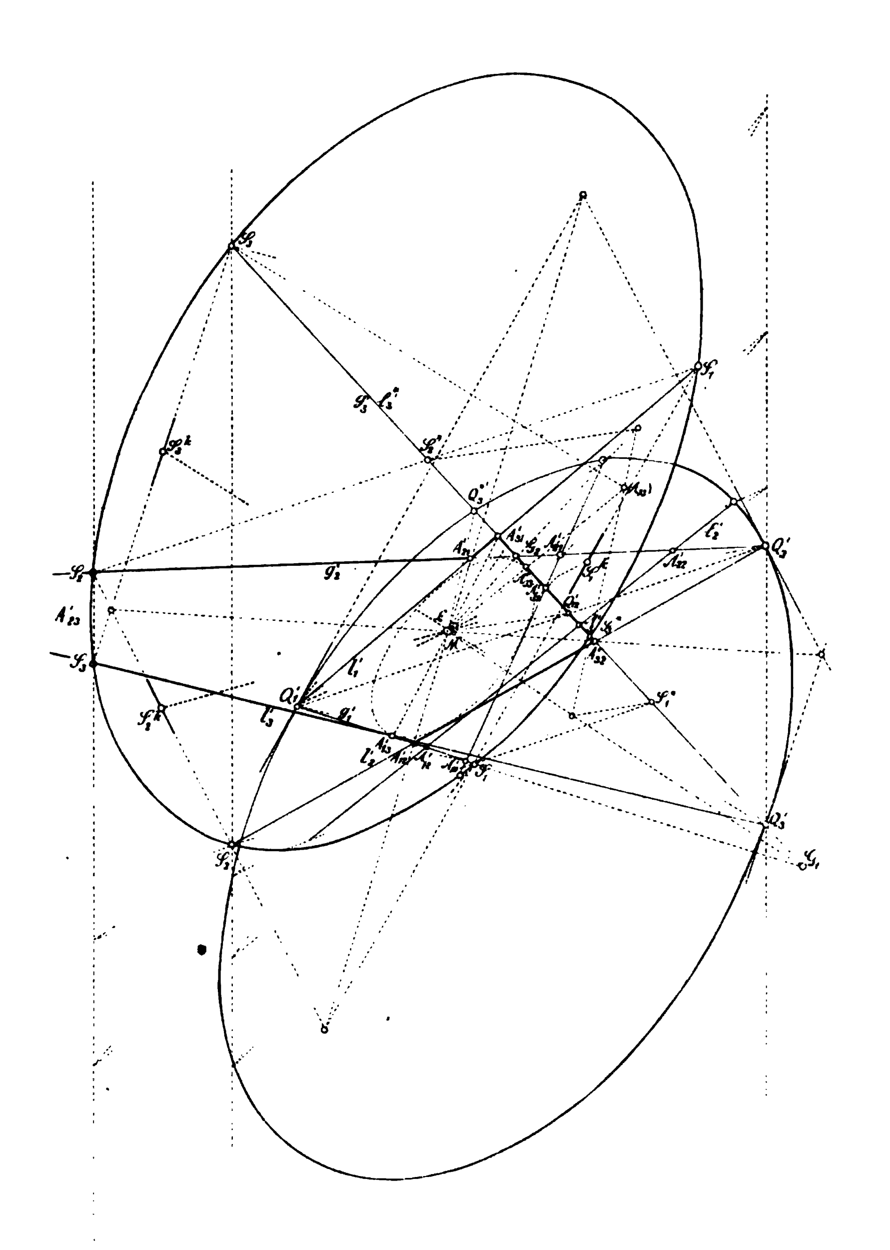
2) Man construiere zu den drei Geraden $g_1, g_2, g_3$ der einen Regelschaar diejenigen Geraden der andern Regelschaar der Fläche zweiter Ordnung, welche ihnen respective parallel sind. Dazu legt man durch $g_1$ die zu $g_2, g_3$ respective parallelen Ebenen $\mathbf{G}_{12}, \mathbf{G}_{13}$; durch $g_2$ die zu $g_3, g_1$ parallelen $\mathbf{G}_{23}, \mathbf{G}_{21}$ und durch $g_3$ die zu $g_1, g_2$ parallelen $\mathbf{G}_{31}, \mathbf{G}_{32}$ und bestimmt jene Erzeugenden $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ als die respectiven Schnittlinien der Ebenenpaare $\mathbf{G}_{21}, \mathbf{G}_{31}$; $\mathbf{G}_{32}, \mathbf{G}_{12}$; $\mathbf{G}_{13}, \mathbf{G}_{23}$. Die projectivischen Reihen in den Geraden $g$ und $\mathbf{l}$ sind dann durch ihre Gegenpunkte und je ein Paar entsprechender Punkte bestimmt. (Vergl. § 17.; 3.)

3) Die sechs Ebenen $\mathbf{G}_{ik}$ bilden ein Parallelepiped — denn $\mathbf{G}_{ik}$ und $\mathbf{G}_{ki}$ sind einander parallel — von welchem die Geraden $g_1 \mathbf{l}_2 g_3 \mathbf{l}_1 g_2 \mathbf{l}_3$ eine Kette von Kanten bilden und ein windschiefes Sechseck mit paarweis parallelen Gegenseiten. Seine Ecken sind in der entsprechenden Folge $\mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{32} \mathbf{A}_{31} \mathbf{A}_{21} \mathbf{A}_{23} \mathbf{A}_{13}$. Die Punkte $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}, \mathbf{A}_{33}$ liegen auf $g_1$ und $\mathbf{l}_1$, $g_2$ und $\mathbf{l}_2$, $g_3$ und $\mathbf{l}_3$ respective unendlich fern. Die Ebenen $g_1 \mathbf{l}_2$, $\mathbf{l}_2 g_3$, $g_3 \mathbf{l}_1$, $\mathbf{l}_1 g_2$, $g_2 \mathbf{l}_3$, $\mathbf{l}_3 g_1$ sind die Tangentialebenen der Fläche zweiter Ordnung in $\mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{32}, \mathbf{A}_{31}, \mathbf{A}_{21}, \mathbf{A}_{23}, \mathbf{A}_{13}$ respective und die Ebenen $g_1 \mathbf{l}_1$, $g_2 \mathbf{l}_2$, $g_3 \mathbf{l}_3$ in den unendlich fernen Punkten $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}, \mathbf{A}_{33}$.

Man verzeichne aus diesem Parallelepiped die axonometrische Projection des einfachen Hyperboloids.

4) Die perspectivischen Axen der projectivischen Reihen (vergl. § 17.) in den Erzeugenden $g_1$ und $g_2$, respective $g_3$ sind parallel je einer Diagonale des vorbezeichneten Parallelepipeds, welches die gegebenen $g$ mit den zu ihnen parallelen $\mathbf{l}$ bestimmen. In Tafel V. ist $t_2 \parallel \mathbf{A}_{12}, \mathbf{A}_{21}$.

5) Man construiere zu den Geraden $g_1, g_2, g_3$, welche



durch die Paare ihrer ersten Projectionen gegeben sind, die Geraden $l$, wenn insbesondere

a) $g_1$ parallel zur Projectionsaxe $OZ$,

b) $g_1$ parallel zur Projectionsaxe $OX$ und $g_2$ parallel $OY$,

c) $g_1$ parallel zu $OZ$, $g_2$ parallel zur Projectionsebene $XOZ$ gelegen sind.

6) Wenn zu den Geraden $g_1, g_2, g_3$ der ersten Regelschaar zwei Gerade $l_1, l_2$ der zweiten Schaar der Fläche gefunden sind, so sind in diesen die projectivischen Reihen durch $A_{11}, A_{21}, A_{31}$; $A_{12}, A_{22}, A_{32}$ bestimmt und zu jedem Punkte $A_{i1}$ der ersten construiert man den entsprechenden Punkt $A_{i2}$ der Letztern und somit als die Gerade $A_{i1} A_{i2}$ eine neue Gerade $g_i$. Man kann sagen: Eine Regelfläche zweiter Ordnung ist durch ein windschiefes Viereck und eine Transversale von zwei Gegenseiten desselben bestimmt.

7) Man construiere zu drei durch Fluchtpunkte und Durchstosspunkte centralprojectivisch bestimmten Geraden $g$ die Centralprojectionen der Geraden der Schaar $l$ nach der Methode unter b). (Tafel VI.)

Man dreht um die Gerade $g_1$ eine Ebene und bestimmt in jeder Lage ihre Durchschnittspunkte $A_{2i}$, $A_{3i}$ mit den Geraden $g_2$ und $g_3$; die Verbindungslinie $A_{2i}A_{3i}$ ist die Gerade $l_i$. Die Spur und Fluchtlinie der sich drehenden Ebene sind Parallelenpaare durch den Durchstosspunkt $S_1$ und den Fluchtpunkt $Q_1'$ von $g_1$ und zur Bestimmung der Durchschnittspunkte mit $g_2$ und $g_3$ wird man Hilfsebenen durch diese Geraden legen, etwa die beiden zu einander parallelen, deren gemeinschaftliche Fluchtlinie die Fluchtpunkte von $g_2$ und $g_3$ verbindet. Die Fig. Tafel VI. giebt die Durchführung für zwei Lagen, die Erzeugenden $l_1, l_2$ mit den Punktreihen $A_{11}, A_{21}, A_{31}$; $A_{12}, A_{22}, A_{32}$.

Sind zwei Lagen der $l$ bestimmt, so kann man die ferneren $g$ aus den projectivischen Reihen auf diesen, und aus drei Lagen der $l$ kann man die sämmtlichen übrigen $l$ mittelst der projectivischen

Reihen in den $g$ construieren. Die zu den drei gegebenen $g$ parallelen Geraden der Schaar $l$ sind in demselben Falle nach dem Vorigen zu construieren, und damit das Parallelepiped der Aufgabe 3) mit den bezüglichen neun Tangentialebenen der Fläche. Sie sind in der Figur construiert und durch $\mathbf{l}_1'\mathbf{l}_2'\mathbf{l}_3'$ bezeichnet; die Ecken des Parallelepipeds, welche der Fläche angehören oder die Ecken des windschiefen Sechsecks sind $\mathbf{A}_{12}'$, $\mathbf{A}_{13}'$, $\mathbf{A}_{23}'$, $\mathbf{A}_{21}'$, $\mathbf{A}_{31}'$, $\mathbf{A}_{32}'$; die Verbindungslinien der Gegeneckenpaare schneiden sich in $M'$ (vergl. § 92.; 11.) — dem Bilde vom Mittelpunkt des Hyperboloids.

Der Ort der Durchstosspunkte und der Ort der Fluchtpunkte aller Geraden beider Regelschaaren sind die Curven, die man als Spur und Fluchtlinie der Regelfläche zweiter Ordnung zu bezeichnen hat.

8) Man bestimme für die durch drei Gerade $g_1$, $g_2$, $g_3$ gegebene Regelfläche zweiter Ordnung in Centralprojection diejenigen Erzeugenden $l$, welche mit den $g$ respective das nämliche Bild haben. Sind $S_1 Q_1'$, $S_2 Q_2'$, $S_3 Q_3'$ die Paare der Durchstoss- und Fluchtpunkte von $g_1$, $g_2$, $g_3$ und sucht man Durchstoss- und Fluchtpunkt $S_3^* Q_3^{*\prime}$ von $l_3$, welches mit $g_3$ dasselbe Bild $l_3'$, $g_3'$ hat, so wird man etwa durch die parallelen Geraden $Q_1' Q_2' Q_{12}^{*\prime}$, $S_1 S_1^*$, $S_2 S_2^*$, ferner durch $S_1 Q_1'$, $S_2 Q_2'$ in $g_3'$ die Punkte $Q_{12}'^*$, $S_1^*$, $S_2^*$, $G_1$, $G_2$ bestimmen; denkt man dann einen beliebigen Punkt $\mathfrak{C}$ der Tafel — in Tafel VI. ist der Punkt $M'$ als dieses $\mathfrak{C}$ gewählt — als Umlegung des Centrums mit der projicierenden Ebene von $g_3$ und $l_3$, so erhält man die in Tafel VI. gegebene Construction für die Gerade $S_3^* Q_3^{*\prime}$ und das Bild des Schnittpunktes $A_{33}$ von $g_3$ und $l_3$. Man erläutere dieselbe vollständig. Der Punkt $A_{33}'$ ist der Berührungspunkt der Geraden $g_3'$ mit der Umriss-Ellipse des Hyperboloids und kann daher auch nach der projectivischen Erzeugung derselben construiert werden; ebenso die Punkte $S_3^*$, $Q_3^{*\prime}$ als Schnittpunkte der Geraden $g_3'$ oder $S_3 Q_3'$ mit dem Spur- respective Flucht-Kegelschnitt der Fläche.

9) Man construiere in Centralprojection diejenige Regelfläche zweiter Ordnung, für welche eine Gerade $g_1$ als projicierende Linie, eine Gerade $g_2$ als in der Bildebene gelegen und die Gerade $g_3$ willkürlich gegeben sind; insbesondere die in der Bildebene gelegene Erzeugende $l_1$ und damit den Berührungspunkt der Bildebene mit der Fläche; ebenso die Tangentialebene derselben im Centrum.

10) Man verzeichne in Centralprojection für das durch $g_1, g_2, g_3$ bestimmte einfache Hyperboloid diejenigen Tangentialebenen und ihre Berührungspunkte, welche durch $g_1$ gehen und die Tafelneigung $45^0$ besitzen.

11) Diejenigen Transversalen zweier Geraden $g_1, g_2$, die nicht in einer Ebene liegen, welche zu einer festen Ebene parallel sind, bilden die eine Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloids, für welches jene Geraden zur andern Regelschaar gehören. Man verzeichne dasselbe in Parallelprojection a) für jene Ebene als erste Projectionsebene, b) als Halbierungsebene $H_{x'}$, c) als erste projicierende Ebene.

12) Man construiere die Centralprojection des durch zwei Gerade der Schaar $g$ und die Tafelebene als Parallelebene der Schaar $l$ bestimmten hyperbolischen Paraboloids. Wo berührt es die Tafel, wo die Verschwindungsebene und die zweite Parallelebene?

13) Durch ein windschiefes Viereck, also auch durch ein beliebiges Tetraeder, nämlich eine Kette von vier Kanten desselben, ist ein hyperbolisches Paraboloid vollkommen bestimmt — weil zwei Gegenkanten die Stellung der Parallelebene liefern, welche mit den beiden andern zusammen die Bestimmung nach dem Vorigen leistet. Man verzeichne dasselbe für das reguläre Tetraeder in Parallelprojection und discutiere die Mehrdeutigkeit dieser Bestimmung.

14) Man construiere in Parallelprojection ein hyperbolisches Paraboloid, welches die erste und zweite Projectionsebene in gegebenen Punkten berührt.

15) Man bestimme für ein durch ein windschiefes Viereck gegebenes hyperbolisches Paraboloid a) in Parallel-

projection, b) in Centralprojection die Richtung, in welcher sein Berührungspunkt mit der unendlich fernen Ebene liegt.

16) Zu zwei Erzeugenden $g$ und einer Erzeugenden $l$ bestimme man ein hyperbolisches Paraboloid so, dass seine Richtungsebenen zu einander normal sind — gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid.

91. Wir stellen unten eine Reihe von Erzeugungen der Regelflächen zweiter Ordnung zusammen, welche constructives Interesse besitzen.

Aus den bereits discutierten ergiebt sich die Eigenschaft: Das Büschel der Tangentialebenen eines einfachen Hyperboloids durch eine seiner Erzeugenden ist projectivisch zu der Reihe ihrer Berührungspunkte in dieser Letzteren; d. h.

$$(g_1 \cdot l_1 l_2 l_3 l_4) = (A_{11} A_{12} A_{13} A_{14});$$

denn es ist

$$(g_1 \cdot l_1 l_2 l_3 l_4) = (A_{21} A_{22} A_{23} A_{24})$$

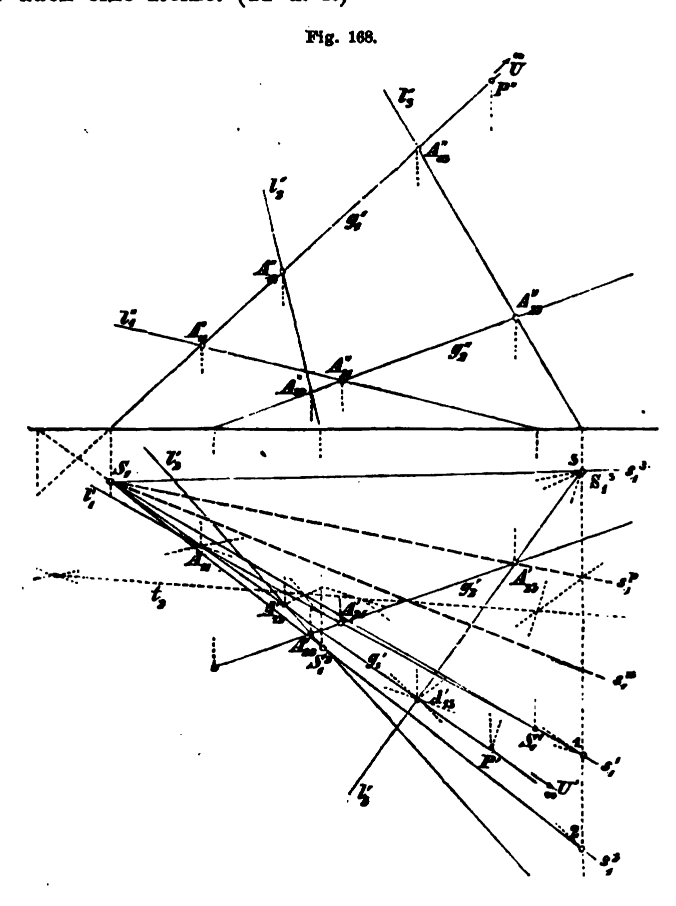
und

$$(A_{21} A_{22} A_{23} A_{24}) = (A_{11} A_{12} A_{13} A_{14}).$$

Zu drei Tangentialebenen einer Fläche zweiter Ordnung durch dieselbe gerade Erzeugende und ihren Berührungspunkten ist somit für jede vierte Tangentialebene der Berührungspunkt und für jeden vierten Punkt die Tangentialebene linear bestimmt — durch die Construction projectivischer ungleichartiger Grundgebilde erster Stufe. (§ 16.) Die Figur 168. zeigt für die Erzeugende $g_1$ eines einfachen Hyperboloids, das durch das windschiefe Viereck $g_1 l_1 g_2 l_2$ mit der Transversale $l_3$ bestimmt ist, die Construction der Tangentialebene im Punkte $P$ und im unendlich fernen Punkte $U$. Die Tangentialebenen in $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{13}$ sind als Ebenen $g_1 l_1$, $g_1 l_2$, $g_1 l_3$ durch ihre Horizontalspuren $s_1^1$, $s_1^2$, $s_1^3$ verzeichnet und es ist die aus ihrem Büschel durch die zur Axe $OX$ normale Gerade durch $S_1^3$ geschnittene Reihe 1, 2, 3 und die Reihe der Berührungspunkte $A_{11}'$, $A_{12}'$, $A_{13}'$ zur Construction der perspectivischen Axe $t_2$ benutzt; sodann sind zu $P'$ und $U'$ die entsprechenden Punkte bestimmt und durch sie die Spuren $s_1^p$ und $s_1^u$ gezogen.

Von den zahlreichen Consequenzen dieses Satzes geben wir auch eine Reihe. (11 u. f.)

Fig. 168.



1) Die Durchschnittslinien der entsprechenden Ebenenpaare von zwei projectivischen Ebenenbüscheln, deren Scheitelkanten nicht in einerlei Ebene liegen, sind die Geraden der einen Regelschaar einer Fläche zweiter Ordnung, zu der die Träger als Gerade der andern Schaar gehören. Wenn die Scheitelkanten in einer Ebene liegen, so entsteht ein Kegel, speciell eine Cylinderfläche zweiten Grades.
2) Wenn zwei Ebenen sich um feste Gerade $g_1$, $g_2$, die

nicht in einer Ebene liegen, so drehen, dass sie stets zu einander rechtwinklig bleiben, so erzeugt die Schnittlinie derselben die Regelschaar $l$ einer Fläche zweiter Ordnung durch $g_1$ und $g_2$.

3) Wenn zwei Paare von Ebenen sich um ihre respectiven Schnittlinien $g_1$, $g_2$ so drehen, dass die von ihnen gebildeten Winkel ihre Grösse nicht ändern, während zugleich das eine Paar der Schenkelebenen immer einen Punkt einer festen Geraden enthält, so beschreiben die übrigen Schnittlinien der Schenkelebenen die Schaaren $l$ von Regelflächen zweiter Ordnung durch die Scheitelkanten.

4) Die Verbindungslinien der entsprechenden Punktepaare von zwei projectivischen Reihen, deren Träger nicht in einer Ebene liegen, sind die Geraden der einen Regelschaar einer Fläche zweiter Ordnung, zu der die Träger als Gerade der andern Schaar gehören. Liegen sie in einer Ebene, so entsteht eine Curve zweiten Grades.

5) Wenn von den Geraden $g_1$, $g_2$, $g_3$ zwei in einerlei Ebene liegen, so entsteht als Specialfall der Regelfläche zweiter Ordnung als Ort ihrer Transversalen das Ebenenpaar. Wenn das Punktepaar?

6) Wenn zwei Gerade sich um ihren Schnittpunkt so drehen, dass sie zwei feste nicht in einer Ebene liegende Gerade $g_1$, $g_2$ stets schneiden, während sie zugleich zu einander normal bleiben, so erzeugt die Verbindungslinie ihrer Schnittpunkte mit $g_1$ und $g_2$ die Regelschaar $l$ einer Fläche zweiter Ordnung durch $g_1$ und $g_2$.

7) Wenn zwei Punktreihen in Geraden, welche nicht in einer Ebene liegen, projectivisch ähnlich sind (§ 17.; 4.), so erzeugen die Verbindungslinien der Paare ihrer entsprechenden Punkte die eine Regelschaar eines hyperbolischen Paraboloids, für welches die Träger zur andern Schaar gehören; auch darum ist durch ein windschiefes Viereck ein hyperbolisches Paraboloid vollkommen bestimmt, während für das Hyperboloid die Hinzufügung einer Transversale nöthig ist.

8) Wenn von zwei projectivischen Ebenenbüscheln das eine aus Parallelebenen besteht, so erzeugen die Schnittlinien entsprechender Paare ein hyperbolisches Paraboloid.
9) Ebenso, wenn das Paar ihrer parallelen Ebenen ein entsprechendes Paar ist.
10) Wenn man durch die Punkte einer geradlinigen Reihe Parallelen zu den entsprechenden Strahlen eines ihr projectivischen Strahlbüschels zieht, dessen Ebene jene Reihe nicht enthält, so sind diese die Erzeugenden $l$ eines hyperbolischen Paraboloids, welches den Träger der Reihe und die Stellung der Ebene des Büschels zu Erzeugenden der Schaar $g$ hat.
11) Zwei Hyperboloide, welche eine Erzeugende gemein und in drei Punkten derselben die nämlichen Tangentialebenen haben, berühren einander längs dieser Erzeugenden, d. h. sie haben in allen Punkten derselben einerlei Tangentialebenen.
12) Längs einer Erzeugenden wird eine Regelfläche zweiter Ordnung von unendlich vielen Hyperboloiden und Paraboloiden berührt — man kann in jeder der Tangentialebenen jeden Strahl des aus dem Berührungspunkt beschriebenen Büschels als Erzeugende wählen und erhält somit eine dreifache Unendlichkeit solcher Hyperboloide. Wie gross ist die Zahl der hyperbolischen Paraboloide unter ihnen?
13) Da die Schenkelebenen eines sich um seine Scheitelkante drehenden rechten Winkels die Paare eines involutorischen Ebenenbüschels liefern, so bestimmen die Berührungspunkte zweier rechtwinkligen Paare von Tangentialebenen durch eine Erzeugende in dieser eine Involution von Punkten, deren Centralpunkt die Eigenschaft hat, dass in ihm die Berührungsebene für den unendlich fernen Punkt der Erzeugenden — die man als die asymptotische Ebene der Fläche für dieselbe zu bezeichnen hat — normal zur Fläche d. h. normal zu ihrer Tangentialebene ist.

Nach der Construction in § 10.; 9. ist somit dieser Centralpunkt derjenige Punkt der Er-

zeugenden, wo dieselbe der nächstbenachbarten Erzeugenden derselben Schaar am nächsten ist. Jede Erzeugende enthält einen solchen Punkt und die Aufeinanderfolge derselben bildet eine Curve, die man die Strictionslinie der Fläche nennt.

Man construiere dieselbe durch ihre Punkte innerhalb eines windschiefen Vierecks mit einer Transversale, wodurch ein einfaches Hyperboloid bestimmt ist.

14) Die Normalen einer Regelfläche zweiter Ordnung in Punkten einer Erzeugenden bilden ein hyperbolisches Paraboloid, dessen Tangentialebene im bezüglichen Punkt der Strictionslinie der Fläche normal ist zur Richtung seines Berührungspunktes mit der unendlich fernen Ebene.

15) Die Normalen zu einer Erzeugenden der Regelfläche zweiter Ordnung in den Punkten derselben und in den bezüglichen Tangentialebenen bilden ein hyperbolisches Paraboloid, welches in allen Punkten der Erzeugenden dieselbe Tangentialebene mit der Fläche hat. Nach einer Drehung von 90$^0$ um diese Erzeugende fällt dasselbe mit dem Normalenparaboloid zusammen.

92. Eine Regelfläche zweiter Ordnung wird von jeder Ebene in einer Curve zweiter Ordnung geschnitten, die wir erzeugt denken können durch die projectivischen Strahlbüschel, welche diese Ebene mit den beiden die Regelfläche erzeugenden projectivischen Ebenenbüscheln hervorbringt. Jeder ebene Schnitt der Fläche ist also durch fünf Punkte d. h. die Schnittpunkte von fünf Erzeugenden der Fläche mit der Ebene vollständig bestimmt und wird aus denselben durch projectivische Construction linear verzeichnet (§ 25.; 27.). Die Schnittcurven der Fläche mit den Projectionsebenen sind bestimmt durch je fünf gleichnamige Durchstosspunkte.

An eine Regelfläche zweiter Ordnung geht von jedem Punkte aus ein Kegel zweiter Classe als Enveloppe aller der Tangentialebenen, die von jenem

Punkte möglich sind; wir können ihn erzeugt denken durch die projectivischen Strahlbüschel, welche dieser Punkt mit den projectivischen Reihen bestimmt, durch die die gegebene Kegelfläche erzeugt wird (§ 25.; 68.). Jeder Berührungskegel der Fläche ist somit durch fünf Tangentialebenen, d. h. durch die Verbindungsebenen des gegebenen Punktes mit fünf Erzeugenden der Fläche vollständig bestimmt und wird aus denselben durch projectivische Construction linear verzeichnet (§ 25.; 28.).

Der Berührungskegel aus dem Centrum der Projection und die Berührungscylinder parallel den Projectionsaxen liefern durch die Spur in der Bildebene oder in der zur betreffenden Axe normalen Projectionsebene den entsprechenden Umriss der Fläche, der also stets eine Curve zweiter Ordnung und durch die Bilder oder gleichnamigen Projectionen von fünf Erzeugenden der Fläche — als durch fünf Tangenten — völlig bestimmt ist. Die Figuren des § 90. zeigen daher auch die Umrisse der respectiven Hyperboloide. Denken wir in allen Punkten eines ebenen Schnittes der Regelfläche zweiter Ordnung die Tangentialebenen derselben bestimmt, so gehen diese alle durch einen Punkt und bilden eine Kegelfläche zweiter Classe, von der wir sagen, dass sie nach jenem Schnitt der Fläche umschrieben ist. Denn legen wir durch drei Punkte des ebenen Schnittes die Tangentialebenen der Fläche, so gehen diese durch einen Punkt, der mit dem ebenen Schnitt einen Kegel zweiten Grades bestimmt, welcher mit dem im Satze bezeichneten die Tangentialebenen in den drei gewählten Punkten und ihre Berührungserzeugenden gemein hat und also mit ihm identisch sein muss.

Ebenso liegen die Berührungspunkte aller der von einem Punkte ausgehenden Tangentialebenen in einem ebenen Querschnitt, also in einer Curve zweiter Ordnung.

1) Man zeichne in centraler oder axonometrischer Projection oder in zwei orthogonalen Parallelprojectionen den Querschnitt mit gegebener Ebene und den Tangentenkegel aus gegebenem Punkte für eine Regel-

fläche zweiter Ordnung, die durch ein windschiefes Viereck mit einer Transversale gegeben ist.

2) Nach § 86.; 14. sind die acht Tangenten der Durchdringungscurve von zwei Kegeln zweiten Grades in den Punkten einer Gruppe Erzeugende des nämlichen einfachen Hyperboloids — welches offenbar die Curve enthalten muss.

3) Man construiere die Spurcurven eines durch die beiden ersten Projectionen eines windschiefen Vierecks bestimmten hyperbolischen Paraboloids.

4) Die Ebene der beiden sich drehenden Geraden in Aufg. 6. des vorigen § umhüllt den Berührungskegel der dort erzeugten Regelfläche zweiter Ordnung, der seinen Mittelpunkt im Scheitel des rechten Winkels hat.

5) Man construiere die Spurcurve einer Regelfläche zweiter Ordnung in der Ehene $\mathbf{H}_{x'}$ — mittelst der Durchschnittspunkte der beiden ersten Projectionen der Erzeugenden. Sie ist umhüllt von den Affinitätsaxen der Tangentialebenen der Fläche in ihren Punkten.

6) Die Umrisse eines hyperbolischen Paraboloids in Parallelprojection sind Parabeln, also durch vier Tangenten d. h. die gleichnamigen Projectionen von vier Erzeugenden bestimmt; ebenso die Schlagschatten desselben auf Ebenen für parallele Lichtstrahlen.

7) Parallele Ebenen schneiden eine Regelfläche zweiter Ordnung in ähnlichen und ähnlich gelegenen Curven zweiter Ordnung — weil in Curven, welche durch gleiche Paare projectivischer Strahlenbüschel erzeugt werden, die also dieselben Asymptoten- und Axenrichtungen besitzen. (§ 29.; 4.)

8) Die Normalebenen der festen Geraden in Aufg. 2. des vorigen § schneiden die entstehende Regelfläche zweiter Ordnung in Kreisen. (§ 31.; 8., 10.)

9) Wenn eine Regelfläche zweiter Ordnung durch das windschiefe Sechseck der Kanten eines Parallelepipeds von solcher Art bestimmt wird, dass die kürzesten Entfernungen dieser Kanten vom Mittelpunkt des Parallelepipeds gleichgross sind und in einer Ebene liegen, so wird dieselbe von allen zu dieser Ebene

parallelen Ebenen in Kreisen geschnitten und kann erzeugt werden durch die Drehung einer Erzeugenden um eine durch den Mittelpunkt jenes Parallelepipeds gehende und zu jener Ebene normale Axe. Eine solche Fläche heisst ein einfaches Rotationshyperboloid.

10) Um die Umrisse einer Regelfläche zweiter Ordnung zu bestimmen, welche durch drei Gerade der einen Regelschaar gegeben ist, construiert man diejenigen drei Geraden der andern Schaar, welche mit diesen respective dieselben Bilder oder Projectionen haben, und ihre Schnittpunkte mit den gegebenen. Man hat so drei Tangenten und ihre Berührungspunkte für die Curve zweiter Ordnung, welche den Umriss bildet. (§ 28.; 4. und § 90.; 8.)

11) Die Grenze des Selbstschattens auf einer Regelfläche zweiter Ordnung für Licht aus einem Punkte $L$ wird durch drei Tangentialebenen derselben aus dem Letztern und deren Berührungspunkte bestimmt: Sie ist die Schnittcurve mit der Ebene dieser Letztern und wird aus drei Tangenten und deren Berührungspunkten construiert.

12) Der Kegel der Tangentialebenen der Fläche in ihren Punkten anf der unendlich fernen Ebene heisst der Asymptotenkegel derselben; sein Mittelpunkt ist der Mittelpunkt $M$ des Parallelepipeds, durch welches die Fläche bestimmt werden kann und der Mittelpunkt der Fläche selbst (vergl. § 94.); jede durch ihn gehende Sehne der Fläche ist ein Durchmesser und wird in ihm halbiert; da seine Erzeugenden denen der Regelfläche parallel sind, so kann er als der Richtungskegel derselben bezeichnet werden.

Man construiere in Centralprojection zu drei Geraden der Schaar $g$ der Regelfläche zweiter Ordnung den Asymptotenkegel derselben — mittelst der drei ihnen parallelen $l$ durch die Fluchtlinien der durch ihre Paare bestimmten Ebenen als durch drei Punkte und ihre Tangenten. Die Fig. Tafel VI. — man sehe für ihre Erklärung übrigens p. 319, f., § 90.; 7. — bringt

auch den Asymptotenkegel genügend zur Anschauung. Aus den gegebenen Erzeugenden $g_1, g_2, g_3$ construiert man wie dort $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3$ und erhält durch die Fluchtlinien der Ebenen $g_1\mathfrak{l}_1, g_2\mathfrak{l}_2, g_3\mathfrak{l}_3$ die drei Tangenten der Fluchtcurve der Fläche und ihres Asymptotenkegels in $Q_1', Q_2', Q_3'$ — wodurch diese bestimmt ist —; sodann als den Durchschnittspunkt dieser Ebenen $M$ den Mittelpunkt der Fläche und des Asymptotenkegels und durch ihre Spuren $S_1S_1, S_2S_2, S_3S_3$ drei Tangenten der Spurcurve des Asymptotenkegels, deren Berührungspunkte $S_1^k, S_2^k, S_3^k$ in den respectiven Schnitten derselben mit den Erzeugenden $M'Q_1', M'Q_2', M'Q_3'$ liegen. Ueberdiess ist diese Spur ähnlich und ähnlich gelegen der Spur des Hyperboloids — vergl. 13.

13) Denken wir die Regelfläche zweiter Ordnung durch zwei projectivische Ebenenbüschel erzeugt, so entsteht der Asymptotenkegel derselben durch zwei ihnen parallele und somit gleiche projectivische Ebenenbüschel aus $M$. In Folge dessen schneidet jede Ebene die Fläche und den Asymptotenkegel in zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Curven zweiten Grades.

14) Jede Ebene, welche einer Tangentialebene des asymptotischen Kegels parallel ist, schneidet das einfache Hyperboloid in einer Parabel. Man bestimme diejenigen parabolischen Schnitte einer solchen Fläche, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und gegebene Tafelneigung oder gegebene Neigung gegen eine feste Ebene haben.

15) Zu einem gegebenen Kegel zweiten Grades construiere man als zu seinem Asymptotenkegel ein einfaches Hyperboloid. Kann dasselbe eine gegebene Gerade enthalten, respective unter welcher Bedingung?

16) Die Punkte der Strictionslinie der Regelfläche zweiter Ordnung auf parallelen Erzeugenden der beiden Schaaren liegen mit dem Mittelpunkt der Fläche und ihres Asymptotenkegels auf einer Geraden und von ihm gleich entfernt.

93. Eine Regelfläche zweiter Ordnung wird von einer Geraden im Allgemeinen in zwei Punkten geschnitten, nämlich in denen, die diese Gerade mit einem beliebigen durch sie gehenden ebenen Schnitt gemein hat — und sie hat auch mit einer solchen Geraden zwei Tangentialebenen gemein, nämlich die, welche durch sie berührend an den Tangentenkegel der Fläche aus einem ihrer Punkte gelegt werden können. Man nennt sie daher zweiter Classe wie zweiter Ordnung oder zweiten Grades.

Man kann für die Construction dieser Punkte und Tangentialebenen die Schnittebene als eine projicierende Ebene und den Berührungskegel als Berührungscylinder aus der Richtung der Geraden wählen und kommt in jedem Falle auf die Aufgabe zurück, die Schnittpunkte einer Geraden mit einem Kegelschnitt ihrer Ebene oder die Tangenten von einem Punkte an einen solchen Kegelschnitt also (§ 29.) die Doppelelemente von zwei projectivischen Reihen oder Strahlenbüscheln von einerlei Träger zu bestimmen. Darauf führen die projectivischen Eigenschaften der Regelflächen zweiter Ordnung direct durch folgende Schlüsse.

a) Ist die Regelfläche zweiter Ordnung durch die drei Geraden der einen Schaar $g_1, g_2, g_3$ bestimmt und ist $h$ die gegebene Gerade, so schneiden die beiden zur Reihe in $g_1$ perspectivischen Ebenenbüschel von den Scheitelkanten $g_2$ und $g_3$, welche das Hyperboloid erzeugen, die Gerade $h$ in zwei projectivischen Reihen, deren Doppelpunkte $F_1, F_2$ solche Punkte sind, wo zwei entsprechende Ebenen sich auf $h$ schneiden, wo also $h$ einer Geraden der Schaar $l$ des Hyperboloids begegnet. Diese Geraden $l_1, l_2$ selbst sind die Schnittlinien der Ebenenpaare $g_2F_1, g_3F_1$ (auch $g_1F_1$) und $g_2F_2, g_3F_2$ (auch $g_1F_2$) und bestimmen mit $h$ die beiden Ebenen, welche durch $h$ gehen und das Hyperboloid berühren.

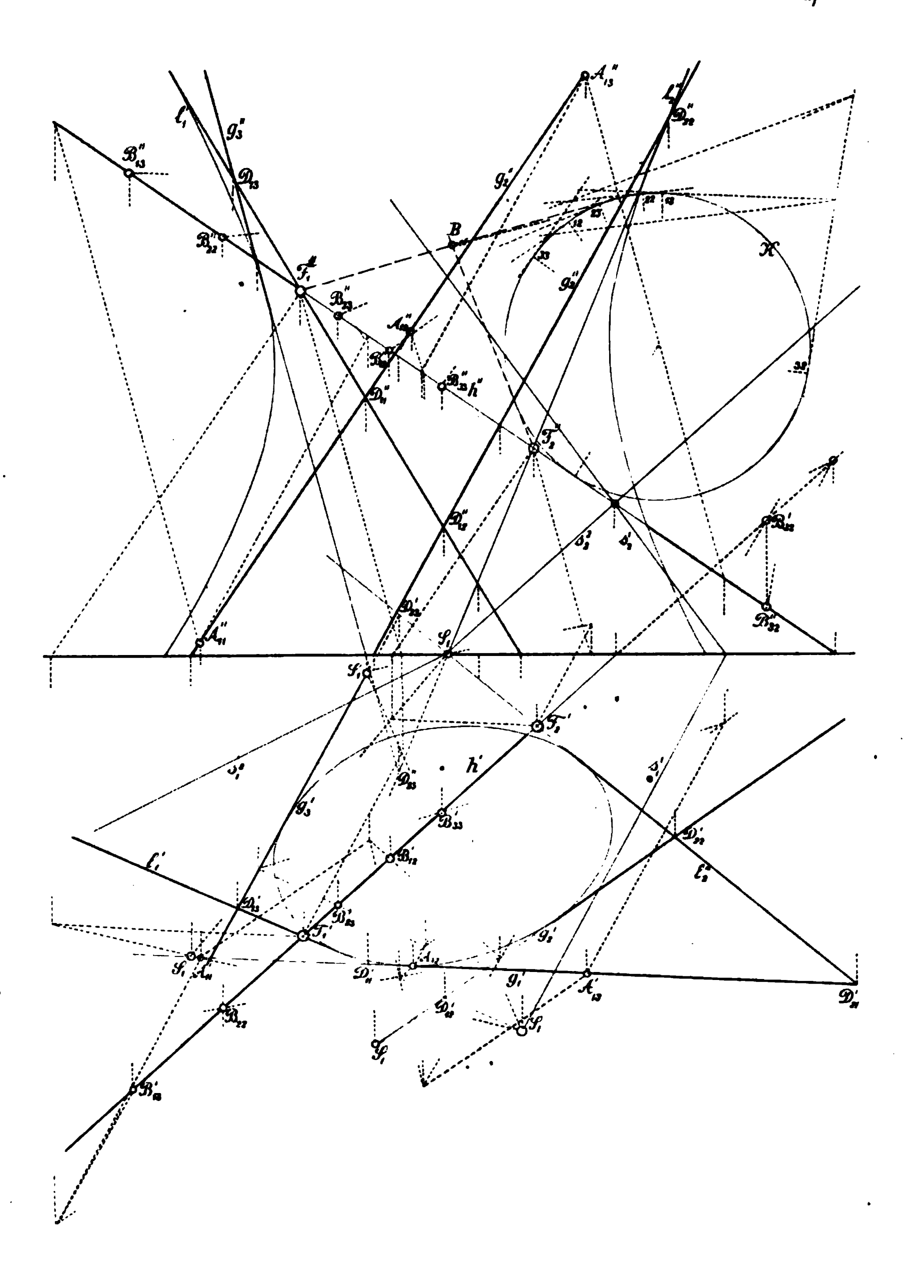
b) Drehen wir dagegen um $g_1$ eine Ebene, die in $g_2, g_3$ die projectivischen Reihen erzeugt, als deren Verbindungslinien wir die Geraden der Regelschaar $l$ des Hyperboloids erhalten, so erzeugen diese Reihen mit $h$ zwei projectivische Ebenenbüschel, deren Doppelebenen $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ die einzigen Ebenen aus der Geraden $h$ sind, welche zugleich Erzeugende $l_1, l_2$

des Hyperboloids enthalten. Diese Geraden selbst sind die Verbindungslinien der Punktepaare $\mathbf{F}_1 g_2$, $\mathbf{F}_1 g_3$; $\mathbf{F}_2 g_2$, $\mathbf{F}_2 g_3$.

Man sieht, dass mit jeder der beiden Lösungen beide Aufgaben zugleich erledigt werden, dass also beide zugleich reelle und verschiedene, zusammenfallende oder nicht reelle Auflösungen geben (vergl. § 94.) und dass die Constructionsmethoden sich wie die Probleme dualistisch entsprechen. (§ 23.) In Tafel VII. ist die Auflösung nach der Methode a) vollständig gegeben; zu den Geraden $g_1$, $g_2$, $g_3$, $h$ sind die gemeinsamen Transversalen $l_1$, $l_2$ und die Ebenen $\mathbf{S}^1$ und $\mathbf{S}^2$ construiert, welche sie mit $h$ bestimmen. Auf $g_1$ sind drei Punkte $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{13}$ gewählt und die Schnittpunkte der durch dieselben nach $g_2$, respective $g_3$ gehenden Ebenen mit $h$ ermittelt $B_{12}$, $B_{22}$, $B_{32}$; $B_{13}$, $B_{23}$, $B_{33}$; diess geschah mit Hilfe von Parallelen zu $g_2$, respective $g_3$ durch $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{13}$ nach der Methode des § 52. Mittelst des Hilfskreises $K$ (vergl. § 29.) sind dann in der zweiten Projection die Doppelpunkte $F_1$, $F_2$ der projectivischen Reihen der $B$ gefunden; die durch dieselben zu $g_1$, $g_3$ gezogenen Parallelen bestimmen dann mit $g_1$, $g_3$ selbst die Ebenenpaare, als deren Schnittlinien sich die Transversalen $l_1$, $l_2$ — mittelst der Horizontalspuren — ergeben; endlich folgen die Spuren $s_1{}^1$, $s_2{}^1$; $s_1{}^2$, $s_2{}^2$ der beiden Ebenen $l_1 h$, $l_2 h$.

Die horizontalen Durchstosspunkte von $g_1$, $g_2$, $g_3$, $l_1$, $l_2$ bestimmen die Horizontalspur des Hyperboloids der $g$; die ersten und zweiten Projectionen derselben fünf Geraden sind Tangenten der respectiven gleichnamigen Umrisse desselben. Von diesen Elementen sind die Umrisse angegeben und durch Verstärkung der Linien berücksichtigt. Zu ihrer Vervollständigung würden die in der Fig. der Tafel VII. leicht mit Hilfe ihrer Durchstosspunkte zu ergänzenden Erzeugenden des Hyperboloids der $g$ durch die Punkte $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{13}$ dienen. (Vergl. Tafel V., § 90.)

Wenn die Gerade $h$ einer Projectionsaxe parallel ist, so enthält das allgemeine Problem die Bestimmung eines Punktes der Fläche aus einer gegebenen Projection desselben; die projectivischen Ebenenbüschel der zweiten Lösung durch $h$ werden zu projicierenden Ebenen, deren



Spuren die Verbindungslinien der gleichnamigen Projection von $h$ mit denselben Projectionen der Punkte der projectivischen Reihen in $g_2$ und $g_3$ sind. Die Construction kommt somit völlig zurück auf die Form derjenigen für die Bestimmung der Tangenten des Umrisskegelschnitts der Fläche aus der gleichnamigen Projection des Punktes. (Vergl. Fig. 169.)

Auch die Construction der Durchdringungen der Regelflächen zweiter Ordnung mit developpabeln Flächen und mit andern Regelflächen zweiter Ordnung kommt hierauf zurück, weil ihre Punkte sich als die Schnittpunkte der Erzeugenden der einen Fläche mit der andern Fläche und die bezüglichen Tangenten sich als die Schnittlinien der entsprechenden Tangentialebenen beider Flächen ergeben. (Vergl. jedoch das Spätere hierüber.)

1) Die Geraden $l_1$, $l_2$ sind nach der Construction die ferneren Durchschnittslininien der beiden Hyperboloide, welche durch die Geraden $g_1$, $g_2$, $h$, respective $g_1$, $g_3$, $h$ als Erzeugende derselben Schaaren bestimmt werden. Diese Hyperboloide schneiden einander in dem windschiefen Viereck $g_1 l_1 h l_2$, d. h. sie haben seine Seiten gemein und die Ebenen der anliegenden Seiten zu gemeinsamen Tangentialebenen in seinen Ecken. Wie verhält sich dazu das Hyperboloid $g_2 g_3 h$ und das $g_1 g_2 g_3$? In welchen Punkten schneiden $l_1$, $l_2$ diese verschiedenen Hyperboloide?

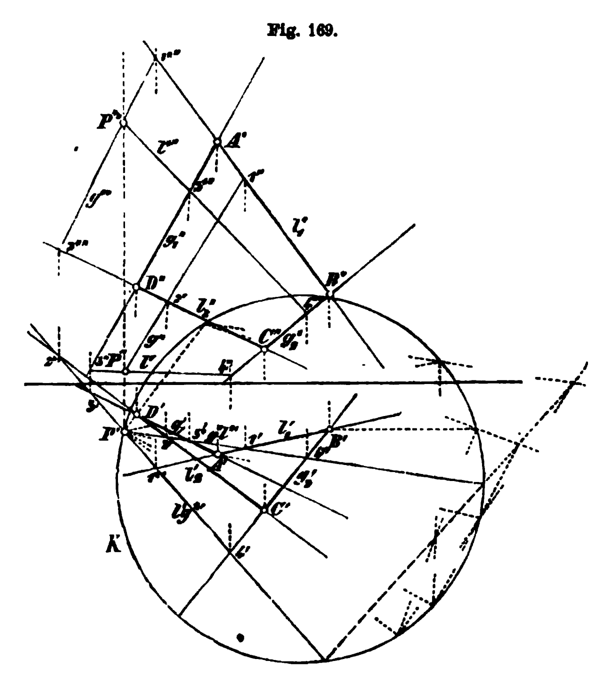
2) Die Geraden $l_1$, $l_2$ sind die gemeinschaftlichen Transversalen der vier Geraden $g_1$, $g_2$, $g_3$ und $h$; dieselben sind also mit Lineal und Zirkel allein construierbar; am einfachsten, wenn man eine der vier Geraden zur projicierenden Linie macht. In Tafel VII. sind $l_1$, $l_2$ diese gemeinsamen Transversalen für $g_1$, $g_2$, $g_3$ und $h$; die Schnittpunkte derselben mit diesen vier Geraden erscheinen in ihr durch $D_{11}$, $D_{12}$, $D_{13}$, $F_1$; $D_{21}$, $D_{22}$, $D_{23}$, $F_2$ bezeichnet; nur die zweite Projection von $D_{21}$ liegt oberhalb der Grenze der Figur.

3) Man construiere in Centralprojection für ein durch drei Erzeugende $g_1$, $g_2$, $g_3$ bestimmtes einfaches Hyperboloid die Tangentialebenen desselben in den Punkten, welche einen gegebenen Punkt zum Bilde haben.

4) Man bestimme direct diejenigen Erzeugenden eines gegebenen Hyperboloids, welche eine Projectionsaxe z. B. $OX$ schneiden.

5) Man bestimme für das durch ein windschiefes Viereck gegebene hyperbolische Paraboloid die zweiten Projectionen eines Punktes auf demselben, dessen erste Projection gegeben ist. In Fig. 169. ist $ABCD$ oder $l_1 g_2 l_2 g_1$ das windschiefe Viereck und $P'$ der Grundriss eines Punktes in der Oberfläche des durch das-

Fig. 169.



selbe bestimmten hyperbolischen Paraboloids. Die projectivischen Reihen, welche die $l$ auf den $g$ hervorbringen: $A$, $D$ und die Richtung von $g_1$ und $B$, $C$ und die Richtung von $g_2$, bestimmen mit der durch $P'$ gehenden Parallelen zur Axe $OZ$ projectivische Ebenenbüschel, für welche die Geraden von $P'$ nach den Horizontalprojectionen jener Punkte die ersten Spuren sind; mittelst des Hilfskreises $K$, welcher $P'$ enthält, sind die Horizontalspuren der Doppelebenen derselben,

die Tangentialebenen der Fläche durch jene Verticale, ermittelt; jede enthält zwei Erzeugende der Fläche, welche sich im entsprechenden Berührungspunkt $P$, $P^*$ auf der Verticalen durch $P'$ schneiden — die für $P$ sind durch $g$, $l$, die für $P^*$ durch $g^*$, $l^*$ bezeichnet, ihre Verticalprojectionen sind durch ihre Schnittpunkte 1, 2, 3, 4; 1*, 2*, 3*, 4* mit den gegebenen $l$ und $g$ bestimmt.

6) Man bestimme diejenigen Erzeugenden eines gegebenen einfachen Hyperboloids, welche einer bekannten Ebene parallel sind, d. h. welche die unendlich ferne Gerade oder die Stellung dieser Ebene schneiden
   a) in Centralprojection,
   b) in orthogonaler Parallelprojection.

7) Man verzeichne in Parallelprojection für ein einfaches Hyperboloid von allgemeiner Lage die Asymptotenrichtungen und die Asymptoten desjenigen ebenen Schnittes, welchen eine bekannte Ebene z. B. insbesondere die Ebene $\mathbf{H}_{x'}$ mit demselben bildet, ohne diesen Schnitt selbst zu verzeichnen.

8) Man bestimme für Beleuchtung durch parallele Lichtstrahlen die hellsten Punkte eines einfachen Hyperboloids, welches durch ein windschiefes Viereck und eine Transversale desselben bestimmt ist — d. h. man construiere diejenigen Tangentialebenen desselben, welche die zum Lichtstrahl normale Stellung haben und ermittele ihre Berührungspunkte; von diesen ist der der beleuchteten Seite angehörige der gesuchte.

9) Im Anschluss an 1) folgt weiter. Wenn zwei einfache Hyperboloide die Geraden $g_2$, $g_3$ derselben Schaar gemeinsam enthalten, so wird der Rest ihrer Durchdringung von zwei Erzeugenden der andern Schaar respective gebildet. Denn sind $g_1$, $g_1^*$ irgend zwei Erzeugende derselben Schaaren im ersten respective im zweiten Hyperboloid, so sind die gemeinsamen Transversalen $l_1$, $l_2$ zu den vier Geraden $g_1$, $g_1^*$, $g_2$, $g_3$ beiden Flächen ferner gemeinsam.

10) Wenn zwei Hyperboloide sich in allen Punkten einer gemeinsamen Erzeugenden berühren, so schneiden sie

sich noch in zwei Erzeugenden des andern Systems; diese sind den gemeinschaftlichen Geraden von zwei concentrischen den Asymptotenkegeln der Hyperboloide gleichen und parallelen Kegelflächen parallel. Wie im Fall von zwei hyperbolischen Paraboloiden?

11) Die Punkte der Durchdringungen von Regelflächen zweiter Ordnung mit Kegel- und Cylinder-Flächen zweiten Grades werden durch die Ebenen aus der Spitze des Kegels nach den Erzeugenden des Hyperboloids in Gruppen von je vier gewonnen; die der Durchdringung von zwei Hyperboloiden durch die Schnittpunkte der Erzeugenden des einen mit der Fläche des andern, oder in Gruppen von vier durch die Berührungsebenen des einen, welche das andere in je einem Kegelschnitt schneiden. Die Durchdringungen mit developpabeln Flächen bestimmt man durch die Schnittpunkte der Erzeugenden der letztern mit der Regelfläche zweiter Ordnung.

12) Die gemeinsamen Tangentialebenen einer Kegelfläche und einer Regelfläche zweiter Ordnung sind die gemeinsamen Tangentialebenen des gegebenen Kegels mit dem von seiner Spitze ausgehenden Tangentenkegel der Fläche. Die gemeinschaftlichen Erzeugenden beider Kegel geben die Erzeugenden des ersten, welche die Fläche berühren; etc.

13) Man construiere die Punkte, welche ein gegebener Kegelschnitt mit dem durch drei Gerade bestimmten einfachen Hyperboloid gemein hat, oder die Geraden, welche zugleich jenen Kegelschnitt und diese drei Leitgeraden schneiden.

14) Man construiere die Ebenen, welche gleichzeitig ein einfaches Hyperboloid und einen Kegelschnitt berühren.

94. Ist der Punkt $P$ einer Fläche zweiter Ordnung ein elliptischer Punkt, so haben wir die beiden Inflexionstangenten der Fläche in ihm als nicht reelle Gerade $\gamma$, $\lambda$ in einer reellen Ebene, nämlich der Tangentialebene der Fläche in $P$, und durch einen reellen ihnen gemeinsamen Punkt $P$ zu betrachten, und müssen annehmen, dass sie keinen zweiten reellen

Punkt enthalten. Man hat solche nicht reelle Gerade mit einem rellen Punkte punktierte Gerade genannt.

Denken wir dann $P_1$ als einen zweiten Punkt derselben Fläche zweiter Ordnung, so schneiden die Ebenen $P_1\lambda$, $P_1\gamma$ aus ihr neue punktierte Gerade $\gamma_1$, $\lambda_1$ heraus, welche in der Tangentialebene von $P_1$ liegen und ihre vereinigten reellen Punkte in $P_2$ haben, sich aber mit $\lambda$, $\gamma$ in nicht reellen Punkten schneiden — die Sätze auch für solche nicht reelle Gerade als gültig gedacht, dass eine Gerade und ein Punkt ausser ihr eine Ebene bestimmen, und dass zwei Gerade derselben Ebene sich in einem Punkte schneiden. Sonach ist auch $P_1$ ein elliptischer Punkt der Fläche, d. h. eine Fläche zweiter Ordnung, welche einen elliptischen Punkt besitzt, enthält nur elliptische Punkte; auf einer solchen Fläche liegen zwei Schaaren von nicht reellen punktierten Geraden $\gamma$, $\lambda$; die Geraden derselben Schaar schneiden einander nicht, indess alle Geraden der einen Schaar von jeder der andern in projectivischen Reihen geschnitten werden.

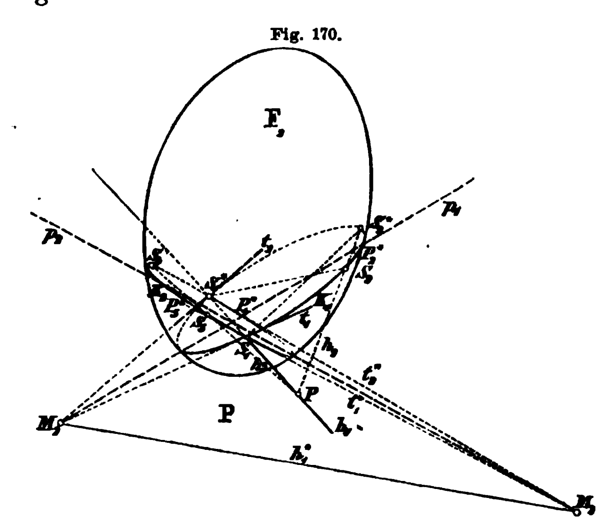
Da aber diesen Reihen die geometrische Darstellbarkeit abgeht, so lassen sich die schönen für die Behandlung der Hyperboloide gewonnenen Constructionsmethoden nicht auf die Flächen zweiter Ordnung mit elliptischen Punkten übertragen. Die Nichtregelflächen zweiter Ordnung erfordern eine andere selbständige Untersuchung. Wir führen diese so, dass alle ihre Resultate zugleich für die Regelflächen zweiter Ordnung gelten, und also die für diese schon gewonnenen Ergebnisse vervollständigen.

Wir denken einen Punkt $P$ im Raume und durch ihn Gerade $h$ gezogen, welche die Fläche zweiter Ordnung $\mathbf{F}_2$ je zweimal schneiden in Punkten $S_1$, $S_1^*$; $S_2$, $S_2^*$; etc. auf jeder derselben werde dann ein Punkt $P_1^*$, $P_2^*$; etc. so bestimmt, dass die Gruppen $S_1 S_1^*$, $PP_1^*$; $S_2 S_2^*$, $PP_2^*$; etc. harmonische Gruppen sind oder dass man hat $(S_1 S_1^* P P_1^*) = -1$. So existiert auf jeder die Fläche schneidenden Geraden $h_i$ aus $P$ ein ihm in Bezug auf sie conjugierter Punkt $P_i^*$. Für zwei Gerade $h_1$, $h_2$ (Fig. 170.) oder eine durch $P$ gehende Ebene ist die gerade Linie $P_1^* P_2^*$ die Polare $p_1$ von $P$ in Bezug auf den

Kegelschnitt $K_1$, in welchem die Ebene $\mathbf{F}$ der beiden Geraden aus $P$ die Fläche zweiter Ordnung schneidet. Zwei beliebige Ebenen durch $P$ liefern so zwei Polaren, welche sich in dem zu $P$ conjugierten Punkt der Schnittlinie dieser Ebenen schneiden müssen.

Das System dieser Polaren hat also die Eigenschaft, dass je zwei derselben sich schneiden, ohne dass sie etwa alle durch denselben Punkt gehen, d. h. sie liegen in einer Ebene $\mathbf{P}$, der Ebene der conjugierten Punkte von $P$; wir nennen dieselbe die Polarebene von $P$ in Bezug auf die Fläche und in gleicher Weise $P$ den Pol derselben. Pol und

Fig. 170.



Polarebene werden auf allen durch den Pol gehenden Strahlen durch die Fläche harmonisch getrennt.

Denken wir die Tangenten $t_1$, $t_2$; $t_1^*$, $t_2^*$ der Kegelschnitte $K_1$, $K_2$ (Fig. 170.) in zwei Ebenen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ durch den Pol in den Punkten $S_1$, $S_1^*$ der Schnittlinie derselben, so schneiden sich diese paarweis in Punkten $M_1$, $M_2$ auf den Polaren $p_1$, $p_2$ und die Ebenen $t_1 t_2$, $t_1^* t_2^*$, d. h. die Tangentialebenen der Fläche zweiter Ordnung in $S_1$, $S_1^*$ respective enthalten eine und dieselbe Gerade $h_1^*$ der Polarebene. Pol und Polarebene trennen harmonisch alle die Paare von Tangentialebenen, welche aus Geraden der Polarebene an die Fläche zweiter Ordnung gelegt werden können. Man

nennt einem Punkte alle Punkte und alle Strahlen in seiner Polarebene, einer Ebene alle Ebenen und alle Strahlen durch ihren Pol conjugiert. Jeder Geraden entspricht eine andere als Schnittlinie der Polarebenen der Punkte von jener oder als Verbindungslinie der Pole der Ebenen aus jener; wir nennen von solchen zwei Geraden jede die Polare der andern und bezeichnen jede zwei Gerade als conjugiert, von denen die eine die Polare der andern schneidet.

Vier Punkte, von denen jeder den drei übrigen conjugiert ist oder ihre Ebene zur Polarebene hat, bestimmen ein Tetraeder, von dessen vier Flächen jede den drei andern conjugiert ist, von dessen Kanten die gegenüberliegenden als Polaren zusammen gehören, während die benachbarten conjugierte Gerade sind. Man bezeichnet diess System gewöhnlich als ein Quadrupel harmonischer Pole und Polarebenen in Bezug auf die Fläche.

1) Jede Fläche zweiter Ordnung ist in involutorischer Central-Collineation mit sich selbst für jeden Punkt $P$ im Raum als Centrum und seine Polarebene **P** als Collineationsebene. (Vergl. § 42.; § 20.)

2) In Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung entsprechen sich die Punkte $P_i$ des Raumes und seine Ebenen $\mathbf{P}_i$ paarweis, allen Punkten und Strahlen einer Ebene die Ebenen und Strahlen durch ihren Pol, etc. — der Raum erscheint zweimal, als Vereinigung eines Punktsystems und eines Ebenensystems. Man nennt die gedachte Beziehung beider Räume die Polar-Reciprocität und die vermittelnde Fläche zweiter Ordnung die Directrix derselben. (Vergl. § 33.)

3) Geht durch $P$ eine Tangente der Fläche zweiter Ordnung $\mathbf{F}_2$, so fallen die Schnittpunkte $S_1$, $S_1{}^*$ im Berührungspunkte zusammen und in demselben liegt daher auch der vierte harmonische Punkt $P_1{}^*$ — d. h. die Polarebene eines Punktes $P$ in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung geht durch die Berührungspunkte aller von $P$ an dieselbe möglichen Tangenten; der Ort der Berührungs-

punkte derselben ist der Kegelschnitt, den die Polarebene **P** mit der Fläche gemein hat.

4) Ist $P$ selbst ein Punkt der Fläche zweiter Ordnung, so liegt für eine durch $P$ gehende Gerade $S_1$ in $P$ und $S_1^*$ ist im Allgemeinen davon verschieden, somit fällt $P_1^*$ im Allgemeinen nach $P$; ist aber die Gerade eine Tangente der Fläche in $P$, so fallen $S_1$ und $S_1^*$ in $P$ zusammen und $P_1^*$ ist ein willkürlicher Punkt der Tangente. Es sind also dem Punkte $P$ der Fläche alle Punkte der in ihm an dieselbe gehenden Tangenten conjugiert, d. h. die Tangentialebene der Fläche zweiter Ordnung ist die Polarebene ihres Berührungspunktes.

5) Ist $P^*$ auf der Polarebene von $P$ in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung, so liegt auch $P$ auf der Polarebene von $P^*$ in Bezug auf dieselbe; mit andern Worten: Wenn die Polarebene sich um einen Punkt $P$ dreht oder ein Ebenenbündel erzeugt, so bewegt sich der Pol in der Polarebene **P** dieses Punktes oder erzeugt ein ebenes Punktsystem.

6) Man construiert den Pol einer Ebene in Bezug auf eine Fläche zweiter Ordnung als den Durchschnittspunkt der Polarebenen von drei Punkten derselben, die nicht in einer Geraden liegen, speciell als den Schnittpunkt der Tangentialebenen der Fläche in drei Punkten ihrer Schnittcurve mit jener Ebene.

7) Wenn die Polarebene **P** sich um eine Gerade $g$ dreht, so rückt ihr Pol $P$ in einer andern Geraden $g^*$ fort, jenes Büschel von Ebenen und diese Reihe sind projectivisch; in den Schnittpunkten von $g^*$ mit der Fläche zweiter Ordnung wird dieselbe von Ebenen aus $g$ berührt oder umgekehrt.

8) Man construiert die Polare $g^*$ einer Geraden $g$ in Bezug auf die Fläche zweiter Ordnung $\mathbf{F}_2$ als die Verbindungslinie der Pole von zwei durch $g$ gehenden Ebenen oder als die Schnittlinie der Polarebenen von zwei in $g$ gewählten Punkten.

9) Die Lösungen der Aufgaben: Die gemeinschaftlichen Punkte oder Tangentialebenen einer Geraden mit einer Fläche zweiter Ordnung zu finden — kommen eine auf die andere zurück.

10) Eine Fläche zweiter Ordnung ist immer auch eine Fläche zweiter Classe; um beides zusammen zu fassen, kann man die Bezeichnung Fläche zweiten Grades gebrauchen.

11) Die Ebenen durch eine Gerade $g$ und die von $g$ nach den Polen von jenen gehenden Ebenen bilden zwei vereinigte projectivische Ebenenbüschel in Involution, deren sich selbst entsprechende Ebenen die von $g$ ausgehenden Tangentialebenen der Fläche sind. Um jede Gerade im Raum wird so durch jede Fläche zweiter Ordnung ein involutorisches Büschel harmonischer Polarebenen bestimmt.

12) Anderseits bilden die Punkte der Polreihe in $g^*$ und die Schnittpunkte von $g^*$ mit den entsprechenden Polarebenen aus $g$ zwei vereinigte projectivische Reihen in Involution, deren sich selbst entsprechende Punkte die in $g^*$ enthaltenen Punkte der Fläche sind. Auf jeder Geraden im Raum wird so durch jede Fläche zweiter Ordnung eine involutorische Reihe harmonischer Pole bestimmt.

13) Wenn die Gerade $g$ die Fläche zweiter Ordnung berührt, so thut diess auch ihre Polare $g^*$ in demselben Punkte. Die Tangenten einer Fläche zweiter Ordnung in einem ihrer Punkte ordnen sich also in Paare so, dass die Polarebenen aller Punkte der einen Tangente des Paares die andere Tangente des Paares enthalten. Alle diese Paare, man sagt conjugierter Tangenten, bilden eine Involution von Strahlen. Die Doppelstrahlen dieser Involution haben die Eigenschaft, dass die Polarebenen der Punkte eines jeden ihn selbst enthalten, dass also alle ihre Punkte in ihren Polarebenen liegen oder auf der Fläche sind;

**sie sind die Inflexionstangenten der Fläche in dem betrachteten Punkte oder die durch ihn gehenden Erzeugenden derselben.** (§ 89.)

Wenn die Paare jener Involution sich nicht trennen, so ist die Fläche zweiter Ordnung eine **Regelfläche**, wenn sie sich trennen, so gehört sie zu den **Nichtregelflächen**.

Sind die Doppelstrahlen vereinigt, so fällt von allen Paaren die eine Tangente mit den vereinigten Doppelstrahlen zusammen, alle Punkte der Doppelstrahlgeraden sind Berührungspunkte und die Fläche ist eine **Kegelfläche** oder developpable Fläche zweiter Ordnung.

14) Denken wir den Tangentenkegel einer Fläche zweiter Ordnung aus dem Punkte $P$ und speciell einen Punkt $S$ der Berührungscurve desselben mit der Fläche, die Tangente $t^*$ der Letztern in $S$ und die Gerade $PS$ oder $t$, so bilden diese beiden ein Paar in der Involution der Tangenten in $S$ und sind somit zu den Haupttangenten oder Erzeugenden $g$, $l$ der Fläche in $S$ harmonisch conjugiert.

15) Man construiere für eine gegebene Fläche zweiter Ordnung ein Quadrupel harmonischer Pole, wenn eine Ecke und eine durch sie gehende Kante und Fläche desselben gegeben sind.

95. **Die specielle Betrachtung der Punkte und Strahlen sowie der Ebene des unendlich fernen ebenen Systems** ergiebt wichtige Resultate. Die Polarebene eines unendlich fernen Punktes hat die Eigenschaft, alle die Strecken zu halbieren, welche durch die Fläche zweiter Ordnung auf den von ihm ausgehenden also parallelen Geraden begrenzt werden; man nennt sie die **der gegebenen Richtung conjugierte Durchmesser- oder Diametralebene.**

Da alle unendlich fernen Punkte in einer Ebene liegen, so gehen alle Diametralebenen durch einen Punkt, den Pol der unendlich fernen Ebene. Man nennt ihn den **Mittelpunkt der Fläche**; er ist in allen durch ihn gehenden Geraden die Mitte der Strecke, die die Fläche zweiter Ordnung in ihnen bestimmt.

Die Polare einer unendlich fernen Geraden ist die Durchschnittslinie von unendlich vielen zu den in ihr gelegenen Richtungen conjugierten Durchmesserebenen, ein Durchmesser der Fläche, der zu jener Stellung conjugierte.

Dem unendlich fernen ebenen System von Punkten entspricht das Ebenenbündel der Durchmesserebenen, dem unendlich fernen ebenen System von Strahlen das Strahlenbündel der Durchmesser der Fläche.

In Folge dessen enthält der Durchmesser, der die Polare einer Stellung ist, die Mittelpunkte aller der ebenen Schnitte der Fläche zweiter Ordnung, welche diese Stellung haben. Die Involution harmonischer Polarebenen der Fläche, die durch ihn gehen — man nennt sie conjugierte Durchmesserebenen — wird von allen den parallelen Ebenen dieser Schnitte in gleichen Büscheln conjugierter Durchmesser geschnitten, d. h. die parallelen ebenen Schnitte einer Fläche zweiter Ordnung sind ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte, deren Mittelpunkte in dem Durchmesser liegen, welcher die Polare ihrer Stellung ist.

Daraus folgt, dass jede Fläche zweiter Ordnung in unendlich vielen Arten erzeugt werden kann durch die Bewegung eines Kegelschnitts, welcher sich stets ähnlich und parallel bleibt und einen festen Kegelschnitt in zwei Punkten schneidet, während sein Mittelpunkt denjenigen Durchmesser desselben durchläuft, welcher der Richtung der betreffenden Sehnen conjugiert ist. Die Schnittcurven der Fläche mit irgend zwei Durchmesserebenen, von denen die eine den zur andern conjugierten Durchmesser enthält, begründen eine Erzeugung dieser Art.

Die Flächen, welche man in dieser Art durch die Combination eines festen und eines beweglichen Kegelschnitts erzeugen kann, kommen auf folgende Hauptfälle zurück:

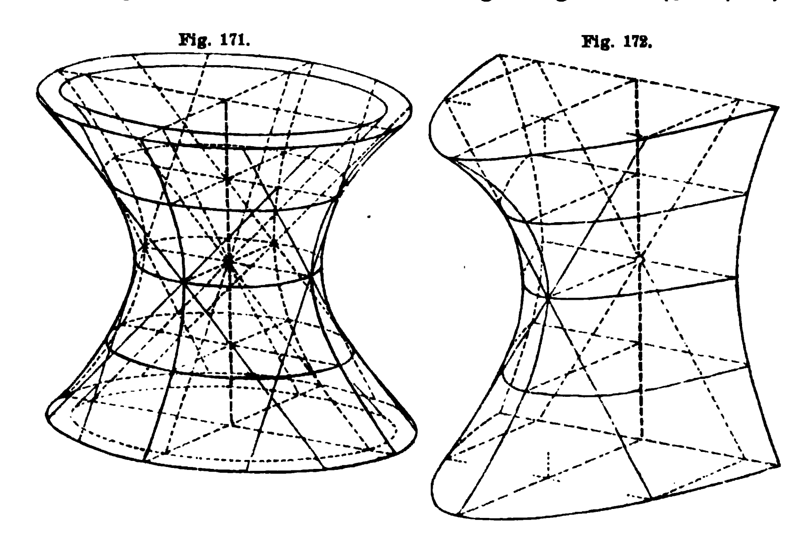
a) Eine feste Hyperbel erzeugt mit einer beweglichen Ellipse, oder umgekehrt eine feste Ellipse mit einer beweglichen Hyperbel, ein einfaches Hyperboloid (Fig. 171.), wenn dieselben in der Mittellage einen Durchmesser gemein haben, welcher beide schneidet.

Die zweite Entstehung führt in der Grenzlage auf die zweifache Schaar von geradlinigen Erzeugenden.

b) Eine feste Hyperbel erzeugt mit einer beweglichen Parabel oder umgekehrt ein hyperbolisches Paraboloid (Fig. 172.); aus der Entstehung durch die bewegliche Hyperbel entspringen die geraden Erzeugenden.

Diess sind die uns schon bekannten Regelflächen zweiter Ordnung, wie sich leicht aus dem Vorigen begründet. (§94.; 13.)

Fig. 171. Fig. 172.



c) Eine feste Hyperbel erzeugt mit einer beweglichen Ellipse oder umgekehrt ein zweifaches Hyperboloid (Fig. 173.), wenn der gemeinsame Schnitt ihrer Ebenen ein Durchmesser ist, der die Hyperbel nicht schneidet.

d) Eine feste Ellipse erzeugt mit einer bewegten Ellipse ein Ellipsoid (Fig. 174.).

e) Eine feste Parabel und eine bewegliche Ellipse oder umgekehrt erzeugen ein elliptisches Paraboloid (Fig. 175.).

Diess sind die Nichtregelflächen zweiter Ordnung oder die Flächen mit elliptischen Punkten.

1) Die Tangentialebenen einer Fläche zweiter Ordnung

in ihren Schnittpunkten mit einem ihrer Durchmesser sind einander parallel — sie haben die seiner Richtung conjugierte Stellung.

2) Die Richtungen von drei Durchmessern der Fläche, von denen jeder der Ebene der beiden andern also diesen selbst conjugiert ist, und der Mittelpunkt der Fläche bilden ein Quadrupel harmonischer Pole derselben; die entsprechenden einander conjugierten Diametralebenen bilden mit der unendlich fernen Ebene ein Quadrupel harmonischer Polarebenen.

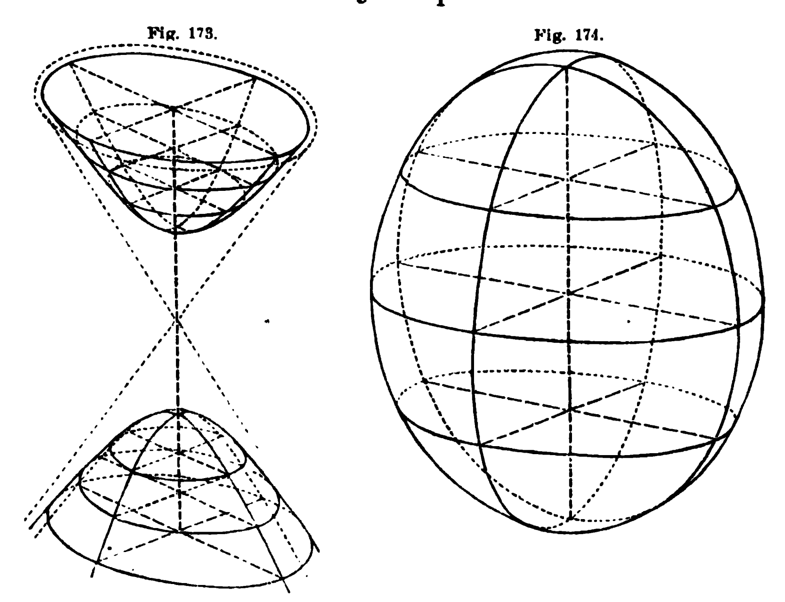


Fig. 173. Fig. 174.

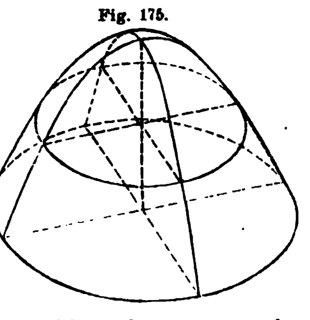


Fig. 175.

3) Wenn eine Fläche zweiter Ordnung durch parallele Lichtstrahlen beleuchtet wird, so ist die Selbstschattengrenze auf derselben der Schnitt der zur Richtung des Lichtstrahls conjugierten Diametralebene mit ihr und der Schlagschattenraum ist

durch den von ihm mit der Richtung des Lichtstrahls bestimmten Cylinder zweiten Grades begrenzt.

4) Der Mittelpunkt der Fläche ist der Scheitel ihres Asymptotenkegels, der mit dem Schnitt der Fläche in der unendlich fernen Ebene zugleich reell oder nicht reell ist — also in den Fällen a) und c) eine eigentliche Kegelfläche zweiter Ordnung, in den Fällen b) und e) aber die unendlich ferne Ebene selbst — welche die beiden Paraboloide berühren.

5) Die Schnitte der Fläche zweiter Ordnung und ihres Asymptotenkegels mit einer Ebene sind ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte. (§ 92.; 13.)

6) Man erläutere die Entstehung der Kugel als Specialfall von derjenigen des Ellipsoids.

7) Man zeige wie die Kegelflächen und Cylinderflächen zweiten Grades als Specialfälle von a), b), c), e) entstehen.

8) Unter welchen Voraussetzungen entsteht ein Ebenenpaar als Grenzfall der Fläche zweiter Ordnung? (Vergl. § 91.; 5.)

9) Welche Entstehungsweise der Flächen zweiten Grades als Umhüllung oder Enveloppe bewegter veränderlicher Kegelflächen zweiten Grades ergiebt sich aus dem Vorhergehenden? Man discutiere die Specialfälle derselben.

10) Für eine Kugelfläche ist die Polarebene normal zum Durchmesser des Pols; jede Gerade $g$ und ihre Polare $g^*$ in Bezug auf die Kugelfläche liegen in zwei zu einander normalen Durchmesserebenen; die Involutionen harmonischer Polarebenen für einen beliebigen Durchmesser sind rechtwinklige Involutionen.

11) Alle ebenen Schnitte der Kugel sind Kreise (§ 31.; 8.), d. h. Kegelschnitte, welche die nicht reellen Kreispunkte im Unendlichen ihrer Ebene enthalten. In Beibehaltung des Sinnes dieser Ausdrucks- und Vorstellungsweise sprechen wir den Satz aus: Der unendlich ferne ebene Querschnitt einer Kugel ist der nicht reelle Kreis der unendlich fernen Ebene. Alle Kugeln haben diesen Kreis

gemein. Drei zu einander rechtwinklige Gerade aus einem Punkte bilden für jede aus diesem beschriebene Kugel eine Gruppe conjugierter Durchmesser, ihre Richtungen ein Tripel harmonischer Pole in Bezug auf den unendlich fernen nicht reellen Kreis, d. h. in Bezug auf jede Kugel.

12) Eine Gerade und eine Ebene sind normal zu einander, wenn ihre Richtung und Stellung Pol und Polare in Bezug auf den nicht reellen Kreis der unendlich fernen Ebene sind; zwei Gerade sind normal zu einander, wenn ihre Richtungen conjugierte Punkte in der Involution ihrer gemeinsamen Stellung, zwei Ebenen, wenn ihre Stellungen conjugierte Gerade in der Involution ihrer gemeinsamen Richtung für jenen Kreis sind.

96. Für die Darstellung der Flächen zweiter Ordnung entspringen aus dem Vorigen die folgenden Ergebnisse:

a) **Für die parallel projectivischen Darstellungen.**

Man darf annehmen, dass die Ebene des festen Kegelschnitts der einen und die Ebene des beweglichen Kegelschnitts der andern Projectionsebene parallel sei; denn das erste kann durch Transformation stets herbeigeführt werden und nach Annahme der Stellung der Ebene des beweglichen Kegelschnitts ist für die Ebene des festen nur der Durchmesser gegeben, welcher ihr conjugiert ist und dieselbe kann also auch durch denselben normal zur vorigen Ebene gewählt werden.

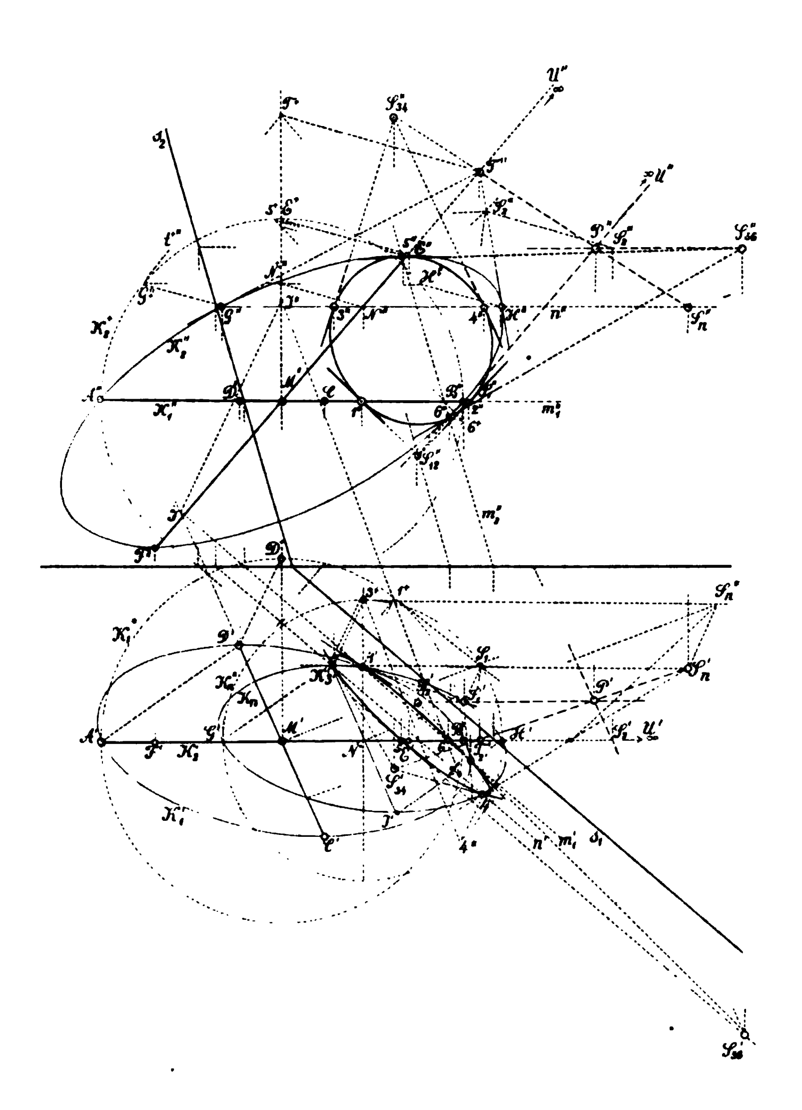
Sei also der bewegliche Kegelschnitt in seiner Mittellage $K_1$ als parallel der ersten Projectionsebene gegeben, — die Tafel VIII. repräsentiert den Fall des Ellipsoids — etwa durch zwei conjugierte Durchmesser $AB$, $CD$, wovon der eine $AB$ der Axe $OX$ parallel ist; der feste Kegelschnitt $K_2$ aber als parallel der zweiten Projectionsebene dargestellt, ebenfalls bestimmt durch die beiden conjugierten Durchmesser $AB$, $EF$, von denen der erste zur Axe $OX$ parallel und ihm mit $K_1$ gemein ist. Dann kann jeder ebene Querschnitt der Fläche und der Berührungskegel derselben für jeden Punkt im Raume dargestellt werden, wenn man beachtet,

dass alle die zur ersten Projectionsebene parallelen Schnitte ähnlich und ähnlich gelegen sind zu dem zu $XOY$ parallelen Kegelschnitt $K_1$, während ihre Mittelpunkte im Durchmesser $EF$ liegen und ihre zu $OX$ parallelen Durchmesser durch $K_2$ begrenzt sind; dass ferner die zugehörigen Tangentenkegel der Fläche ihre Mittelpunkte in dem besagten Durchmesser $EF$ haben und also durch deren zweiten Projectionen, die Pole der zu $OX$ parallelen Sehnen von $K_2$ in Bezug auf $K_2$, völlig bestimmt sind; sowie dass das Analoge für die zur zweiten Projectionsebene parallelen Schnitte und die nach denselben der Fläche umschriebenen Tangentenkegel mit $K_2$ und $CD$ gilt.

Denn die ebenen Querschnitte sind Curven zweiter Ordnung, also durch fünf Punkte oder dem äquivalente Data bestimmt. Jeder der vorbezeichneten einfach bestimmten Querschnitte der Fläche, welcher von der Schnittebene geschnitten wird, liefert aber zwei Punkte und der zugehörige Tangentenkegel giebt die beiden Tangenten in denselben als die Schnittlinien seiner bezüglichen Tangentialebenen mit der Schnittebene. Es genügt also die Benutzung von zweien dieser Querschnitte — eventuell der beiden zu den Projectionsebenen parallelen Diametralschnitte, welche unmittelbar gegeben sind.

Der Berührungskegel der Fläche aus dem Punkte $P$ ist eine Kegelfläche zweiter Ordnung, also durch fünf Erzeugende oder Tangentialebenen etc. bestimmt. Man construiert Tangentialebenen der Fläche aus $P$ und ihre Berührungspunkte mit der Fläche. Jeder der oben bezeichneten einfach bestimmten Berührungskegel der Fläche liefert zwei solche Tangentialebenen und seine Berührungscurve mit der Fläche die zugehörigen Berührungspunkte; zwei von diesen Kegeln bestimmen also vier Tangentialebenen und ihre Berührungspunkte; durch die Letztern ist die Ebene der Berührungscurve und damit diese selbst durch vier Punkte und ihre Tangenten, nämlich die Schnitte ihrer Ebenen mit den betreffenden Tangentialebenen, bestimmt. Eventuell kann man dazu die Cylinder benutzen, welche nach den direct gegebenen Kegelschnitten $K_1$ und $K_2$ parallel den Durchmessern $EF$, $CD$ respective der Fläche umschrieben sind.

Insofern die Kegelschnitte, mit denen man es dabei zu



thun hat, Ellipsen sind, kann man sich zur Bestimmung ihrer Schnittpunkte mit gegebenen Geraden und ihrer Tangenten aus gegebenen Punkten der Methode der Affinität bedienen, wie sie in § 34.; 18., 19. erläutert worden ist; sonst natürlich und allgemein der projectivischen Methoden des § 29.

b) **Für die Darstellung in Centralprojection.**

Wäre der zur Bildebene parallele Diametralschnitt $K_1$ und der zu demselben conjugierte Durchmesser $EF$ mit seinen Endpunkten gegeben, so würde der Mittelpunkt $M$ der Fläche sein Bild, das zugleich der Mittelpunkt vom Bilde jenes Schnittes sein muss, im vierten harmonischen Punkt zu $E$, $F$ und $Q'$, dem Fluchtpunkt dieses Durchmessers, haben; damit wäre auch die Entfernung jener Durchmesserebene von der Bildebene bekannt und die Fläche bestimmt. Jeder ebene Schnitt derselben durch diesen Durchmesser oder parallel jener Diametralebene kann leicht construiert werden; ebenso der zugehörige Tangentenkegel.

Wäre der sichtbare Umriss der Fläche gegeben, d. h. die Berührungscurve des vom Projectionscentrum an sie gehenden Tangentenkegels durch ihr Bild und ihre Ebene — mittelst Spur und Fluchtlinie — und dazu der Mittelpunkt der Fläche durch eine ihn enthaltende Gerade und sein Bild in ihr bestimmt, so wäre die Fläche zweiter Ordnung dadurch auch bestimmt; da aber der Mittelpunkt $M$ der Fläche in dem zur Ebene der Berührungscurve conjugierten und also den Mittelpunkt der Letztern und das Projectionscentrum enthaltenden Durchmesser liegt, so ist sein Bild zugleich das Bild vom Mittelpunkt des Umrisskegelschnitts, d. h. der Pol der Fluchtlinie seiner Ebene in Bezug auf denselben.

Man kann diese Bestimmung noch vereinfachen, indem man die Ebene des Umrisskegelschnitts d. h. die Polarebene des Projectionscentrums zur Bildebene wählt, — da dann das Bild des Mittelpunktes zugleich der Mittelpunkt des Bildes ist.

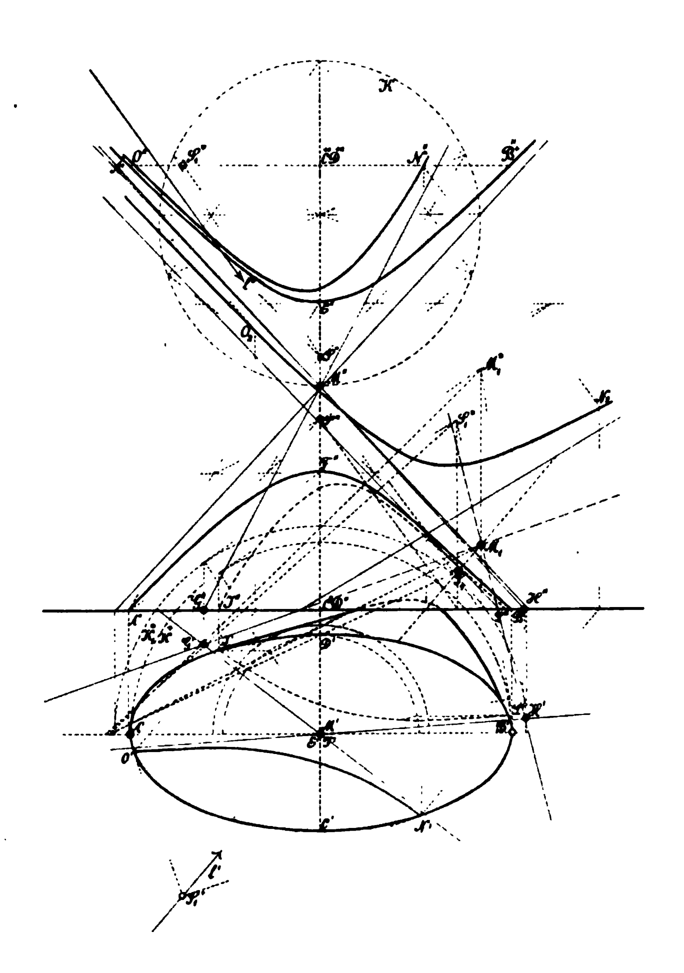
1) Man construiere den Schnitt einer Fläche zweiter Ordnung, deren den Projectionsebenen parallele Diametralschnitte man kennt, mit einer Ebene und bestimme den Pol dieser Ebene.

Die Tafel VIII. stellt den S c h n i t t d e s d u r c h

die conjugierten Durchmesser $AB$, $CD$, $EF$ oder die den Projectionsebenen parallelen Diametralschnitte $K_1$, $K_2$ gegebenen Ellipsoids mit der Ebene von den Spuren $s_1$, $s_2$ und die Bestimmung des Pols $P$ dieser Ebene dar. Sechs Punkte der Schnittellipse 1, 2; 3, 4; 5, 6 mit ihren Tangenten sind construiert und der Punkt $P$ ist als Schnitt der drei bezüglichen Paare von Tangentialebenen oder von drei Geraden bestimmt. Die horizontale Diametralebene liefert die Punkte 1, 2 und die Gerade $S_{12}P$; die horizontale Ebene durch $N$ die Punkte 3, 4 und die Gerade $S_{34}P$ und die der Aufrissebene parallele Diametralebene die Punkte 5, 6 und die Gerade $S_{56}P$.

Die horizontale Diametralebene schneidet die Ebene **S** in einer Geraden $m_1$, die durch ihren Durchstosspunkt in der Verticalebene bestimmt ist und dem Diametralschnitt $K_1$ in den Punkten 1, 2 begegnet. Diese und die zugehörigen Tangenten von $K_1$ sind durch den Uebergang zu dem mit $K_1$ affinen Kreise $K_1^*$ construiert — $JJ^*$ parallel $DD^*$ parallel $1^*1'$, $2^*2'$; $1^*S_1^*$ und $2^*S_1^*$ als Kreistangenten, sodann $1'1$ und $S_1^*S_1'$ parallel $JJ^*$. Dann ist die zum Durchmesser $EF$ parallele oder seine Richtung $U$ enthaltende Gerade durch $S_1$ die Durchnittslinie der beiden die Fläche in 1 und 2 berührenden Ebenen; sie enthält einerseits den gesuchten Pol $P$, anderseits schneidet sie die Schnittebene **S** in dem Punkte $S_{12}$, in welchem die Tangenten der Schnittcurve in 1 und 2 sich begegnen — durch $S_{12}$ sind diese also bestimmt.

Die Horizontalebene durch $N$ schneidet die Schnittebene in einer Geraden $n$ und die Fläche in einer zu $K_1$ ähnlichen und ähnlich geleg enen Ellipse $K_n$, welche durch die beiden zu $AB$, $CD$ respective parallelen conjugierten Durchmesser $GH$, $JK$ bestimmt ist; $GH$ wird als Sehne von $K_2$ aus dem zu $K_2$ affinen Kreise $K_2^*$ mittelst $N''N^{*''}$ parallel $E''E^{*''}$ durch $G^*$ und $H^*$ construiert, sodann $J'K'$ durch den Parallelismus von $G'K'$ und $A'D'$, etc. Die Schnittpunkte 3',



4' dieser Ellipse mit $n'$ sind dann durch den Uebergang zum affinen Kreis $K_n{}^*$ aus 3*, 4* gefunden (dabei ist 3*4* parallel zu 1*2*); ebenso die zugehörigen Tangenten von $K_n$ aus denen von $K_n{}^*$ durch $S_n{}^*$ und $S_n$. Indem man dann in der Verticalprojection den Schnittpunkt $T''$ der Tangenten von $K_2''$ in $G''$ und $H''$ aus $T^*$ am Kreise $K^*$ und damit $T'$ in $A'B'$ ermittelt, hat man in $S_n T$ die Schnittlinie der Tangentialebenen des Ellipsoids in 3 und 4, also eine zweite Gerade durch den Pol $P$ und zugleich in ihrem Schnittpunkt $S_{34}$ mit der Schnittebene **S** den Convergenzpunkt der Tangenten der Schnittcurve in den Punkten 3 und 4. Das Weitere dient im Grunde nur zur Verification der Lösung. Die verticale Diametralebene mit dem Diametralschnitt $K_2$ schneidet die Ebene **S** in einer Geraden $m_2$, die durch ihren horizontalen Durchstosspunkt bestimmt ist; ihre Schnitte 5, 6 mit $K_2''$ sind aus der Affinität mit $K_2{}^*$ durch 5*, 6* bestimmt, ebenso der Schnittpunkt $S_2$ der zugehörigen Tangenten von $K_2''$. Die Gerade von $S_2$ nach dem unendlich fernen Punkte des zu $K_2$ conjugierten Durchmessers $CD$ ist die Schnittlinie der Tangentialebenen des Ellipsoids in 5 und 6, also einerseits eine dritte Gerade durch den Pol $P$, anderseits durch ihren Schnittpunkt $S_{56}$ mit der Ebene **S** zur Bestimmung der Tangenten der Schnittellipse in 5 und 6 führend.

Es ist evident, dass die Schnittcurve und der Pol aus **S** und den drei conjugierten Durchmessern $AB$, $CD$, $EF$ der Fläche direct construiert sind; die Ellipsen $K_1$, $K_2$, $K_n$ sind nur zur Unterstützung der Anschauung eingezeichnet.

2) Man bestimme die Selbstschattengrenze der so gegebenen Fläche zweiter Ordnung für Licht aus einem gegebenen Punkte $P$.

3) Ebenso für paralleles Licht die Selbstschattengrenze und den Schlagschatten auf die Projectionsebenen von einem zweifachen Hyperboloid. Die Tafel IX. stellt die Construction unter der Voraussetzung dar (vergl. § 97.), dass die zu den

mit den Projectionsebenen $XOY$, $XOZ$ parallelen Diametralebenen conjugierten Durchmesser den Axen $z$ und $y$ respective parallel seien. Die Fläche ist durch die Axen $AB$, $CD$ ihres Schnittes mit der ersten Projectionsebene — zugleich die des mit ihm vom Mittelpunkte $M$ gleichweit nach oben entfernten Horizontalschnitts — und die Endpunkte $E$, $F$ des verticalen Durchmessers gegeben; $l$ bezeichnet die Richtung der Lichtstrahlen. Dann sind zuerst die Tangenten des zur zweiten Projectionsebene parallelen Diametralschnitts in $A''$, $B''$; $A^{*''}$, $B^{*''}$ aus den gegebenen Punkten und Tangenten bestimmt (§ 27.; 2.); der Schnittpunkt $S$ der beiden ersten ist der Scheitel des der Fläche nach der Ebene $ABCD$ umschriebenen Kegels, ebenso der Schnitt $S^*$ der beiden Letzten für $A^* B^* C^* D^*$. Dann sind mittelst des Hilfskreises $K$, welcher durch $M''$ geht, die Asymptoten des Diametralschnitts parallel zu $XOZ$ construiert (§ 30.; 4.) und dadurch der Asymptotenkegel der Fläche ermittelt.

Man verzeichnet nun den horizontalen Durchstosspunkt $M_1$ des durch $M$ gehenden Lichtstrahls und hat in ihm den Mittelpunkt der Horizontalspur des Berührungscylinders; die von ihm aus an die Horizontalspur des Asymptotenkegels gehenden Tangenten $M_1G$, $M_1H$ sind die Asymptoten der besagten Spur, die geraden Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte $G$, $H$ mit $M$ sind die Asymptoten der Hyperbel, nach welcher der gesuchte Berührungscylinder das Hyperboloid berührt. Die Construction von $G'$ und $H'$ ist durch Uebergang zum Kreise $K_1^*$ und zu $M_1^*$ ausgeführt. (Vergl. § 34.; 19.) Sodann genügt ein einziger Punkt für jede dieser Hyperbeln zur Bestimmung; jeder Horizontalschnitt der Fläche liefert ein Paar solcher Punkte; die Schnitte $ABCD$ und $A^* B^* C^* D^*$ erläutern die Benutzung aller andern. Für den erstern giebt der horizontale Durchstosspunkt $S_1$ des durch den entsprechenden Kegelscheitel $S$ geführten Lichtstrahls zwei Tangenten $S_1J$, $S_1L$ der Ellipse $ABCD$ — sie sind durch Uebergang zum Kreis $K_1^*$ und dem Punkt

$S_1^*$ ermittelt. Die Berührungspunkte $J$ und $L$ gehören sowohl der Hyperbel der Berührungscurve als auch der der Horizontalspur des Berührungscylinders an. Der Schnitt $A^* B^* C^* D^*$ liefert Punkte $N$, $O$ der Berührungscurve, welche den erstern diametral gegenüber liegen und durch die Durchstosspunkte $N_2$, $O_2$ der entsprechenden Lichtstrahlen Punkte der Verticalspur des Cylinders. Dabei wird zweckmässig die Ebene $A^* B^* C^* D^*$ selbst als erste Projectionsebene benutzt; jedoch gestattet die Symmetrie die directe Ableitung von $N$ und $O$ aus $J$ und $L$.

4) Man verzeichne die Umrisse einer so gegebenen Fläche zweiter Ordnung, in den Projectionsebenen — als die Spuren der zu den Axen $OY$ und $OZ$ parallelen Berührungscylinder und als die Projectionen der bezüglichen Berührungscurven auf der Fläche.

5) Man bestimme die Schnittpunkte einer Geraden $h$ mit der Fläche, insbesondere die einer Parallelen zu einer Projectionsaxe, d. h. ermittle aus einer Projection eines Punktes der Fläche die andre Projection.

6) Würden sich die vorigen Ergebnisse unmittelbar für die Darstellung in schräger Parallelprojection (§ 61.) verwenden lassen?

7) In Bezug auf jede Diametralebene ist die Fläche zweiter Ordnung in schräger Symmetrie für die Richtung des zu ihr conjugierten Durchmessers. (Vergl. § 42.)

8) Man erörtere die Bedingungen, unter welchen die in Centralprojection durch Umriss und Mittelpunkt dargestellte Fläche zweiter Ordnung ein Ellipsoid, ein zweifaches Hyperboloid, ein elliptisches Paraboloid sein wird.

9) Man verzeichne in Centralprojection die Berührungscurve der Fläche für einen Berührungskegel von gegebener Spitze.

97. Wenn bei der Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung nach der Methode des § 95. entweder

a) der zur Ebene des beweglichen Kegelschnitts conjugierte Durchmesser normal zu dieser Ebene, oder wenn

b) der bewegte Kegelschnitt selbst ein Kreis wäre, so

würden daraus für die constructive Behandlung besonders in Parallelprojection specielle Vortheile entspringen.

Man würde für Parallelprojection im Falle a) jenen Durchmesser der Axe $OZ$ parallel und die Axen des beweglichen Kegelschnitts in seiner Mittellage den Axen $OX$, $OY$ respective parallel legen dürfen und da die zu den beiden verzeichneten zu $XOY$, $XOZ$ respective parallelen Diametralschnitten gehörigen Berührungscylinder der Fläche den Axen $OZ$, $OY$ respective parallel also zu jenen Projectionsebenen normal sind, so sind die bezüglichen Projectionen jener beiden Kegelschnitte zugleich die entsprechenden Umrisse der Fläche. Die ersten Projectionen der Lagen des bewegten Kegelschnitts sind dann nicht nur ähnlich und ähnlich gelegen, sondern auch concentrisch und die Spitzen der nach ihnen die Fläche berührenden Kegel haben im Mittelpunkt des ersten Umrisses ihre gemeinschaftliche erste Projection; etc.

Im Falle b) würde man die Ebene des beweglichen Kreises der ersten Projectionsebene und den zu ihr conjugierten Durchmesser der zweiten Projectionsebene parallel machen; etc. Aehnliche Vereinfachungen würden auch für die centralprojectivische Darstellung entspringen.

Die Benutzung derselben wird ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gesichert, indem wir den Satz beweisen: Eine Fläche zweiter Ordnung hat im Allgemeinen drei und nur drei zu einander normale Durchmesser, von denen jeder der Ebene der beiden andern conjugiert ist. Man nennt sie die Axen der Fläche, die in ihnen gelegenen Punkte der Fläche die Scheitel und die durch sie bestimmten drei zu einander normalen Diametralebenen, welche Ebenen orthogonaler Symmetrie für die Fläche sind, die Hauptebenen, sowie die in diesen gelegenen Schnitte die Hauptdiametralschnitte oder Hauptschnitte der Fläche. Ist $d_i$ ein Durchmesser der Fläche zweiter Ordnung und $\mathbf{D}_i$ die zu ihm conjugierte, $\mathbf{N}_i$ die zu ihm normale Durchmesserebene, so erzeugt, während $d_i$ eine Durchmesserebene durchläuft oder einen ebenen Strahlenbüschel beschreibt, die Ebene $\mathbf{D}_i$ ein zu ihm projectivisches Ebenenbüschel, welches den zu jener Ebene conjugierten Durchmesser zur Scheitelkante hat; die Ebene $\mathbf{N}_i$ aber ein gleichfalls zu ihm also auch zum Büschel

der $\mathrm{D}_i$ projectivisches Ebenenbüschel um die Normale der Ebene der $d_i$ als Scheitelkante. Die Durchschnittslinie entsprechender d. h. zu demselben Strahl $d$ gehöriger Ebenen der Büschel $\mathrm{D}_i$ und $\mathrm{N}_i$ erzeugt somit (§ 68.) einen mit der Fläche zweiter Ordnung concentrischen Kegel zweiten Grades $K$, welcher die Eigenschaft hat, dass jede seiner Erzeugenden der zur entsprechenden Lage des Durchmessers $d_i$ conjugierte und normale Durchmesser der Fläche ist.

Betrachten wir dann das Durchmesserbüschel $d_i^*$ einer zweiten Durchmesserebene, so entspricht ihm in gleicher Weise ein Kegel $K^*$ der zu seinen Strahlen normalen und conjugierten Durchmesser. Da die beiden Büschel $d_i$ und $d_i^*$ einen Durchmesser $d$ in der Schnittlinie ihrer Ebenen gemein haben, so müssen auch die concentrischen Kegel $K$, $K^*$ den zu ihm normalen conjugierten Durchmesser zugleich enthalten und sich somit in noch einer Erzeugenden $a$ oder in noch drei Erzeugenden $a$, $b$, $c$ durchschneiden.

Im ersten Falle entspricht der Erzeugenden $a$ ein zu ihr normaler und conjugierter Durchmesser $d_a$ in der Ebene der $d_i$ und auch ein von diesem verschiedener zu $a$ normaler und conjugierter Durchmesser $d_a^*$ in der Ebene der $d_i^*$ und die Ebene dieser beiden Durchmesser $d_a d_a^*$ ist zu $a$ zugleich normal und conjugiert, d. h. $a$ ist eine Axe der Fläche zweiter Ordnung. Die beiden Axen des in der Ebene $d_a d_a^*$ gelegenen Diametralschnitts der Fläche sind die beiden andern Axen $b$ und $c$ der Fläche.

Im andern Falle können nur $a$, $b$, $c$ selbst diese Axen sein, d. h. die drei übrigen gemeinschaftlichen Erzeugenden der Kegel $K$, $K^*$ bilden, wenn sie sämmtlich reell sind, die Kanten einer dreiseitig rechtwinkligen Ecke.

Die Schlüsse gelten und die Construction bleibt anwendbar für alle eigentlichen Flächen zweiter Ordnung, welche einen Mittelpunkt im endlichen Raume haben. Es haben also insbesondere auch die Kegelflächen zweiten Grades stets ein und nur ein System von Axen und Hauptebenen.

Im Falle der Paraboloide und der Cylinder fällt von den drei Axen nur eine in den endlichen Raum, aber jeder Normalschnitt derselben, d. h. des Parallelenbündels der Durchmesser der Fläche, bestimmt durch seine Axen mit ihrer Rich-

tung die beiden durch sie gehenden Hauptebenen der Fläche, deren Stellungen die beiden andern unendlich fernen Axen der Fläche sind.

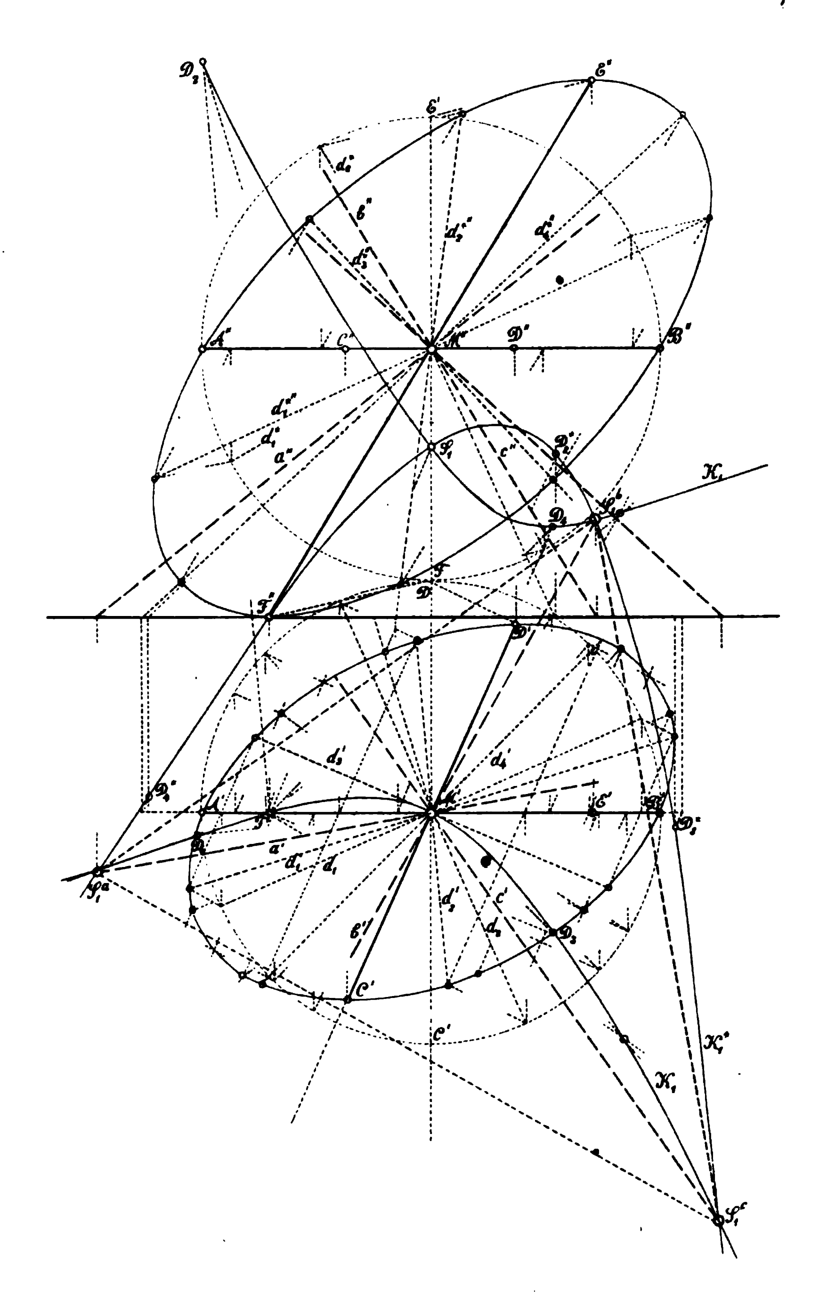
Wie sich aus dieser Erledigung der Frage a) auch die der b) ergiebt, ist unten angeführt.

1) Die Hyperbel $K_1$ (Tafel X.) ist eine rectanguläre Hyperbel; man bestimme direct ihre Asymptotenrichtungen und Asymptoten.

In Tafel X. ist die Construction der Axen eines Ellipsoids ausgeführt, das durch die zur ersten und respective zweiten Projectionsebene parallelen Diametralschnitte oder durch die conjugierten Durchmesser $AB$, $CD$, $EF$ gegeben ist.

Den Durchmessern des Diametralschnitts $ABCD$ entspricht als Ort ihrer normalen Conjugierten ein Kegel $M$, $K_1$ — seine erste Spur —, ebenso denen des Diametralschnitts $ABEF$ ein Kegel $M$, $K_1^*$; beide Kegel haben die Erzeugenden gemein, welche von $M$ nach $S_1$, $S_1^a$, $S_1^b$, $S_1^c$ gehen und deren erste dem gemeinsamen Durchmesser $AB$ entspricht, während die drei letzten die Haupt-Axen des Ellipsoids sind. Jene ist daher die Schnittlinie der zu $AB$ normalen Ebene, für welche $M'M''$ die erste Spur ist, mit der conjugierten Ebene $CDEF$, deren erste Spur die Parallele zu $C'D'$ durch $F'$ ist. Die Spurhyperbel $K_1$ entsteht als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen der projectivischen Büschel der ersten Spuren der Ebenenbüschel $\mathbf{N}_i$ und $\mathbf{D}_i$ für die Durchmesser von $ABCD$ — Büschel, deren Scheitelpunkte also $M'$ und $F'$ sind und deren entsprechende Strahlen normal zur ersten Projection des gewählten Durchmessers und parallel zur ersten Projection des ihm conjugierten Durchmessers des Schnittes $ABCD$ sind. Jedes Paar conjugierter Durchmesser von $ABCD$ liefert so zwei Punkte von $K_1$, so z. B. das Paar $d_1'$, $d_2'$ die Punkte $D_1$, $D_2$; und da aus $d_1'$, $d_2'$ das andere Paar conjugierter Durchmesser $d_3'$, $d_4'$ sich ergiebt (§ 34.; 10.), so entspringen dem noch weiter die Punkte $D_3$, $D_4$. Damit sind bereits sieben Punkte von $K_1$ bekannt und weitere leicht

Taf. X.





ebenso oder aus diesen zu finden. Die conjugierten Durchmesser $d_1'$, $d_2'$ sind mit Hilfe der Affinität aus dem Paar $d_1$, $d_2$ von rechtwinkligen Durchmessern des Kreises construiert, der $A'B'$ zum Durchmesser hat. Auch die Diagonalen des von den Tangenten des Diametralschnitts $ABCD$ in $A'$, $B'$, $C'$, $D'$ gebildeten Parallelogramms würden schon zur Bestimmung von $K_1$ genügen. Die Construction aus dem Kreis ist vortheilhaft, wenn man zugleich den Diametralschnitt $ABCD$ zu verzeichnen wünscht. Für die Bestimmung von $K_1^*$ ist ersichtlich, dass die Scheitel der erzeugenden Spurenbüschel die unendlich fernen Punkte von $C'D'$ und $M'M''$ respective sind. Dann ergiebt sich aus dem rectangulären Durchmesserpaar $d_1^*$, $d_2^*$ des über $A''B''$ als Durchmesser beschriebenen Kreises das Paar conjugierter Durchmesser $d_1^{*\prime\prime}$, $d_2^{*\prime\prime}$ und ein weiteres solches Paar $d_3^{*\prime\prime}$, $d_4^{*\prime\prime}$ vom Diametralschnitt $A''B''E''F''$. Das Perpendikel in $M''$ zu einem Durchmesser giebt in der Projectionsaxe den Fusspunkt der zu ihr normalen ersten Spur der Normalebene $\mathbf{N}_i^*$; der ihm conjugierte giebt in der Parallelen zu $C'D'$ durch seinen in $A'B'$ gelegenen horizontalen Durchstosspunkt die erste Spur der conjugierten Ebene $\mathbf{D}_i^*$ und diese schneidet die erste Spur von $\mathbf{N}_i^*$ in einem Punkte von $K_1^*$. So liefert die bezeichnete Gruppe der Durchmesser Punkte $D_1^*$, $D_2^*$, $D_3^*$, $D_4^*$, von denen $D_1^*$ oberhalb der Zeichnung fällt — in den andern Ast der Hyperbel $K_1^*$.

Die den beiden Curven $K_1$, $K_1^*$ ausser $S_1$ gemeinsamen Punkte liegen so, dass $M'$ der Höhendurchschnitt ihres Dreiecks und die Coordinate $z$ von $M$ die Ordinate für $M'$ in den Kreisen ist, die über den Höhen als Durchmesser beschrieben werden. (§ 10.; 10.)

Die Endpunkte der Axen können mit Leichtigkeit construiert werden.

2) Wenn dieselbe Construction in Centralprojection für ein Hyperboloid ausgeführt würde, welches sind die Beziehungen, die zwischen der Fluchtcurve des Letz-

tern, den Fluchtpunkten der Axen und dem Distanzkreis und Hauptpunkt stattfinden?

3) Wenn die Involution der conjugierten Durchmesser des einen Hauptschnittes der Fläche, also auch aller zu ihm parallelen ebenen Schnitte derselben eine rechtwinklige Involution ist, und somit die in ihm gelegenen beiden Axen der Fläche unbestimmt sind, so ist dieser Hauptschnitt und jeder zu ihm parallele Schnitt ein Kreis; alle zu ihm normalen Diametralschnitte der Fläche sind einander gleich und die Fläche zweiter Ordnung kann durch Drehung eines beliebigen unter ihnen um seine Axe oder die Axe der Fläche erzeugt werden. (§ 92.; 9.)

   Solche Flächen heissen Rotationsflächen zweiter Ordnung, jene Axe heisst die Rotationsaxe, die zu ihr normalen kreisförmigen Schnitte nennt man die Parallelkreise, die durch sie gehenden zu einander congruenten Schnitte die Meridiane der Fläche, — wie diess in der mathematischen Geographie geschieht für das Rotations-Ellipsoid der Erdoberfläche.

4) Die einer Rotationsfläche zweiter Ordnung nach Parallelkreisen umschriebenen Kegel sind Rotationskegel, deren Axe die Rotationsaxe der Fläche ist; die zugehörigen Normalen der Fläche bilden ebensolche Rotationskegel. Man characterisiere die Berührungscylinder längs der Meridiane und ihre Normalen.

5) Eine Rotationsfläche zweiter Ordnung hat entweder zwei Brennpunkte in der Rotationsaxe — die vereinigten Brennpunkte aller ihrer Meridiane — oder einen zur Rotationsaxe normalen Kreis von Brennpunkten — den Ort jener Brennpunkte aller Meridiane. Wie hängt diess von der Länge der Axen ab? In welcher Weise übertragen sich die Involutionseigenschaften der Brennpunkte der Kegelschnitte (§ 35.) auf diese Punkte und die Rotationsflächen zweiter Ordnung?

6) Die bequemste constructive Behandlung der Rotationsflächen zweiter Ordnung entspricht der zur Rotations-

axe normalen Stellung einer Projectionsebene. Man erläutere die Vortheile derselben für die Lösung der elementaren Aufgaben.

7) Für die Kugel ist jeder Durchmesser eine Rotationsaxe; ihre Brennpunkte sind im Mittelpunkt vereinigt.

8) Die Axen einer Fläche zweiter Ordnung mit endlichem Centrum bilden das einzige Tripel conjugierter Durchmesser, welches dieselbe mit einer beliebigen concentrischen Kugel gemein hat.

Ihre Richtungen bilden ein Tripel harmonischer Pole sowohl für den unendlich fernen nicht reellen Kreis $J$ wie für den Schnitt $U$ der Fläche zweiter Ordnung mit der unendlich fernen Ebene. Bezeichnen wir die Schnittpunkte des Kreises $J$ mit dem Kegelschnitt $U$, die jedenfalls nicht reell sind, durch 1, 2, 3, 4 respective, so bilden die Durchschnittspunkte $A$, $B$, $C$ der Gegenseitenpaare 12, 34; 23, 14; 31, 24, welche nach der Entwicklung des Textes reell und einzig existieren müssen, die Punkte jenes Tripels (§ 32.) d. h. die Richtungen der Axen; die Geraden $AB$, $BC$, $CA$ sind die Stellungen der Hauptebenen der Fläche.

9) Die sechs Schaaren paralleler Ebenen von den Stellungen 12, 34; 23, 14; 31, 24, welche paarweis die Richtung einer Axe der Fläche gemein haben, schneiden die Fläche zweiter Ordnung in Kreisen — weil in Kegelschnitten, welche die Kreispunkte ihrer respectiven Ebenen enthalten. (§ 31.; 8.)

Nur ein Paar dieser Schaaren kann reell sein, d. h. nur durch eine Axe der Fläche sind Kreisschnitte möglich — da die Realität von zwei Schaaren die des Vierecks 1 2 3 4 bedingen würde.

In der That, wenn man in dem Hauptschnitt der grossen und kleinen Axe eines Ellipsoids die der mittlern Axe gleichen Durchmesser bestimmt, so liefern diese mit der mittlern Axe selbst die beiden nach Kreisen schneidenden Diametralebenen. Wie lässt sich das

Analoge bei den Hyperboloiden ausführen? Und wie beim elliptischen Paraboloid? (Vergl. § 99.) Man erörtere ferner das die Kreisschnitte der Kegel zweiten Grades Betreffende.

10) Die Tangentialebenen von den Stellungen der Kreisschnitte liefern als ihre Berührungspunkte mit der Fläche je ein Paar Punkte, die als unendlich kleine Kreisschnitte der Fläche zu betrachten sind, d. h. für welche die Involution der conjugierten Tangentenpaare eine rechtwinklige Involution ist. Man nennt sie die Kreispunkte, Umbilical- oder Nabelpunkte der Fläche.

11) Insofern man von nicht reellen Regelschaaren auf den Nichtregelflächen zweiter Ordnung sprechen und die bezüglichen Eigenschaften der Regelflächen auf diese übertragen darf, kann man nach § 93. den Satz aussprechen: Die zwölf Kreispunkte einer Fläche zweiter Ordnung liegen zu dreien in acht nicht reellen Geraden.

12) Weil im Falle der Hyperboloide die reellen Gegenseiten des Vierecks 1 2 3 4 den unendlich fernen Schnitt der Fläche nicht schneiden können, da sonst das Viereck reell wäre, so kann das einfache Hyperboloid Kreispunkte nicht haben — was auch aus der hyperbolischen Natur seiner Punkte folgt; dagegen hat das zweifache Hyperboloid vier solche Punkte, wie auch das Ellipsoid; auf dem elliptischen Paraboloid existieren deren zwei, das hyperbolische gestattet keine solchen.

13) Das hyperbolische Paraboloid kann nicht durch einen beweglichen Kreis erzeugt werden, also auch nicht als Rotationsfläche.

14) Die harmonischen Eigenschaften des Vierecks geben den Satz: Die Stellungen der Kreisschnitte bilden mit denen der Hauptschnitte durch die Axe, deren Richtung jene enthalten, ein harmonisches Büschel und da die Letztern rechtwinklig zu einander sind, so halbieren sie die Winkel der erstern.

15) Man verzeichne für ein Ellipsoid oder zweifaches Hyperboloid, welches zur ersten Projectionsebene parallele kreisförmige Querschnitte hat, die Schnittpunkte mit einer Geraden $h$ und den zu derselben parallelen Berührungscylinder — durch Benutzung von zweien der Kreisschnitte, als welche im Allgemeinen vier Punkte und die entsprechenden Tangenten des Schnittes der Fläche mit einer der projicierenden Ebenen von $h$ und dadurch die fraglichen Schnittpunkte, zugleich aber auch eine Erzeugende und die zugehörigen Tangentialebenen für den zugehörigen Berührungscylinder etc. liefern.

16) Wenn die unendlich fernen Curven $U$ und $J$ einander in zwei Punkten berühren, so ist das eine Paar der Verbindungsgeraden, sagen wir 12, 34, das Paar der gemeinsamen Tangenten und ihr Durchschnittspunkt $A$ die Richtung einer Axe der Fläche. Die Paare 23, 14; 31, 24 fallen in der Berührungssehne zusammen und die Punkte $B$, $C$ sind unbestimmt in derselben, indem sie die in ihr gelegene Sehne harmonisch theilen; d. h. (§ 95.; 12.) die Fläche hat nur eine bestimmte Axe, die beiden andern Axen sind unbestimmt in der zu dieser normalen Durchmesserebene und rechtwinklig zu einander. Die Fläche zweiter Ordnung ist eine Rotationsfläche, die beiden Stellungen der Kreisschnitte fallen zusammen in die eine zur Rotationsaxe normale Stellung.

17) Man zeige, dass die Construction des Textes gültig bleibt — unter Berücksichtigung von § 95.; 12. betrachtet — für die Bestimmung des gemeinsamen Systems conjugierter Durchmesser von irgend zwei concentrischen Flächen zweiter Ordnung.

18) An welche Voraussetzungen ist die Realität aller drei Durchmesser des besagten Systems zu knüpfen?

98. **Die Flächen zweiter Ordnung mit elliptischen Punkten können aus der speciellsten unter ihnen, der Kugelfläche, durch die Methode der centrischen Collineation oder der Reliefs (§ 41.; 4., 5.) abgeleitet werden.** Die kreisförmigen Schnitte der Kugel gehen in

Kegelschnitte auf der Fläche zweiter Ordnung über. Wenn die Kugel mit der Gegenebene ihres Systems keinen Punkt gemein hat, so entsteht aus ihr eine Fläche zweiter Ordnung, die im Endlichen geschlossen ist, da sie nur elliptische Querschnitte gestattet, das Ellipsoid. Berührt die Kugel die Gegenebene ihres Systems in einem Punkte, so verwandeln sich alle ihre kreisförmigen Schnitte in elliptische, ausgenommen nur diejenigen, welche auf den durch jenen Berührungspunkt gehenden Ebenen liegen, die in Parabeln übergehen, deren Ebenen sämmtlich eine feste Richtung enthalten — die jenen Berührungspunkt mit dem Centrum verbindende Gerade giebt sie an — die Richtung aller Durchmesser der Fläche (§ 16.; 1.); sie ist ein elliptisches Paraboloid.

Schneidet die Kugel die Gegenebene des Systems in einem Kreise $K$, nach welchem ihr ein gerader Kegel vom Mittelpunkt $M$ umschrieben ist, so enthält die entstehende Fläche zweiter Ordnung das unendlich ferne Bild des Kreises $K$, einen reellen Kegelschnitt, und die zugehörigen Tangentialebenen bilden einen Kegel, der den Mittelpunkt $M'$ der Fläche zu seinem Mittelpunkt hat, den Asymptotenkegel der Fläche. Die Kreise auf der Kugel in allen den Ebenen, welche den Kreis $K$ nicht treffen, verwandeln sich in Ellipsen, die Kreise der Ebenen, welche eine Tangente von $K$ enthalten, werden Parabeln, deren Ebenen also den Tangentialebenen des Asymptotenkegels parallel sind. Die Kreise der Kugel in den den Kreis $K$ schneidenden Ebenen werden Hyperbeln, für welche die Schnittpunkte durch ihre Verbindungslinien mit dem Centrum der Collineation die Asymptotenrichtungen liefern; die Fläche ist das zweifache Hyperboloid.

Aus bekannten Eigenschaften der Kugel lassen sich hiernach entsprechende Eigenschaften der Nichtregelflächen zweiter Ordnung ableiten.

Man kann leicht die Kreisschnitte einer Fläche zweiter Ordnung bestimmen, welche aus einer gegebenen Kugel durch eine centrische Collineation abgeleitet wird. Denken wir die zweite Projectionsebene normal zur Collineationsebene und parallel zur Verbindungslinie des Centrums der Collineation mit dem Centrum der Kugel, so dass die Axen der entstehenden Fläche zweiter

Ordnung normal und respective parallel zu ihr werden. Nun liegen die Kreisschnitte derselben auf Ebenen, welche durch je ein Paar der vier nicht reellen Schnittpunkte des unendlich fernen Querschnittes $U$ der Fläche mit dem nicht rellen unendlich fernen Kreis $J$ gehen; und weil die der Collineationsebene parallelen Schnitte der Kugel Kreisschnitte der collinearen Fläche von der gleichen Stellung nach sich ziehen, so ist die eine jener Verbindungslinien der vier Punkte 1234, durch welche reelle Kreisschnitte gehen, in der Gegenebene **R** unendlich fern. Die andere finden wir durch folgende Schlüsse: Da für alle Kugeln der unendlich ferne nicht reelle Kreis derselbe ist, so liegt das gesuchte Bild der andern Stellung der Kreisebenen nicht nur in der Gegenebene **R** der gegebenen Collineation, sondern auch in der Gegenebene **R***  derjenigen zweiten involutorischen Collineation aus demselben Centrum, für welche die Kugel in sich selbst transformiert wird, d. i. der Ebene, welche die geradlinigen Abstände des Centrums der Collineation von seiner Polarebene in der Kugel halbiert (§42.). Alle Ebenen durch jene Gerade **RR*** schneiden die Kugel in Kreisen, denen in der collinearen Figur Kreise entsprechen; die durch sie mit dem Centrum der Collineation bestimmte Ebene ist der zweiten Schaar der Kreisschnitte der Fläche zweiter Ordnung parallel. (Vergl. unten 7.) Der durch die Gerade **RR*** nach dem Pol der Gegenebene **R** in der Kugel gehenden Ebene entspricht die zweite Diametralkreisschnittebene der Fläche. Damit ist die zur zweiten Projectionsebene normale Axe der Fläche bestimmt; die beiden andern Axen derselben fallen in die Halbierungslinien der Winkel, welche die Diametralkreisschnitte mit einander bilden.

Die Fig. 177. enthält die Construction für den Fall des Ellipsoids. Der Punkt $M$ ist der Pol der Gegenebene **R** in der Kugel, der Schnitt $GH$ der Ebene $M$**RR*** wird somit zum Diametralkreisschnitt $G'H'$ des Ellipsoids — der andere Diametralschnitt $G^{*\prime} H^{*\prime}$ ergiebt sich aus dem zur Collineationsebene parallelen Schnitt der Kugel durch $M$ oder mittelst des Satzes in 5) unten.

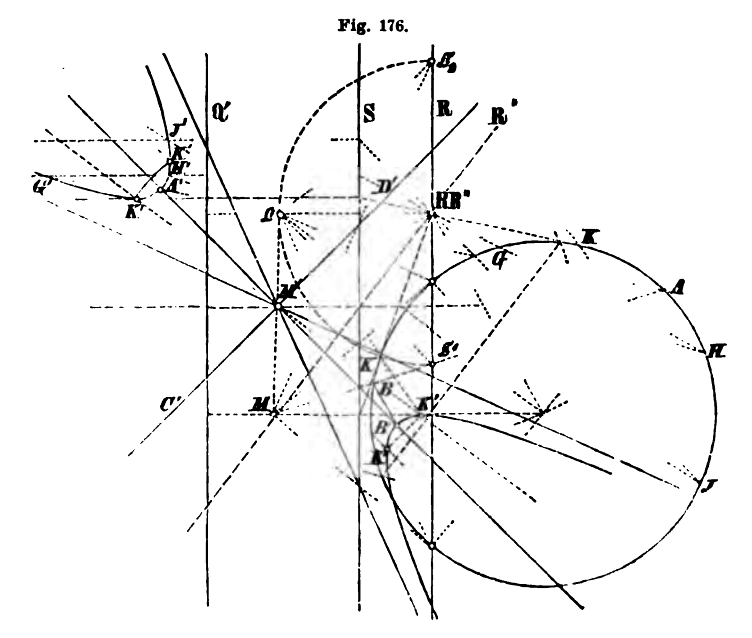
Die Schnitte durch **RR*** nach $K_1$, $K_2$ liefern die Paare von Kreisschnitten $J_1'K_1'$, $J_1^{*\prime}K_1^{*\prime}$ und $J_2'K_2'$, $J_2^{*\prime}K_2^{*\prime}$. Die Kreispunkte sind die $K'$, die den Berührungspunkten der von

RR* ausgehenden und der zur Collineationsebene parallelen Tangentialebenen der Kugel entsprechen. (Vergl. Fig. 176.)

1) Der Mittelpunkt der Fläche ist der entsprechende Punkt zum Pol der Gegenebene R in Bezug auf die Kugel — denn der harmonischen Theilung mit dem Fluchtpunkte entspricht die Halbierung.

2) Man bilde durch Collineation aus einer Kugel ein elliptisches Paraboloid von einem auf ihr gelegenen gegebenen Kreisschnitt und gegebener Richtung seiner

Fig. 176.

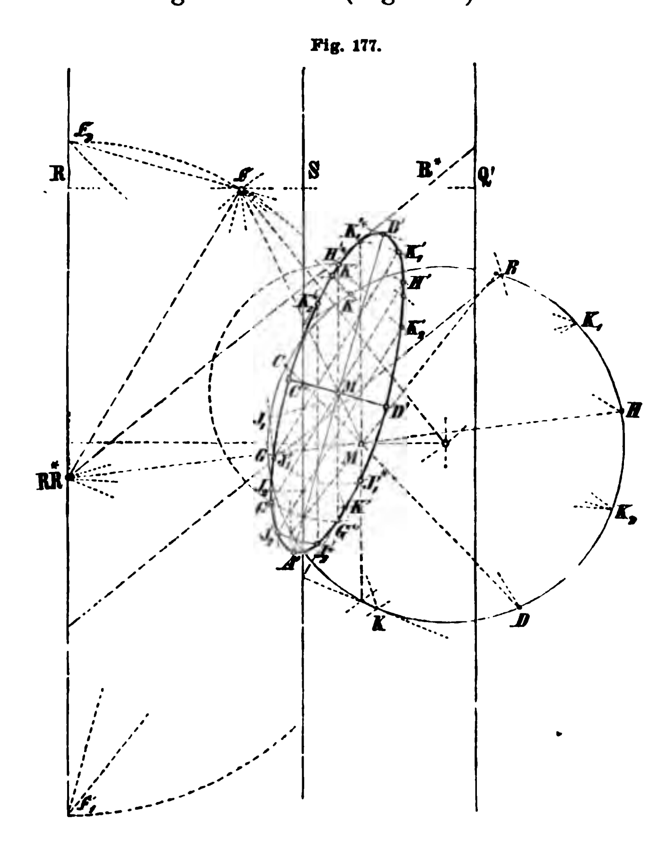



Durchmesser. Dieser Kreisschnitt giebt selbst die Collineationsebene und die Gegenebene R als eine der zu ihm parallelen Tangentialebenen der Kugel, der Berührungspunkt der Kugel mit R und jene Richtung liefern einen Strahl aus dem Centrum. Kann der gegebene Kreisschnitt ausserhalb der Kugel willkürlich gewählt werden?

3) Man leite für ein zweifaches Hyperboloid, welches die Collinearfigur einer Kugel ist, die beiden Schaaren der Kreisschnittebenen ab und stelle es durch die-

selben dar. Man bestimme auch die Kreispunkte $K'$ desselben als die entsprechenden zu den Berührungspunkten der Kugel mit den zur Collineationsebene parallelen und mit den durch die Gerade **RR*** gehenden Tangentialebenen (Fig. 176.)

Fig. 177.



4) Zwei beliebige parallele oder nicht parallele Kreisschnitte derselben Fläche zweiter Ordnung liegen stets auf einer Kugelfläche.

5) Wenn die Ebenen **R** und **R*** zu einander parallel sind, d. h. wenn die Gerade vom Collineationscentrum nach dem Mittelpunkt der Kugel zur Collineationsebene normal ist, so fallen beide Schaaren der Kreisschnitte in die eine zur Collineationsebene parallele Schaar

zusammen; die Fläche zweiter Ordnung ist eine Rotationsfläche mit zur Collineationsebene normaler Axe; die Austrittspunkte der Letztern sind die einzigen Kreispunkte der Fläche. Man erörtere die Bedingungen, unter denen sie zwei reelle Brennpunkte in der Rotationsaxe oder einen Kreis von Brennpunkten in der zu ihr normalen Durchmesserebene besitzen wird. (Vergl. § 97.; 5.)

6) Der Satz: Die Durchschnittskreise von drei Kugeln in Paaren liegen in drei Ebenen eines Büschels, dessen Scheitelkante zur Centralebene normal ist, giebt durch centrische Collineation: W e n n  d r e i  F l ä c h e n  z w e i t e r  O r d n u n g  e i n e n — nicht reellen — e b e n e n  S c h n i t t  g e m e i n  h a b e n,  s o  l i e g e n  d i e  d r e i  e b e n e n  S c h n i t t c u r v e n,  d i e  s i e  ü b e r d i e s s  p a a r w e i s  b e s t i m m e n,  i n  d e n  E b e n e n  e i n e s  B ü s c h e l s. Was kann über die Lage seiner Scheitelkante hinzugefügt werden? Wie gestaltet sich der Satz, wenn die drei Flächen zweiter Ordnung ähnlich und ähnlich gelegen sind, d. h. wenn der gemeinsame Kegelschnitt unendlich fern liegt. Wir führen an, dass diese Sätze auch für den reellen gemeinsamen Schnitt Geltung behalten.

7) Die Construction des Textes wird ohne Vermittelung nicht reeller Elemente durch den evidenten Satz bewiesen: W e n n  m a n  z w e i  C o l l i n e a r f i g u r e n  d e s s e l b e n  O r i g i n a l s  a u s  d e m s e l b e n  C e n t r u m  m i t  v e r s c h i e d e n e n  C o l l i n e a t i o n s e b e n e n  u n d  G e g e n e b e n e n $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^*$ m a c h t,  s o  e n t s p r e c h e n  s e i n e n  S c h n i t t e n  m i t  E b e n e n,  w e l c h e  d i e  D u r c h s c h n i t t s l i n i e  d e r  G e g e n e b e n e n $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^*$ e n t h a l t e n,  C u r v e n,  d i e  z u  i h r e n  O r i g i n a l e n  ä h n l i c h  u n d  ä h n l i c h  g e l e g e n  s i n d — als Schnitte desselben Kegels mit parallelen Ebenen.

8) Wie ergiebt sich aus den Erörterungen des Textes die directe Construction der Axen $A'B'$, $C'D'$ der Collinearfigur eines Kreises in Fig. 177. mittelst der durch $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2$ nach $M$ gehenden Sehnen $AB$, $CD$? (Vergl. auch Fig. 176.)

9) Man kann die Regelflächen zweiten Grades durch centrische Collineation aus dem einfachen Rotationshyperboloid oder auch aus dem hyperbolischen Paraboloid ableiten.

10) Das Ellipsoid kann aus der Kugel gebildet werden durch zweimaligen Uebergang zu einer affinen Figur (vergl. § 96.; ferner § 34.; 18., 19.) Aber man erhält so weder das elliptische Paraboloid noch das zweifache Hyperboloid.

11) Die Kugelfläche entsteht als Ort der Durchschnittspunkte der entsprechenden Elemente eines Strahlenbündels und eines durch die Normalebenen seiner Strahlen aus einem Punkte gebildeten Ebenenbündels. Somit erzeugen ein Strahlenbündel und ein Ebenenbündel, welche zu einander projectivisch (reciprok) sind, eine Nichtregelfläche zweiten Grades. (Vergl. § 94.; 2.)

12) Man zeige, dass jede Fläche zweiten Grades durch den Schnitt von zwei reciproken Bündeln erzeugt werden kann — und dass die dem gemeinschaftlichen Strahl entsprechenden Ebenen beider Bündel die Tangentialebenen derselben in ihren Scheitelpunkten sind.

99. Die bisherigen Entwickelungen enthalten die constructiven Elemente der Theorie der Flächen zweiten Grades, ihre Beziehungen zu Punkten, Ebenen und Geraden betreffend. Die Erörterung ihrer Beziehungen zu Raumcurven und ihren developpabeln Flächen, als mit welchen sie Punkte, Tangenten und Tangentialebenen gemein haben können, ist ohne Schwierigkeit anzuschliessen.

Besondere Untersuchung fordern aber die Probleme von den gemeinsamen Punkten oder der *Durchdringungscurve* und von den gemeinsamen Tangentialebenen oder *der gemeinschaftlich umschriebenen Developpabeln zweier Flächen zweiten Grades*. Sie mag mit der *Discussion specieller Fälle* beginnen.

Die gemeinsame Curve von zwei Flächen zweiten Grades, die im Allgemeinen von der Ordnung $m = 4$ ist — weil

Die gemeinsam umschriebene Developpable von zwei Flächen zweiten Grades, die im Allgemeinen von der Classe

jede Ebene sie in den vier Punkten trifft, die die beiden ihr angehörigen Curven zweiten Grades auf den gegebenen Flächen gemein haben — zerfällt in zwei Kegelschnitte, sobald sie zwei Doppelpunkte besitzt, d. h. sobald die Flächen sich in zwei Punkten berühren.

Denn eine Ebene, welche durch die Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte nach einem weitern gemeinsamen Punkte der beiden Flächen geht, enthielte fünf und somit unendlich viele Punkte derselben. Solche zwei Flächen haben somit entweder keine weitern gemeinsamen Punkte oder sie schneiden sich in zwei Kegelschnitten, für welche die Verbindungslinie jener Doppelpunkte der Schnitt ihrer Ebenen ist. (§ 81.)

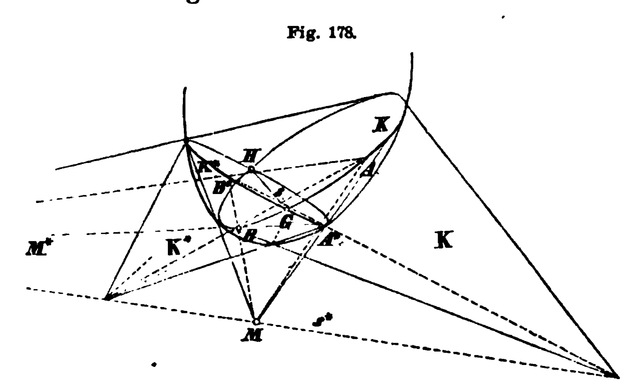
Durch zwei solche Kegel-

$n_1 = 4$ ist, — weil jeder Punkt mit ihr die vier Ebenen gemein hat, welche die beiden von ihm ausgehenden Tangentenkegel der Flächen mit einander gleichzeitig berühren — zerfällt in zwei Kegelflächen, sobald sie zwei Doppelebenen besitzt, d. h. sobald die Flächen sich in zwei Ebenen berühren.

Denn ein Punkt, welcher in der Schnittlinie der beiden Doppelebenen auf einer weitern gemeinsamen Tangentialebene der beiden Flächen liegt, läge in fünf und somit in unendlich vielen Ebenen derselben. Solche zwei Flächen haben somit entweder keine weitern gemeinsamen Tangentialebenen oder sie haben zwei gemeinsame Tangentenkegel zweiten Grades, deren Spitzen in der Schnittlinie der Doppelebenen liegen.

Solche zwei Kegelflächen K,

Fig. 178.



-schnitte $K, K^*$ gehen im Allgemeinen stets zwei Kegelflächen zweiten Grades. (Fig. 178.)

Denken wir nämlich zur Schnittlinie $s$ ihrer Ebenen mit den Punkten $G, H$ in den Flächen die gemeinsame Polare $s^*$ in beiden Flächen, so schneide eine Ebene durch diese Gerade die beiden Kegelschnitte in Punkten $A, B$; $A^*, B^*$ respective; dann bestimmen die Geraden $AA^*, BB^*$; $AB^*, A^*B$ zwei Punkte $M, M^*$ in $s^*$, welche die Scheitel jener Kegel sind — da Kegel $MK$ und Kegel $MK^*$ z. B. vier Kanten $MAA^*$, $MBB^*$, $MG$, $MH$ und die Tangentialebenen in den beiden Letztern gemein haben.

**K*** schneiden sich im Allgemeinen stets in zwei Curven zweiten Grades. (Fig. 178.)

Denken wir zur Verbindungslinie $s^*$ ihrer Spitzen mit den Ebenen **G**, **H** an die Flächen die gemeinsame Polare $s$ in beiden Flächen, so bestimme ein Punkt in dieser Geraden mit beiden Kegeln die Tangentialebenen **A**, **B**; **A***, **B*** respective; dann liegen die Geraden **AA***, **BB***; **AB***, **A*****B** in zwei Ebenen **M**, **M*** aus $s$, welche die Ebenen der besagten Kegelschnitte sind — weil Kegelschnitt **MK** und Kegelschnitt **MK*** z. B. vier Tangenten **MAA***, **MBB***, **MG**, **MH** und die Berührungspunkte in den beiden Letztern gemein haben.

Von einer Discussion der Ausnahmefälle sehen wir ab; nur sei erwähnt, dass insbesondere die beiden Flächen, wenn die beiden Berührungspunkte derselben der nämlichen Erzeugenden angehören, diese mit allen ihren Punkten gemein haben müssen, — weil jede vier Punkte von ihr enthält — und der Rest der Durchdringung ist eine Curve dritter Ordnung, also (§ 100.) identisch mit der in § 81. f. mehrfach behandelten Curve.

Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung sich in drei Punkten berühren, so schneidet die durch dieselben bestimmte Ebene sie in Kegelschnitten, welche diese drei Punkte und ihre Tangenten gemein haben, also identisch sein müssen; d. h. die Flächen berühren sich längs dieser Curve $K$ oder sind einander nach derselben umschrieben und haben für dieselbe den nämlichen Tangentenkegel vom Mittelpunkt $M$.

Jede dieser Flächen ist durch die andere, speciell den Kegel $M, K$, die bezeichnete ebene Curve $K$ und einen Punkt auf ihr ausserhalb derselben bestimmt. (Vergl. § 92.; 15., § 95.; 4.)

Jede Ebene, welche beide Flächen schneidet, thut diess in Kegelschnitten, $K_1, K_2$, welche sich in der Geraden $s$ doppelt berühren, die sie mit der Ebene des Berührungskegelschnitts $K$ gemein hat. (§ 95.; 5., vergl. § 29.; 4.)

Berührt die Ebene die eine Fläche, — dieselbe sei eine Nichtregelfläche, — und schneidet die andere, so kann der Berührungspunkt als ein unendlich kleiner Kegelschnitt angesehen werden, der mit dem Schnitt in der andern Fläche in der Geraden $s$ eine doppelte Berührung hat; — wie diess im Falle einer Regelfläche mit den beiden Erzeugenden des Berührungspunktes unzweifelhaft stattfindet.

1) Wenn man in einem Ellipsoid mit der mittleren Halbaxe als Radius eine concentrische Kugel beschreibt, so berührt diese die Fläche in den Endpunkten der mittlern Axe und schneidet sie in zwei ebenen Curven, welche als Kugelschnitte Kreise sind — den Diametralkreisschnitten der Fläche.

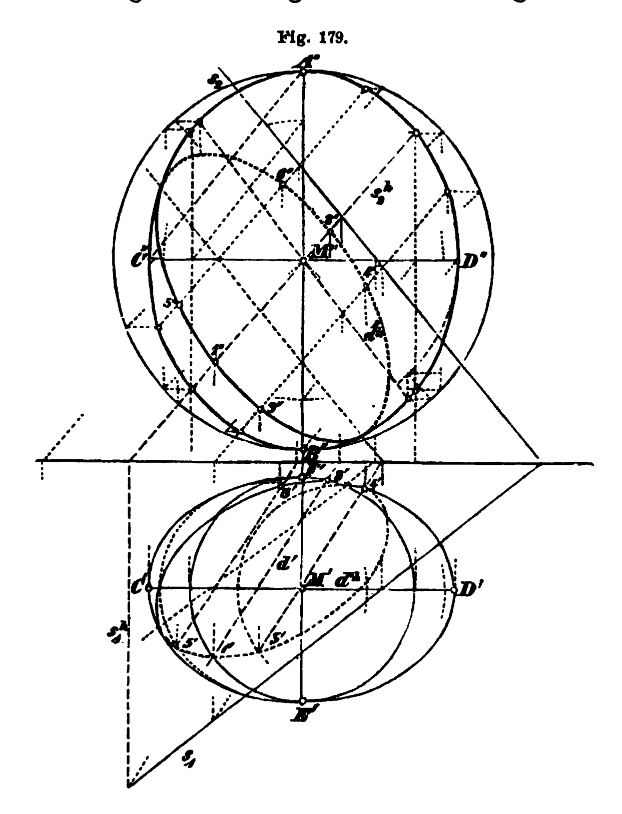
2) Kann diess für die übrigen Flächen zweiten Grades, welche Kreisschnitte zulassen, angewendet werden? Insbesondere wie für Kegelflächen mit gegebenen Hauptebenen?

3) Wenn die Axen eines Ellipsoids den Projectionsaxen parallel sind, so wird dasselbe von einem geraden Kreiscylinder um ihre zu $OZ$ parallele Axe und mit einem der kleinern unter den zu $XOY$ parallelen Axen gleichen Durchmesser in den Endpunkten dieser Letzteren berührt und daher in zwei ebenen Curven geschnitten, deren erste Projectionen mit dem Grundkreis des Cylinders zusammenfallen, indess die zweiten als gerade Linien durch das Centrum erscheinen. Man hat so die beiden Stellungen von Hilfsebenen bestimmt, welche zweite projicierende Ebenen und für die die ersten Projectionen der Schnittcurven Kreise sind; ihre Spuren sind $s_1^h$ und $s_2^h$. Die Mittelpunkte derselben finden sich

in den zu den Stellungen dieser Ebene conjugierten Durchmessern $d^h$, also in der ersten Projection insbesondere in dem Durchmesser, welcher zu $OX$ parallel ist.

Das System dieser Hilfsebenen dient bequem bei der Construction des ebenen Schnittes der Fläche; etc. Die Figur 179. zeigt die Darstellung des ebenen

Fig. 179.



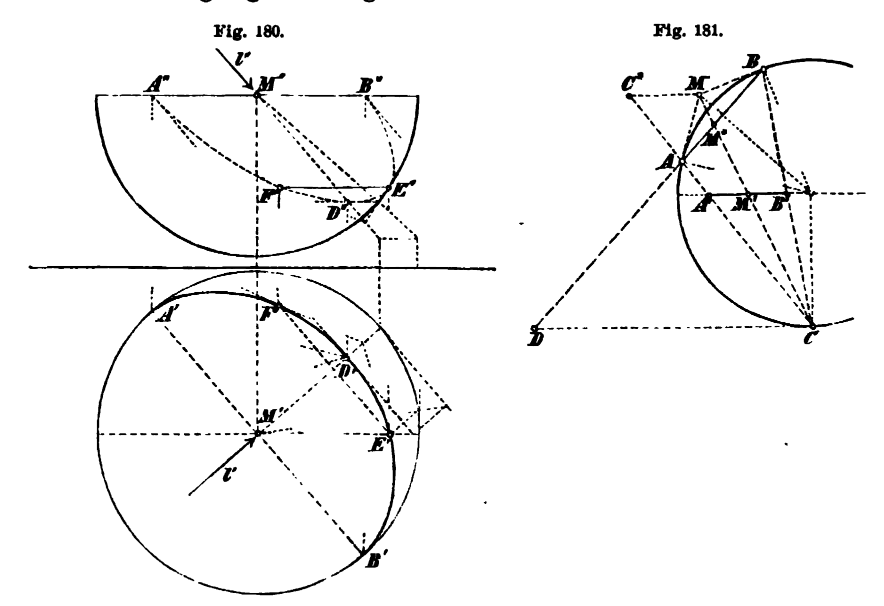

Schnittes $S$. Die Benutzung der Affinität in der zweiten Projection wird der Erklärung nicht bedürfen. Von den beiden Systemen von Hilfsebenen sind diejenigen benutzt, welche auch in der zweiten Projection scharfe Schnitte liefern, die Punkte 1, 2, $\cdots$ 6 sind so ermittelt. Die Berührungspunkte der Schnittcurve mit den Umrissen als Schnitte der Ebene $S$ mit

den beiden Hauptschnitten $ABCD$ und $CDEF$ sind direct bestimmt.

Man entwickele die Construction der Tangenten der Schnittcurve in den so bestimmten Punkten.

4) Wie ist das Verfahren für die Hyperboloide zu modificieren? Lässt sich dasselbe auf die Bestimmung der Fläche zweiter Ordnung durch zwei conjugierte Diametralschnitte im Allgemeinen erweitern?

5) Wenn durch einen auf einer Fläche zweiten Grades **F** gelegenen Kegelschnitt $K$ eine zweite Fläche zwei-




ten Grades **F*** gelegt wird, so schneidet sie die erste in noch einem zweiten Kegelschnitt $K^*$ und beide Flächen berühren einander in den Punkten $G$, $H$, welche die Schnittlinie $s$ der Ebenen von $K$, $K^*$ mit denselben und den Flächen gemein hat. Jede solche Fläche **F*** ist durch $K$, $K^*$ und einen ihrer Punkte ausserhalb dieser Curven bestimmt.

6) Zwei Flächen zweiten Grades, die eine ebene Curve gemein haben, oder dem nämlichen Kegel eingeschrieben sind, können im All-

gemeinen als collineare Figuren in centrischer Lage betrachtet werden. Die Ebene der gemeinsamen Curve ist die Collineationsebene, die Spitze des gemeinsamen Tangentenkegels das Collineationscentrum.

7) Sind $S$ und $S^*$ die Pole der Geraden $s$ in Bezug auf die beiden Kegelschnitte $K$ und $K^*$ des Textes, so ist die Reihe $SS^*MM^*$ also auch das Ebenenbüschel $s \cdot SS^*MM^*$ harmonisch. Wenn geht durch beide Kegelschnitte ein Cylinder? Wenn ist $s$ für den einen von ihnen ein Durchmesser?

8) Zwei Rotationsflächen zweiten Grades, welche einen gemeinsamen Brennpunkt haben, schneiden sich in ebenen Curven; jeder Rotationskegel aus dem Brennpunkt einer Rotationsfläche zweiten Grades schneidet sie in ebenen Curven und umgekehrt.

9) Wenn ein Kegel zweiten Grades eine Fläche zweiten Grades in einer ebenen Curve schneidet, so ist der Rest der Durchdringung eine zweite ebene Curve und in den gemeinsamen Punkten von beiden Curven findet zwischen dem Kegel und der Fläche zweiten Grades Berührung statt; durch beide Curven geht noch ein zweiter Kegel zweiten Grades. Was ergiebt sich daraus für den Schlagschatten, den der Rand einer eben abgeschnittenen Hohlkugel, die von Lichtstrahlen aus einem Punkte oder von parallelen Lichtstrahlen beleuchtet wird, in ihr Inneres wirft?

Was insbesondere für die hohle Halbkugel? Man erkläre die Construction in Fig. 180. In welcher Beziehung steht die Selbstschattengrenze zu dem hier construierten Schlagschatten?

10) Wenn aus einem Punkt einer Fläche zweiten Grades ein Kegel zweiten Grades beschrieben wird, so ist die Schnittcurve desselben mit der Diametralebene, welche dem nach seiner Spitze gehenden Durchmesser conjugiert ist, dem betreffenden Diametralschnitt ähnlich.

11) Die Centralprojection eines Kugelkreises $K$

aus einem Punkte $C$ der Kugeloberfläche auf die Diametralebene, welche zum Radius des Punktes normal ist, ist ein Kreis, welcher (Fig. 181.) das Bild $M'$ der Spitze $M$ desjenigen Kegels zum Centrum hat, der nach dem gegebenen Kreis die Kugel berührt.

Zieht man nämlich $MC^*$ parallel $A'B'$ bis es $CA$ schneidet, so ist

$$A'M' : C^*M = A'M' : AM = M'C : MC$$

d. h. $$A'M' = const.$$

Oder auch es ist für $D$ als den Schnittpunkt von $AB$ mit der Tangente des Kreises in $C$, weil $D$ der Pol von $MM'C$ ist,

$$(ABDM^*) = -1$$

und somit $M'$ die Mitte von $A'B'$.

Man erkläre hieraus die stereographische Projection der Erdoberfläche und verzeichne die Bilder der Breiten- und Längenkreise von 10 zu 10°, so wie die der Wende- und Polarkreise der gegenüberliegenden Halbkugel a) für einen Punkt des Aequators, b) für einen Pol, c) für einen andern Punkt der Oberfläche von gegebener Breite und Länge.

12) Der Winkel zweier Kugeltangenten in demselben Punkte ist dem Winkel ihrer stereographischen Projectionen gleich.

13) In der Centralprojection einer Fläche zweiter Ordnung aus einem beliebigen Punkte des Raumes auf eine beliebige Ebene als Bildebene projicieren sich alle ebenen Schnitte derselben als Kegelschnitte, die einen festen Kegelschnitt — den Umriss der Fläche — doppelt berühren und zwar je nach einer Sehne, deren Pol in Bezug auf sie die Projection des Scheitels desjenigen Kegels ist, der der Fläche nach dem betreffenden ebenen Querschnitt umschrieben wird.

14) Wenn zwei Flächen zweiten Grades einander nach einem Kegelschnitt umschrieben sind, so bestimmen die Tangentialebenen der einen in jedem ihrer Kreispunkte, welche die an-

dere schneiden, in dieser Kegelschnitte, die je den betreffenden Kreispunkt zum Brennpunkt haben.

15) Eine Rotationsfläche zweiten Grades wird von den Berührungsebenen einer ihr eingeschriebenen Kugel nach Kegelschnittlinien geschnitten, die den Berührungspunkt mit jener zum Brennpunkt haben. (Vergl. § 70.; 4.) Kann man beide Brennpunkte eines solchen Schnittes in der Weise der angezogenen Stelle bestimmen?

16) Wenn zwei Flächen zweiter Ordnung derselben dritten nach ebenen Curven umschrieben sind, so schneiden sie sich nach zwei ebenen Curven, deren Ebenen mit denen der Berührungscurven ein Büschel bilden, — denn jede durch einen Punkt der Durchdringung und die Schnittlinie der Ebenen der Berührungscurven gelegte Ebene schneidet beide Flächen in identischen Kegelschnitten. (Vergl. oben 6.)

17) Man weise in den betrachteten Specialfällen der Durchdringung von zwei Flächen zweiten Grades nach, dass vier Kegel zweiten Grades durch die Curve hindurchgehen. (Vergl. § 86.)

18) Wenn zerfällt die Raumcurve dritter Ordnung, in welcher zwei einfache Hyperboloide sich schneiden, die eine Erzeugende gemein haben, in drei gerade Linien? (Vergl. § 93.; 9.)

19) Welchen Bedingungen muss die Darstellung von zwei einfachen Hyperboloiden mit einer gemeinsamen Erzeugenden in Centralprojection und in Parallelprojection respective genügen, damit die Durchdringung eine cubische Ellipse oder Hyperbel werde?

20) Man verzeichne zu einem gegebenen einfachen Hyperboloid ein zweites, welches eine Erzeugende mit ihm gemein hat und eine cubische Parabel mit ihm hervorbringt.

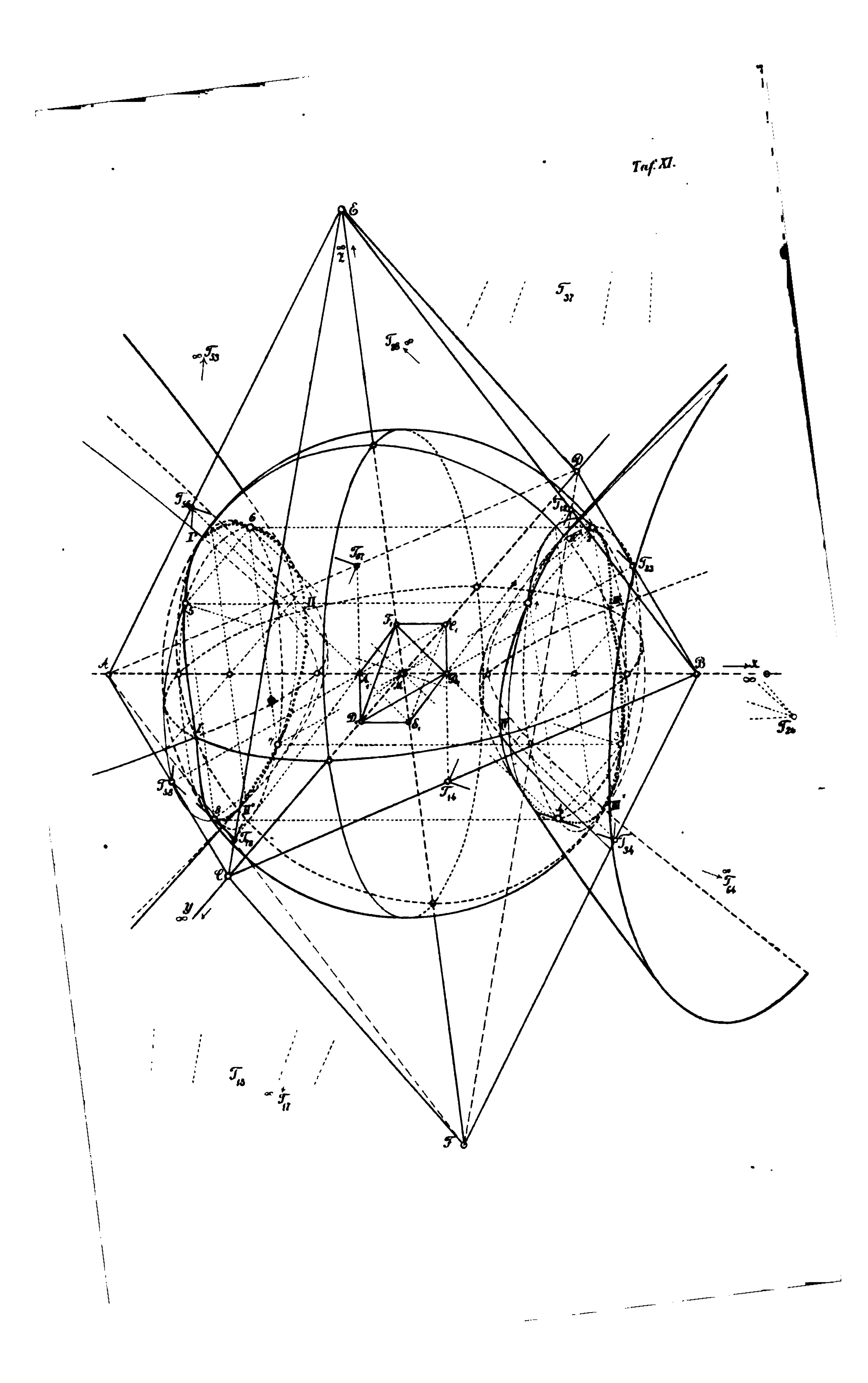
100. Wenn die Durchdringungscurve von zwei Flächen zweiter Ordnung eine Raumcurve vierter Ordnung ist — wir setzen voraus, dass sie keinen Doppelpunkt besitze, also dass keine Berührung der Fläche stattfindet und dass auch nicht die eine der beiden Flächen eine

Kegelfläche zweiten Grades ist, deren Doppelpunkt in der andern liegt (vergl. § 85.) — so besitzt sie für sich wie für ihre developpable Fläche Symmetrie-Eigenschaften, die wir auf folgendem Wege erkennen.

Wir wissen, dass durch centrische Collineation aus der Kugel alle Nichtregelflächen zweiten Grades und aus dem einfachen Rotationshyperboloid das allgemeine einfache Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid abgeleitet werden können und dass bei diesem Uebergang alle projectivischen Eigenschaften ungestört bleiben. Wenn wir also die leicht erkennbaren Symmetrien entwickeln, welche die Durchdringung einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung mit einer concentrischen Kugel besitzt, so gelangen wir durch den Uebergang zur centrisch collinearen Figur dieses Systems zu der Erkenntniss der allgemeinen Symmetrie-Eigenschaften der Durchdringung von zwei Flächen zweiter Ordnung, von denen wenigstens die eine eine Nichtregelfläche ist. Betrachten wir dagegen die Durchdringung einer allgemeinen Fläche zweiter Ordnung mit einem concentrischen einfachen Rotationshyperboloid, dessen Rotationsaxe mit einer Axe der erstern Fläche zusammen fällt, so erkennen wir daraus die Symmetriegesetze der Durchdringung von zwei Flächen zweiter Ordnung, von denen wenigstens die eine eine Regelfläche ist.

Die Untersuchung der beiden einfachen — offenbar durch das Vorhandensein eines beiden Flächen gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole in den Richtungen der drei Axen und dem Mittelpunkt characterisierten — Fälle erfordert aber wesentlich die gleichen Mittel und giebt die gleichen Resultate. Sei die allgemeine Fläche zweiter Ordnung so gestellt, dass ihre Axen den Projectionsaxen parallel und speciell die Rotationsaxe parallel $OZ$ ist, so schneidet eine zur Ebene $XOY$ parallele Hilfsebene die eine Fläche in einem Kegelschnitt mit zu $OX$, $OY$ respective parallelen Axen und die andere Fläche in einem concentrischen Kreis. Die Schnittpunkte beider liegen in Paaren auf Parallen zu $OX$ und $OY$; die zugehörigen Tangentialebenen der einen wie der andern Fläche schneiden sich in Paaren in den respective zu $YOZ$, $XOZ$ parallelen gemeinsamen Hauptebenen. Fügt man aber sodann zu dieser Hilfsebene eine zweite zu $XOY$ parallele,

Taf. XI.



welche vom gemeinsamen Mittelpunkt $M$ der Flächen ebenso weit aber nach der entgegengesetzten Seite absteht, wie die vorige, so schneidet dieselbe die allgemeine Fläche zweiter Ordnung in einem dem vorher gebildeten gleichen Kegelschnitt und die andere in einem dem vorigen gleichen Kreise, welche beide ihre ersten Projectionen mit den vorigen zusammenfallend haben; für ihre Tangentialebenen gelten die nämlichen Bemerkungen wie vorher. Zwei solche Hilfsebenen liefern somit acht Punkte 1, 2, ... 8 (Tafel XI.) der Durchdringungscurve, welche die Ecken eines rechtwinkligen mit seinen Kanten den Projectionsaxen parallelen Parallelepipeds bilden, also viermal in Paaren je auf Geraden parallel den Projectionsaxen und respective durch den gemeinsamen Mittelpunkt $M$ der Flächen liegen. Von diesen vier Punkten aus wird somit die Durchdringungscurve durch Kegel zweiten Grades projiciert.

Die Tangentialebenen der einen wie der andern Fläche in diesen acht Punkten bilden je ein Octaeder $ABCDEF$, $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, welches seine Ecken paarweis in den Axen und seine Kanten zu je vier in den gemeinsamen Hauptebenen hat. Die Durchschnittslinien entsprechender Paare ihrer Flächen, welche die Tangenten der Durchdringungscurve in den gewonnenen Punkten sind, schneiden sich also paarweis entweder in einer der Hauptebenen oder sie sind parallel, d. h. schneiden sich in der unendlich fernen Ebene. Und zwar ist die zu $XOY$ parallele Hauptebene der Ort der Schnittpunkte der Tangentenpaare in Punkten, welche auf Geraden aus der Richtung von $OZ$ liegen, die zu $YOZ$ parallele von solchen, deren Berührungspunkte auf Geraden in der Richtung von $OX$, die zu $ZOX$ parallele von solchen, deren Berührungspunkte auf Geraden von der Richtung der $OY$ und die unendlich ferne Ebene von solchen, deren Berührungspunkte auf Geraden aus $M$ gelegen sind. Die developpable Fläche der Durchdringungscurve hat also in den Hauptebenen und der unendlich fernen Ebene vier ebene Doppelcurven. In der Fig. der Tafel XI. sind die Schnittpunkte der Tangenten der Durchdringungscurve in den Punkten 1, ... 8 eingetragen und bezeichnet durch $T_{12}$, $T_{34}$, $T_{56}$, $T_{78}$ (diese liegen in der Ebene $ABEF$ und entspre-

chen dem doppelt projicierenden Kegel aus dem Scheitel $Y$); $T_{15}$, $T_{26}$, $T_{37}$, $T_{48}$ (in der Ebene $CDEF$, dem Kegel aus $X$ entsprechend); $T_{14}$, $T_{23}$, $T_{58}$, $T_{67}$ (in $ABCD$ für den Kegel aus $Z$); $T_{17}$, $T_{28}$, $T_{35}$, $T_{46}$ (unendlich fern, dem Kegel aus $M$ entsprechend). Die Curve hat vier reelle Punkte I, ·· IV mit der Ebene $ABCD$ und vier reelle Punkte I*, ·· IV* mit der Ebene $ABEF$ gemein, indess die Punkte derselben in den Ebenen der beiden andern Doppelcurven nicht reell sind; jene sind die Punkte der acht reellen stationären Ebenen der Curve. (Vergl. § 86.; 6. und Tafel III.) Die Doppelcurven gehen von da nach $T_{58}$, $T_{67}$, $T_{23}$, $T_{14}$ respective in $ABCD$ und nach $T_{56}$, $T_{78}$, $T_{34}$, $T_{12}$ in $ABEF$.

Oder die Scheitel der doppelt umschriebenen Kegel der Durchdringungscurve sind die Punkte des gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole in beiden Flächen; die Ebenen der doppelt eingeschriebenen Curven der Developpabeln derselben sind die Ebenen desselben Quadrupels und zwar gehört zu jedem Scheitel die Gegenfläche des Quadrupels als Ebene der bezüglichen Doppelcurve und umgekehrt.

Man erhält ganz die analogen Resultate für zwei allgemeine Flächen zweiter Ordnung, welche concentrisch sind, indem man Hilfsebenen benutzt, welche zu einer der Ebenen des ihnen gemeinsamen Systems conjugierter Durchmesser (vergl. § 97.; 17., 18.) parallel und symmetrisch sind.

Gehen wir sodann von dem betrachteten System zu einem centrisch collinearen System über, so haben wir in demselben zwei allgemeine Flächen zweiter Ordnung mit dem gemeinsamen Quadrupel harmonischer Pole $M_1$, $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ — für $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ als die Bilder der Richtungen der Axen des Originalsystems — und ihre Durchdringung, mit den Scheiteln der doppeltprojicierenden Kegel in $M_1$, $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ und den entsprechenden Ebenen der Doppelcurven der Developpabeln $X_1 Y_1 Z_1$, $Y_1 Z_1 M_1$, $Z_1 M_1 X_1$, $M_1 X_1 Y_1$. Im Einzelnen treten an Stelle der zu $XOY$ parallelen und zum Centrum $M$ symmetrischen Hilfsebenen Ebenenpaare des Büschels aus $X_1$, $Y_1$, welche zu den Ebenen $X_1 Y_1 Z_1$ und $X_1 Y_1 M_1$ harmonisch conjugiert sind; die zweimal vier Schnittpunkte in denselben

liegen in Paaren je viermal auf einerlei Erzeugenden der Kegel von den Scheiteln $Z_1$ und $M_1$ und die zugehörigen Tangenten der Durchdringungscurve schneiden sich in entsprechenden Paaren je viermal in Punkten der Ebenen $X_1 Y_1 M_1$ und $X_1 Y_1 Z_1$; etc.

Die Durchdringungscurve von zwei Flächen zweiter Ordnung ist also identisch mit der Durchdringungscurve von zwei Kegeln zweiter Ordnung; es lassen sich im Allgemeinen vier solche Kegel durch diese Durchdringungscurve legen. (Vergl. § 86.)

1) Nach den Entwickelungen des Textes und mit Bezug auf §§ 83 f. hat die Durchdringungscurve von zwei Flächen zweiter Ordnung im Allgemeinen die Charactere $m = 4$, $y = 8$, $r = 8$ (§ 83.; 11.) und muss also nach den Anmerk. der §§ 83. u. 84. auch deshalb identisch sein mit der dort studierten Durchdringungscurve von zwei Kegelflächen zweiten Grades.

2) Wenn beide Flächen sich in einem Punkte berühren, so ist dieser ein Doppelpunkt der Durchdringungscurve und ein Punkt der Doppelcurve ihrer Developpabeln. Die Charactere der Durchdringung sind die in § 83.; *11. unter a) gegebenen. Die Fläche zweiter Ordnung, welche je ein Punkt des Raumes mit dieser Curve bestimmt, ist eine Regelfläche — die beiden erzeugenden und einen dritten doppelt umschriebenen Kegel zweiten Grades (vergl. §§ 81., 85.) eingeschlossen. Die gemeinsame Berührungsebene aller dieser Flächen im Doppelpunkt schneidet dieselben in Paaren erzeugender Geraden, welche eine Involution bilden, deren Doppelstrahlen die Tangenten der Curve im Doppelpunkt sind.

3) Eine Fläche zweiten Grades und ein Kegel zweiten Grades, dessen Spitze in jener liegt und der von der entsprechenden Tangentialebene der Fläche zugleich berührt wird, schneiden einander in einer Raumcurve vierter Ordnung, die einen Rückkehrpunkt in jenem Punkte hat. Ihre Charactere sind die unter c) am vorher angeführten Orte gegebenen. (Vergl. § 85.)

4) Die Raumcurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt

bestimmt mit jedem Punkte des Raumes eine Regelfläche zweiten Grades. Die ihnen allen gemeinsame Berührungsebene im Rückkehrpunkt $M^*$ (vergl. Fig. 165.) schneidet diese Flächen in Paaren von geraden Erzeugenden, die mit den Berührungserzeugenden der Kegel $M^* M S_1$ und $M^* S_1^*$ harmonische Gruppen bilden — oder diese sind die Doppelstrahlen der Involution von jenen. Die stationäre Ebene schneidet sie in einem Büschel von Kegelschnitten, die sich im entsprechenden Punkte vierpunktig osculiren.

5) Die Durchdringungscurve von zwei Flächen zweiter Ordnung bestimmt mit jedem Punkte $P$ des Raumes eine Fläche zweiter Ordnung, welche sie ganz enthält, — denn alle die Kegelschnitte der besagten Fläche mit den Ebenen des Bündels aus $P$ sind linear bestimmt, nämlich durch $P$ und die vier Punkte der Durchdringungscurve in der betrachteten Ebene. Durch eine solche Curve gehen also unendlich viele Flächen zweiter Ordnung, deren Gesammtheit als ein Flächenbüschel zweiter Ordnung bezeichnet wird.

6) Eine Raumcurve dritter Ordnung und eine sie zweimal schneidende Gerade bestimmen mit jedem Punkte des Raumes eine Fläche zweiter Ordnung, welche beide ganz enthält. Zwei Flächen dieses Büschels sind Kegelflächen, alle übrigen Regelflächen zweiten Grades. (Vergl. § 81.) Wie modificiert sich diess für den Fall, dass die Gerade die Raumcurve berührt?

7) Von einem Punkte $P$ des Raumes aus gehen zwei Gerade, welche die Durchdringungscurve zweier Flächen zweiter Ordnung je zweimal schneiden — nämlich die beiden Erzeugenden der Fläche zweiter Ordnung aus $P$, welche von der Durchdringungscurve bestimmt ist. Also ist $h = 2$. (Vergl. § 82., c.; § 83.; *11.) Man sieht aber, dass die Doppelpunkte des Bildes einer solchen Curve auch nicht reell sein können, und ferner, dass nicht einer von ihnen allen reell sein kann; sie sind reell, wenn die durch das Projectionscentrum

nach der Curve gehende Fläche zweiter Ordnung eine Regelfläche ist. (Vergl. Fig. 156. und Tafel III.)

8) Die Polarebenen von $P$ in beiden Flächen zweiter Ordnung schneiden sich in einer Geraden $p$, welche mit $P$ eine Ebene bestimmt, die die Durchdringungscurve in vier Punkten so durchschneidet, dass dieselben zweimal in Paaren auf Geraden aus $P$ liegen.

9) Die Polarebenen eines Punktes $P$ in Bezug auf alle Flächen eines Flächenbüschels zweiter Ordnung bilden ein Ebenenbüschel, d. h. sie schneiden sich in einer Geraden $p$.

10) Die Polarlinien einer Geraden $P_1 P_2$ in Bezug auf alle Flächen eines Büschels zweiter Ordnung bilden die eine Regelschaar eines einfachen Hyperboloids — denn sie liegen in den entsprechenden Paaren der Ebenen der zwei projectivischen Ebenenbüschel von den Scheitelkanten $p_1$ und $p_2$ (nach 9.), der Polarebenen von $P_1$ und $P_2$.

11) Die Pole einer Ebene $P_1 P_2 P_3$ in Bezug auf alle Flächen eines Büschels zweiter Ordnung bilden eine Raumcurve dritter Ordnung — denn sie liegen in den Ternen der entsprechenden Ebenen von drei projectivischen Ebenenbüscheln von den Scheitelkanten $p_1$, $p_2$, $p_3$; oder sie bilden die Durchdringungscurve von zwei einfachen Hyperboloiden mit einer gemeinsamen Erzeugenden, z. B. $p_2$, wenn die von den Büscheln um $p_1, p_2$; $p_2, p_3$ erzeugten gewählt sind. (Vergl. § 99.)

12) Wenn von den Punkten des gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole zweier Flächen zweiter Ordnung drei bekannt sind, so findet man den vierten als den gemeinsamen Pol ihrer Ebene in beiden Flächen.

13) Wenn von den Punkten des gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole zweier Flächen zweiter Ordnung zwei bekannt sind, so liegen die beiden andern in der Polare ihrer Verbindungslinie für beide Flächen und sind das gemeinsame Paar der Involutionen harmonischer Pole, welche die Flächen in dieser Ge-

raden bestimmen. Sie sind also entweder beide reell oder beide nicht reell. (§ 86.)

14) Wenn von den Punkten des gemeinsamen Quadrupels einer bekannt ist, so liegen die drei andern in der gemeinschaftlichen Polarebene desselben in beiden Flächen und bilden das gemeinsame Tripel harmonischer Pole (§ 32.) für die beiden Kegelschnitte, welche diese mit den beiden Flächen gemein hat.

15) Man erläutere die Methode der Construction der Axen einer Fläche zweiter Ordnung in § 97. als einen Specialfall der vorigen allgemeinen Construction. (Vergl. § 95.; 12.)

16) Man construiert das gemeinsame Quadrupel harmonischer Pole für zwei Flächen zweiter Ordnung, indem man für zwei willkürlich gewählte Ebenen — die eine kann als die unendlich ferne Ebene gedacht werden — die cubischen Raumcurven ihrer Pole (11) in Bezug auf die Flächen des Büschels bestimmt; da dieselben auf dem Hyperboloid liegen, welches nach (10) der Durchschnittslinie beider Ebenen entspricht, so schneiden sie einander und die Schnittpunkte derselben sind die Punkte des gemeinsamen Quadrupels. Man beweist auch leicht direct, dass solche zwei cubische Raumcurven nur vier Punkte gemein haben können. Die cubische Raumcurve, welche der unendlich fernen Ebene entspricht, ist die Ortscurve der Centra der Flächen des Büschels — in welcher die Punkte des Quadrupels als Centra der durch die Curve gehenden Kegelflächen zweiten Grades liegen müssen. Man bedarf zur Construction ausser den beiden gegebenen noch eine Fläche des Büschels, die man durch drei unendlich ferne Punkte und einen Punkt im endlichen Raume gehen lässt, welche dann zugleich als Bestimmungspunkte der beiden Ebenen dienen werden.

17) Wenn die gegebenen Flächen zweiter Ordnung sich auf Curven in einer Ebene reducieren — durch Reduction der Längen der zu dieser Ebene conjugierten Durchmesser auf Null — so ergiebt sich aus der vorigen

Construction diejenige, welche zur Bestimmung des gemeinsamen Tripels harmonischer Pole der zwei Kegelschnitte dient.

18) Wie liegt das gemeinsame Quadrupel harmonischer Pole in den besonderen Fällen der Durchdringung mit Doppelpunkt unter 2) und mit Rückkehrpunkt unter 3)? (Vergl. § 85.)

19) Ein Flächenbüschel zweiter Ordnung wird von einer Ebene in einem Curvenbüschel zweiter Ordnung geschnitten, d. h. in einem Büschel von Kegelschnitten, welche durch dieselben vier Punkte gehen; im Allgemeinen sind diese von einander verschieden.

20) Enthielt die Ebene eine Tangente der Curve vierter Ordnung, welche allen Flächen des Büschels gemeinsam ist, so wird das Büschel von solchen Kegelschnitten gebildet, die sich in einem Punkte berühren und in zwei andern Punkten schneiden.

21) Enthält die Schnittebene zwei Tangenten der Curve vierter Ordnung oder gehört sie als Tangentenebene zu einem ihrer doppeltprojicierenden Kegel, so besteht das Büschel aus Kegelschnitten, die einander in zwei festen Punkten berühren.

22) Ist die Schnittebene eine Schmiegungsebene der Raumcurve vierter Ordnung, so haben die Kegelschnitte des in ihr liegenden Büschels im entsprechenden Punkte der Curve eine Osculation und schneiden sich überdiess in einem andern festen Punkte.

23) Die stationären Ebenen der Raumcurve vierter Ordnung schneiden das zugehörige Flächenbüschel in Kegelschnitten, die im entsprechenden Punkte derselben eine vierpunktige Osculation haben.

24) Die gemeinsame Tangentialebene der beiden Kegel zweiten Grades, als deren Durchdringung in § 85. die Curve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt entstand, schneidet das entsprechende Flächenbüschel zweiter Ordnung in einem Kegelschnittbüschel aus Paaren gerader Linien durch den Rückkehrpunkt, d. h. in einer Involution von Strahlen (4), welche die entsprechenden Kegelerzeugenden zu Doppelstrah-

len hat. Alle Flächen dieses Büschels sind somit Regelflächen.

25) Man weise die vorhergehenden Arten der Kegelschnittbüschel als Schnitte des Flächenbüschels zweiter Ordnung, welches durch die Curve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt bestimmt ist, mit Ebenen nach, die die eine der Spitzen oder beide Spitzen der erzeugenden Kegel enthalten.

26) Man erläutere die stationäre Berührung zweier Flächen zweiter Ordnung auf Grund des Vorigen in der Art, dass man die eine von ihnen und den stationären Punkt in derselben als gegeben voraussetzt und die Bestimmungselemente der zweiten bezeichnet.

101. Der Vorgang der Untersuchung der letzten §§ ist auch für das Problem der Construction der gemeinsam umschriebenen Developpabeln von zwei Flächen zweiten Grades vollkommen anwendbar. Wir ziehen es aber vor, die Methode — das Princip der Reciprocität (man vergl. § 23. das Princip der Dualität, zu welchem sich das der Reciprocität als ein Specialfall von besonders anschaulicher Verknüpfung stellt) — darzulegen, durch welche seine allgemeine Lösung auf die bereits gewonnenen des Problems der Durchdringungscurve zurückgeführt wird. In Bezug auf eine feste Fläche zweiter Ordnung F — denken wir z. B. eine Kugel als solche — entspricht jedem Punkte des Raumes eine Polarebene, jeder Ebene des Raumes ein Pol; den Punkten einer Ebene entsprechen die Ebenen durch einen Punkt, etc. (Vergl. § 94.) Den auf einander folgenden Punkten einer ebenen Curve entsprechen als Polarebenen die auf einander folgenden Tangentialebenen einer Kegelfläche, deren Spitze der Pol der Curvenebene ist, und umgekehrt, den Tangentialebenen eines Kegels die Curve ihrer Pole in der Polarebene der Spitze; den Tangenten der ebenen Curve die Erzeugenden der Kegelfläche und umgekehrt.

Der stetigen Folge der Punkte einer Raumcurve entspricht die stetige Folge ihrer Polarebenen, die eine developpable Fläche bilden; der Folge der Tangenten von jener entspricht die der Erzeugenden von dieser, d. h. den Ver-

bindungslinien der Nachbarpunkte die Schnittlinien der Nachbarebenen. Der Reihe der Schmiegungsebenen der Curve entspricht die Reihe der Punkte der Rückkehrkante der developpabeln Fläche, d. i. den Verbindungsebenen von je drei Nachbarpunkten die Schnittpunkte von je drei Nachbarebenen.

Einer krummen Fläche entspricht eine andere krumme Fläche; die Polarebenen der Punkte der ersten sind die Tangentialebenen, die Pole der Tangentialebenen der ersten die Punkte der zweiten; einem ebenen Schnitt der ersten entspricht der Berührungskegel der zweiten aus dem Pol der Ebene und umgekehrt dem Letztern der erste in der Polarebene der Spitze. Speciell der Fläche zweiter Ordnung und Classe entspricht wieder eine Fläche zweiter Classe und Ordnung.

Sind ein Punkt und eine Ebene in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades Pol und Polarebene, so entsprechen ihnen eine Ebene und ein Punkt, die in Bezug auf die entsprechende Fläche zweiten Grades Polarebene und Pol sind.

Zweien Flächen zweiten Grades $F_1$, $F_2$ entsprechen also zwei andere Flächen zweiten Grades $F_1^*$, $F_2^*$, aber den Punkten der einen die Tangentialebenen der andern. Der Curve der gemeinsamen Punkte der ersten Flächen entspricht die Developpable der gemeinsamen Tangentialebenen der Letzteren. Sind ein Punkt und eine Ebene in Bezug auf beide erste Flächen zugleich Pol und Polarebene, so entsprechen ihnen eine Ebene und ein Punkt, die in Bezug auf beide letztere Flächen zugleich Polarebene und Pol sind; also entspricht dem gemeinsamen Quadrupel harmonischer Pole der erstern das gemeinsame Quadrupel harmonischer Polarebenen der Letztern und umgekehrt.

Darum ist die Ordnung $m$ der Durchdringungscurve der Flächen $F$ gleich der Classe $n^*$ der gemeinsam umschriebenen Developpabeln der Flächen $F^*$;

$$m = n^* = 4.$$

Von den Tangenten der Durchdringungscurve der Flächen $F$ haben acht mit einer beliebigen Geraden einen Punkt gemein; also liegen von den Erzeugenden der gemeinsam umschriebenen Developpabeln der Flächen $F^*$ acht mit einer beliebigen Geraden in je einer Ebene

$$r = r^* = 8.$$

Von den Schmiegungsebenen der Durchdringungscurve der F gehen zwölf durch einen Punkt, daher liegen von den Punkten der Rückkehrkante der Developpabeln der F* zwölf in einer Ebene $n = m^* = 12$.

Durch einen Punkt gehen zwei Gerade, die mit der gemeinsamen Curve der F je zwei Punkte gemein haben; also liegen in einer Ebene zwei Gerade, die mit der gemeinsamen Developpabeln der F* je zwei Ebenen gemein haben

$$g = h^* = 38.$$

Die Punkte der gemeinsamen Curve der F liegen in Paaren auf den Erzeugenden von vier Kegeln zweiten Grades, deren Spitzen die vier Punkte des gemeinsamen Quadrupels harmonischer Pole der Flächen sind.

Die zugehörigen Tangenten der gemeinsamen Curve der F schneiden sich in Paaren in den Punkten von vier Curven vierter Ordnung, deren Ebenen die vier durch das Quadrupel bestimmten Ebenen sind

$$y = 4 \cdot 2, \qquad x = 4 \cdot 4.$$

Den Durchschnittspunkten der gemeinsamen Curve mit diesen vier Ebenen gehören die 16 stationären Ebenen an, wo vier auf einander folgende Punkte der Curve in einer Ebene liegen. Stationäre Punkte hat die Curve im Allgemeinen nicht

$$\alpha = 16, \qquad \beta = 0.$$

Durch die gemeinsame Curve von zwei Flächen zweiten Grades gehen unendlich viele an-

Die Ebenen der gemeinsamen Developpabeln der F* gehen in Paaren durch die Tangenten von vier Curven zweiten Grades, deren Ebenen die vier Ebenen des gemeinsamen Quadrupels harmonischer Polarebenen der Flächen sind.

Die zugehörigen Erzeugenden der gemeinsamen Developpabeln der F* liegen in Paaren in den Ebenen von vier Kegeln vierter Classe, deren Spitzen die vier durch das Quadrupel bestimmten Punkte sind

$$x^* = 4 \cdot 2, \qquad y^* = 4 \cdot 4.$$

Den Ebenen der gemeinsamen Developpabeln, die durch diese Punkte gehen, gehören die 16 stationären Punkte an, wo vier auf einander folgende Ebenen der Developpabeln durch einen Punkt gehen. Stationäre Ebenen hat die Developpable im Allgemeinen nicht

$$\beta^* = 16, \qquad \alpha^* = 0.$$

Die gemeinsame Developpable von zwei Flächen zweiten Grades umhüllt unendlich

dere Flächen zweiter Ordnung (Flächenbüschel 2. Grades), nämlich durch jeden Punkt im Raum eine, weil ihre Schnitte mit den durch ihn gehenden Ebenen bestimmt sind; vier von ihnen sind Kegel, zwei derselben bestimmen die Curve (nach § 86.).

viele andere Flächen zweiten Grades (Flächenschaar 2. Grades), nämlich für jede Ebene im Raum eine, weil ihre Berührungskegel mit den in dieser liegenden Punkten bestimmt sind; vier von ihnen sind Kegelschnitte; zwei derselben bestimmen die Developpable. (§ 84.; 11. § 85.; 7.)

Für die Construction beider Probleme ergiebt sich speciell das Folgende:

Angenommen das gemeinsame Quadrupel der Flächen sei bekannt (§ 100.; 16.), $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ mögen seine Punkte sein, $\mathbf{M}_1, \cdots \mathbf{M}_4$ die gegenüberliegenden Flächen,

so schneidet ein Ebenenpaar durch die Kante $M_1, M_2$ z. B., welches mit den beiden durch sie gehenden Flächen des Quadrupels $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_4$ harmonisch conjugiert ist, die Flächen in Kegelschnitten, welche durch ihre respectiven Schnittpunkte acht Punkte der Durchdringungscurve liefern, die viermal in Paaren auf Geraden aus den vier Punkten des Quadrupels liegen und für welche die Tangenten der Durchdringungscurve sich viermal in Paaren in den vier Ebenen desselben begegnen.

so bestimmt ein Punktepaar in der Kante $\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2$ z. B., welches mit den beiden in ihr liegenden Ecken des Quadrupels $M_3$, $M_4$ harmonisch conjugiert ist, mit den Flächen Berührungskegel, welche durch ihre respectiven gemeinsamen Tangentialebenen acht Ebenen der Developpabeln liefern, die viermal in Paaren sich in Geraden auf den vier Ebenen des Quadrupels schneiden und für die die Erzeugenden der Developpabeln viermal in Paaren auf Ebenen aus den Punkten des Quadrupels liegen.

Die acht Tangenten in den Punkten einer Gruppe (vergl. § 86.; 13., 14.) bestimmen in jeder Ebene als ihre Durchstosspunkte acht Punkte eines Kegelschnitts und mit jedem Punkte acht Tangentialebenen

Die acht Erzeugenden in den Ebenen einer Gruppe bestimmen mit jedem Punkte acht Tangentialebenen einer Kegelfläche zweiten Grades und mit jeder Ebene acht Punkte eines Kegelschnitts; sie sind somit

einer Kegelfläche zweiten Grades; sie sind somit acht Erzeugende eines einfachen Hyperboloids, welchem die Curve aufgeschrieben ist. (§ 92.; 2.)

acht Erzeugende eines einfachen Hyperboloids, welchem die developpabele Fläche umschrieben ist.

In Bezug auf die constructive Bedeutung des Problems von der gemeinsamen Developpabeln bemerken wir noch, dass wenn eine der betrachteten Flächen leuchtend und die andere das beleuchtete Object ist, die Berührungscurven der Developpabeln mit der letztern Fläche die Grenzlinien des Halbschattens und des Vollschattens auf derselben sind, während die Mäntel der developpabeln Fläche selbst auf der der leuchtenden Fläche abgewendeten Seite der beleuchteten die Räume begrenzen, welche man als Halbschatten- und Kernschattenräume bezeichnen kann.

1) Man erläutere die Construction der gemeinsamen umschriebenen Developpabeln von zwei Kegelschnitten oder von zwei ebenen Curven überhaupt als dualistisch entsprechend oder reciprok zur Construction der gemeinsamen Curve von zwei Kegelflächen.

2) Man erörtere die constructiven Bedingungen für das Auftreten von Doppelebenen der so entstehenden Developpabeln; insbesondere von stationären Ebenen im Vergleich zu § 85. (Vergl. § 104.; 7., 8.)

3) Man zeige aus der Construction, dass in den Ebenen der Doppelkegelschnitte der Developpabeln je vier Erzeugende derselben liegen und ebenso, dass durch die Spitzen der doppelt berührenden Kegel zweiten Grades der Durchdringungscurve je vier Tangenten derselben gehen. Diess ist in Uebereinstimmung einerseits mit $r^* = 8$, anderseits mit $r = 8$.

4) Eine beliebige Ebene E des Raumes enthält zwei Gerade, welche mit der gemeinsamen Developpabeln von zwei Flächen zweiter Ordnung je zwei Schmiegungsebenen gemein haben — nämlich die beiden in E gelegenen Erzeugenden derjenigen Fläche zweiter Ordnung, welche E berührt und der Developpabeln ein-

geschrieben ist. Man sieht, dass die Doppeltangenten des ebenen Schnittes der Developpabeln auch nicht reell sein können.

5) Wie bedingt man, dass die einer solchen Developpabeln eingeschriebene Fläche zweiter Ordnung eine Regelfläche wird? Man lässt die sie bestimmende Ebene durch die Schnittlinie von zwei Ebenen der Developpabeln gehen. (Vergl. § 100.; 7.)

6) Die Pole $E$ einer Ebene **E** in Bezug auf zwei gegebene Flächen zweiter Ordnung liegen in einer Geraden $e$, welche mit **E** einen Punkt bestimmt, durch den an ihre gemeinschaftliche Developpable vier Ebenen gehen, die sich zweimal in Paaren auf Geraden in **E** durchschneiden.

7) Man entwickele die Erzeugung der Flächen zweiten Grades, welche der in § 98.; 12. gegebenen reciprok ist.

8) Man bilde zu § 100.; 9—16. die entsprechenden Sätze und Constructionen nach dem Princip der Reciprocität.

9) Man erläutere die Construction der gemeinsam umschriebenen developpabeln Fläche für zwei Kegelschnitte $K_1$, $K_2$ in verschiedenen Ebenen $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ und die Bestimmung der Ebenen der beiden übrigen Kegelschnitte auf derselben.

10) Man characterisiere die gemeinschaftlich umschriebene Developpable von zwei Flächen zweiten Grades für den Fall, dass sich diese in einem Punkte berühren und erläutern, wie dieselbe durch zwei Kegelschnitte in doppelter Weise erzeugt werden kann. (Vergl. § 100.; 2., § 85. und § 81.)

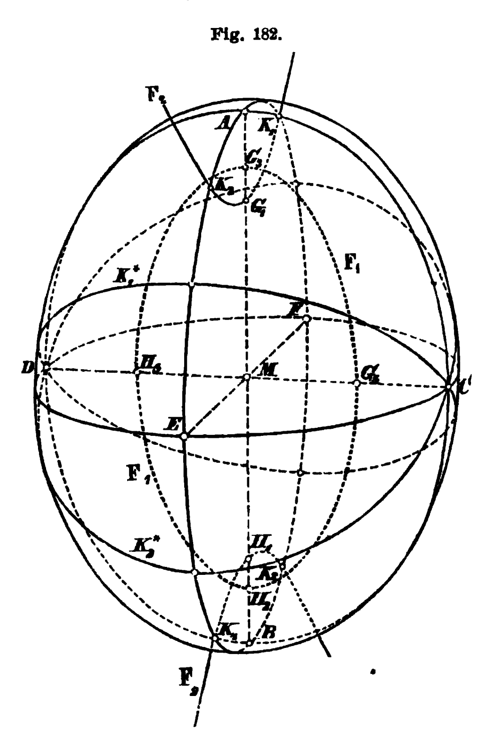
11) Wenn besitzt die gemeinsam umschriebene Developpable von zwei Flächen zweiten Grades eine stationäre Ebene und wie kann eine solche als Grenzfläche des Halbschattens und Kernschattens erzeugt werden, den eine leuchtende Kegelschnittfläche mit einem andern Kegelschnitt bildet? (Vergl. § 85.)

12) Die Developpable der Raumcurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt ist die gemeinsam umschriebene von unendlich vielen Flächen zweiten Grades, die in dem

der stationären Ebene entsprechenden Curvenpunkte nach jener in stationärer Berührung sind — so wie die Curve selbst die gemeinsam eingeschriebene von unendlich vielen Flächen zweiten Grades, die im stationären Punkt in stationärer Berührung sind.

13) Wenn für eine developpable Fläche vierter Classe die eine der Doppelcurven ein gegebener Kegelschnitt $K_1$ und die andere $K_2$ ein Kreis in der unendlich fernen

Fig. 182.




Ebene ist, der die Richtung der Normalen zur Ebene von $K_1$ zum Mittelpunkt hat, so sind alle Erzeugenden und Tangentialebenen der Developpabeln gegen jene Normale und gegen die Ebene des Kegelschnitts $K_1$ von gleicher Neigung. Ist die letztere horizontal, so kann man die fragliche Developpable als eine solche von gleichem Falle durch einen horizontalen Kegelschnitt bezeichnen, sowie die de-

veloppable Schraubenfläche die Developpable von gleichem Falle durch eine horizontale Kreis-Evolvente ist. Man zeige, dass die beiden andern Kegelschnitte auf der Developpabeln in denjenigen Ebenen liegen, welche durch die Axen von $K_1$ normal zu seiner Ebene gehen und bestimme sie.

14) Man bestimme die Lage der beiden Kegelschnittebenen für die Developpable gleichen Fallens durch einen Kegelschnitt in schräger Ebene — der Mittelpunkt des unendlich fernen Kreises ist die Richtung der Verticalen.

15) Man zeige, dass für den Doppelkegelschnitt $K_1$ als Hyperbel die Developpable von gleichem Fallen vier reelle Erzeugende in der unendlich fernen Ebene hat.

16) Die Erzeugenden der Developpabeln werden durch die drei im endlichen Raume gelegenen Doppelkegelschnitte derselben in gleichem Verhältniss getheilt.

17) Die einer solchen Developpabeln eingeschriebenen Flächen zweiten Grades sind concentrisch.

18) Ist der unendlich ferne nicht reelle Kreis die eine der Doppelcurven, so sind alle die der developpabeln Fläche eingeschriebenen Flächen zweiter Ordnung concentrisch und haben dieselben Hauptebenen; die Doppelcurven liegen in diesen und zwei derselben sind reell.

Weil nach 9) § 100. die Pole einer Ebene in Bezug auf alle der Developpabeln eingeschriebenen Flächen zweiter Ordnung eine Gerade bilden, und nach 12) § 94. eine Ebene und eine Gerade oder zwei Gerade conjugiert sind in Bezug auf den nicht reellen unendlich fernen Kreis, wenn sie normal zu einander sind, so liegen die Pole einer Ebene in Bezug auf die Flächen der Schaar auf einer zur Ebene normalen Geraden.

In Folge dessen haben die Hauptschnitte aller dieser Flächen dieselben Brennpunkte (vergl. § 35.); man nennt sie confocale Flächen zweiten Grades und bezeichnet die Doppelkegelschnitte als ihre Focalcurven. Die Figur 182. zeigt die Focalcur-

von $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ des Ellipsoids von den Axen $AB$, $CD$, $EF$ — diess ist auch ihre Ordnung nach der Grösse. Es sind $G_1$, $H_1$ die Brennpunkte des Hauptschnittes $ABCD$, $G_2$, $H_2$ die von $ABEF$ und $G_3$, $H_3$ die von $CDEF$; die Focalellipse $\mathbf{F}_1$ in der Ebene $ABCD$ geht durch $G_2 H_2 G_3 H_3$ und $G_1$, $H_1$ sind ihre Brennpunkte; die Focalhyperbel $\mathbf{F}_2$ in der Ebene $ABEF$ geht durch $G_1$, $H_1$ und hat die Brennpunkte $G_2$, $H_2$; sie dringt in den Punktepaaren $K_1$, $K_2$, den Kreispunkten, aus der Fläche heraus. Die entsprechenden Diametralkreisschnitte sind $K_1{}^*$, $K_2{}^*$.

19) Durch jeden Punkt im Raume gehen drei Flächen von der Schaar der Confocalen, die zu einander rechtwinklig sind; ihre Tangentialebenen in diesem Punkte sind die drei zu einander rechtwinkligen Ebenen, welche zugleich in Bezug auf die gegebene Fläche zweiter Ordnung oder die gegebene Doppelcurve der Developpabeln einander conjugiert sind.

20) Die Focalcurven bilden den Ort der Scheitel derjenigen Rotationskegel, welche den Flächen der Schaar umschrieben werden können; sie durchschneiden daher die Flächen normal in ihren Nabelpunkten, wo der Rotationskegel sich in die Tangentialebene reduciert, und jede geht durch die Brennpunkte der andern. (Vergl. § 70.; 7.)

21) Das Centrum der Collineation zwischen einer Kugel und einer Fläche zweiter Ordnung liegt auf einer Focalcurve der Letzteren, der nach dem Centrum der Kugel gehende Collineationsstrahl ist die bezügliche Tangente von jener (vergl. § 98.); in der Figur dieser Collineation (Fig. 176., 177.) ist daher die eine der Focalcurven durch fünf Punkte und ihre Tangenten bestimmt.

22) Die Durchdringungscurve von zwei confocalen Flächen zweiten Grades ist eine Raumcurve vierter Ordnung von der Eigenschaft, dass die Normalen der einen Fläche in den auf einander folgenden Punkten der Curve sich schneiden, weil sie in der bezüglichen Tangentialebene der andern Fläche liegen; man nennt

sie die Krümmungslinien der Fläche. (Vergl. § 78.; 5., 6.)

23) Durch jeden Punkt einer Fläche zweiter Ordnung gehen zwei Krümmungslinien und diese sind rechtwinklig zu einander.

24) Die orthogonalen Projectionen der Krümmungslinien einer Fläche zweiter Ordnung auf ihre Hauptebenen sind Kegelschnitte, deren Axen mit denen dieser Hauptschnitte zusammenfallen; etc.

25) Die Grenzen des Halbschattens und Vollschattens an einer Fläche zweiten Grades, welche durch eine andre Fläche zweiten Grades beleuchtet wird, sind Raumcurven vierter Ordnung.

26) Man bilde die Reciproken zu den in § 101.; 19—25. gegebenen Sätzen und Aufgaben.

102. Die Flächen zweiten Grades erläutern einfach und vollständig die doppelte Entstehungsweise einer krummen Fläche als Ort von Punkten, sagen wir von aufgeschriebenen Curven, und als Enveloppe von Ebenen, sagen wir von umschriebenen Developpabeln. Sie ermitteln zugleich den Beweis, dass diese beiden Anschauungsweisen der krummen Flächen als doppelt unendliche Reihen von Punkten, und als doppelt unendliche Schaaren von Ebenen — im Gegensatz zu den Curven und developpabeln Flächen als einfach unendlichen Reihen und Schaaren — für alle Flächen gültig sind und liefern dabei ein für die darstellende Geometrie wichtiges Theorem über dieselben. Ist $P$ ein Punkt der krummen Fläche $\mathbf{F}$ und $\mathbf{P}$ die zugehörige Tangentialebene derselben und zieht man in $\mathbf{P}$ durch $P$ nach drei verschiedenen unendlich nahen Punkten $P_1$, $P_2$, $P_3$ die Geraden $PP_1$, $PP_2$, $PP_3$, welche also Tangenten von $\mathbf{F}$ in $P$ sind, so denke man durch $P$, $P_1$, $P_2$ eine Fläche zweiten Grades gelegt, die somit $\mathbf{F}$ in $P$ berührt und also auch $P_3$ enthält. Legt man dann durch die Geraden $PP_1$, $PP_2$, $PP_3$ — etwa nach einem beliebigen Punkte des Raumes drei Ebenen, so schneiden diese die Fläche in drei Curven, deren zu $P_1$, $P_2$, $P_3$ respective benachbarte Punkte wir $P_1^*$, $P_2^*$, $P_3^*$ nennen wollen und die vorerwähnte Fläche zweiter Ordnung $\mathbf{F}_2$ kann auch durch diese drei Punkte ge-

führt werden. Sie hat dann die Eigenschaft, dass alle ihre ebenen Schnitte durch $P$ die entsprechenden Schnitte der Fläche **F** in diesem Punkte $P$ dreipunktig berühren oder osculieren — denn der Punkt $P$ muss nach den gegebenen Bedingungen in ihrer Schnittcurve mit der Tangentialebene ein dreifacher Punkt sein. Man sagt, dass die Fläche zweiten Grades $\mathbf{F}_2$ selbst die Fläche **F** in $P$ osculiere und sieht aus der Betrachtung, dass in jedem Punkte einer krummen Fläche unzählig viele sie osculierende Flächen zweiten Grades bestimmt werden können.

Immer aber haben in Folge der Construction beide Flächen **F** und $\mathbf{F}_2$ nicht nur in $P$, sondern auch in allen dem Punkte $P$ unendlich nahen Punkten $P_1, P_2 \cdots$ einerlei Tangentialebenen und die Beziehungen der Tangentialebenen und Tangenten der Flächen zweiten Grades um einen Punkt herum stimmen sonach mit denen der Tangentialebenen und Tangenten der Fläche **F** in den zu $P$ unendlich nahe benachbarten Punkten vollständig überein. Also haben die Inflexions- oder Haupttangenten der Fläche **F** in $P$ je drei Punkte mit der besagten Fläche $\mathbf{F}_2$ gemein, d. h. sie sind ihre Erzeugenden für den Punkt $P$. Und so wie die Tangenten der Fläche $\mathbf{F}_2$ in $P$ paarweis conjugiert sind (§ 94.; 13.), so dass die Tangentialebenen aus den nächstfolgenden Punkten der einen an die Fläche durch die andere hindurch gehen, so sind es auch die Tangenten der krummen Fläche **F**; diese Paare bilden eine Involution, welche die Inflexionstangenten von **F** oder die Erzeugenden der Fläche zweiten Grades $\mathbf{F}_2$ in $P$ zu ihren Doppelstrahlen hat.

Legen wir parallel der Tangentialebene **P** in $P$ und in unendlich kleiner Entfernung von ihr eine die Eläche **F** und $\mathbf{F}_2$ schneidende Ebene $\mathbf{P}^*$, so enthält dieselbe die der Tangentialebene unendlich nahen Punkte $P^*$ und da dieselben der Fläche **F** und der osculierenden Fläche $\mathbf{F}_2$ gemeinsam sind, so schneidet sie $\mathbf{F}_2$ und zugleich **F** in einem Kegelschnitt; d. h. der der Tangentialebene einer krummen Fläche unendlich nahe und ihr parallele ebene Schnitt derselben ist als ein unendlich kleiner Kegelschnitt $k$ anzusehen. Ist dann $M$ der Mittelpunkt der Fläche $\mathbf{F}_2$, so

liegt der Mittelpunkt dieses Kegelschnitts im Durchschnitt des der Ebene **P** conjugierten Durchmessers $MP$ mit der Schnittebene; weil alle Parallelschnitte von $\mathbf{F}_2$ zu einander ähnlich und ähnlich gelegen sind, so bilden die conjugierten Durchmesser von $K$ eine Involution, welche der Involution der conjugierten Tangenten der Flächen $\mathbf{F}_2$ und **F** in $P$ gleich ist und deren Doppelstrahlen den ihrigen parallel sind. Der Kegelschnitt $K$ ist also eine Ellipse, so lange $P$ ein elliptischer Punkt und er ist eine Hyperbel, sobald $P$ ein hyperbolischer Punkt ist; dann geben seine Asymptoten die Lage der Haupttangenten in $P$. Er ist endlich eine Parabel, wenn $P$ ein parabolischer Punkt der Fläche ist und die Axenrichtung giebt dann die Haupttangente in $P$. Deshalb hat man den unendlich kleinen Kegelschnitt $K$ die Indicatrix der Fläche **F** im Punkte $P$ genannt.

1) Ist der Punkt $P$ ein parabolischer Punkt in der Fläche **F**, so dass seine Inflexionstangenten zusammen fallen, so ist die osculierende Fläche zweiten Grades $\mathbf{F}_2$ nothwendig ein Kegel. Ist dann $P_i$ der zu $P$ nächste Punkt in der Inflexionstangente oder der Erzeugenden des Kegels, so berührt die Tangentialebene in $P$ den Kegel und folglich auch die Fläche **F** noch in $P_i$; d. h. die Tangentialebene der krummen Fläche in einem parabolischen Punkt berührt die Fläche in zwei auf einander folgenden Punkten und wird daher eine stationäre Tangentialebene derselben genannt.
2) Ist $P$ ein parabolischer Punkt in der Fläche **F**, so gehen die Tangentialebenen der Fläche in den zu $P$ nach allen Seiten unendlich nahen Punkten derselben durch die Haupttangente in $P$ und bilden somit ein Büschel.
3) Ist $P$ ein Nabelpunkt (Umbilicus) in der osculierenden Fläche $\mathbf{F}_2$, so ist er auch ein solcher in der Fläche **F**; unter den osculierenden Flächen zweiten Grades ist dann eine Kugel.
4) Berühren zwei krumme Flächen **F**, $\mathbf{F}^*$ einander in einem Punkte $P$, d. h. haben sie in diesem Punkte dieselbe Tangentialebene **P**, so giebt es im Allge-

meinen in $P$ ein gemeinsames Paar conjugierter Tangenten derselben. (§ 31.; 13.)

5) Wenn von einem Punkte $M$ im Raum an eine krumme Fläche **F** zwei Tangenten unter unendlich kleinen Winkeln zu einander gelegt werden, die in $P$, $P_1$ dieselbe berühren, so dass $PP_1$ ein Curvenelement auf der Fläche **F** ist, so sind $PP_1$, $PM$ für die in $P$ an **F** osculierende Fläche zweiter Ordnung $\mathbf{F}_2$ und also für die Fläche **F** selbst ein Paar von conjugierten Tangenten uud dieselben bilden daher mit den Inflexions- oder Haupttangenten der Fläche **F** in $P$ eine harmonische Gruppe.

6) Für eine der krummen Fläche **F** nach einer Curve $C$ umschriebene developpable Fläche **D** sind in einem Punkte $P$ von $C$ die Tangente $t$ von $C$, die Erzeugende $e$ von **D** und die Inflexionstangenten von **F** in $P$ zwei Paare eines harmonischen Büschels.

7) Wird der krummen Fläche von einem Punkte $M$ im Raume aus ein Berührungskegel umschrieben, so ist in jedem Punkte $P$ der Berührungscurve derselben mit der Fläche die Tangente der Letzteren conjugiert harmonisch zu der Erzeugenden des Kegels in Bezug auf die Haupttangenten der Fläche oder sie bilden mit irgend zwei Paaren von conjugierten Durchmessern der Indicatrix der Fläche in $P$ eine Involution.

8) Der Kegel der Tangenten von $M$ an eine Fläche **F** wird zugleich umhüllt von den Tangentialebenen der Fläche aus $M$. Die Classe des Berührungskegels ist die Classe der Fläche **F**.

103. a) Wenn nach dem Vorigen jede Fläche ebenso durch aufgeschriebene Curven als Ort wie durch umschriebene Developpable als Enveloppe erzeugt werden kann, so entspringt aus dem Vorhergehenden naturgemäss die Frage nach denjenigen Curven auf einer Fläche, deren Developpable dieselbe Fläche umhüllen oder ihr zugleich umschrieben sind; denn solche hat die Theorie der Flächen zweiten Grades in den Haupttangenten oder Erzeugenden der Fläche hervortreten lassen.

Man sieht, dass die allgemeine Antwort auf die Frage lauten muss: Diese Curven sind diejenigen Raumcurven auf der Fläche, deren Schmiegungsebenen die Fläche berühren. Und daraus lässt sich die Lage dieser Curven auf der Fläche anschaulich bestimmen. Wir sahen in § 87., dass jeder durch eine Haupttangente der Fläche geführte ebene Schnitt derselben diese Gerade zur Inflexionstangente im Berührungspunkt hat, d. i. dass er drei unendlich nahe Punkte mit ihr gemein hat. Denken wir also auf der Fläche eine Curve, welche in jedem ihrer Punkte die eine der entsprechenden Haupttangenten der Fläche berührt, so besitzt dieselbe für jede ihrer Schmiegungsebenen die geforderte Eigenschaft, die Fläche zu berühren.

Geht man also von irgend einem Anfangspunkt in der Fläche aus um ein unendlich kleines Element in der Richtung der einen Haupttangente fort, um am Ende desselben in die Richtung der neuen Haupttangente einlenkend ein neues unendlich kleines Element in dieser zu durchlaufen etc., so erhält man eine Curve der Haupttangenten oder eine asymptotische Curve der Fläche — in der letztern Weise benannt nach ihrer Berührung mit der Asymptote der Indicatrix der Fläche in jedem ihr angehörenden Punkte.

Man sieht, dass durch jeden Punkt der krummen Fläche im Allgemeinen zwei solche Curven gehen, dass also zwei Schaaren solcher Curven auf der Fläche möglich sind; jede dieser Schaaren erzeugt diese Fläche ebensowohl als Ort, wie auch als Enveloppe ihrer Schmiegungsebenen. Man sieht aber auch, dass diese Curven nur für die hyperbolischen Punkte der krummen Flächen reell sind, und dass sich ihre Paare für die parabolischen Punkte derselben in je eine vereinigen. Von den Flächen zweiten Grades haben nur die Regelflächen reelle asymptotische Linien in ihren Erzeugenden, die Kegelflächen zeigen die Vereinigung derselben in eine einzige Schaar.

b) Im Gegensatz dazu haben wir schon bei den developpabeln Flächen (§ 72.) aber nicht nur für diese, sondern allgemein gesehen, dass die geodätischen Linien zwischen beliebigen Punktepaaren einer krummen Fläche dadurch characterisiert sind, dass ihre Schmiegungsebene in jedem

Punkt zur Fläche normal ist, oder die zugehörige Normale der Fläche enthält.

c) Endlich ergiebt sich aus dem Satze des vorigen §, dass für die Axenrichtungen der Indicatrix und nur für diese die Eigenschaft stattfindet, dass die in unendlich nahe benachbarten Punkten der Fläche auf ihr errichteten Normalen sich in einem Punkte schneiden oder in einer Ebene liegen.

Denn die Normalen der Fläche in den Punkten der Indicatrix projicieren sich auf der Ebene derselben nach dem Satz von den conjugierten Tangenten als Normalen der Indicatrix in jenen, während die Normale im betrachteten Punkt ihre Projection im Mittelpunkt der Indicatrix selbst hat; die Letztere kann sonach nur von denjenigen Normalen benachbarter d. h. in der Indicatrix gelegener Punkte geschnitten werden, deren Projectionen durch den Mittelpunkt gehen, was bekanntlich nur für die den Scheitelpunkten des Kegelschnitts entsprechenden der Fall ist.

Wenn man also von einem Punkte der Fläche aus in der einen Axenrichtung der Indicatrix um ein Element fortgeht, um am Ende desselben in die Axenrichtung der neuen entsprechenden Indicatrix einzubiegen etc., so erhält man eine Curve auf der Fläche, welche die Eigenschaft hat, dass die Normalen der Fläche in ihren Punkten eine developpable Fläche bilden.

Man sieht, dass es auf jeder Fläche zwei stets reelle Schaaren von Curven dieser Art giebt, die sich überall rechtwinklig durchschneiden — die Krümmungslinien der Fläche. Die Richtungen der beiden Krümmungslinien in einem Punkte der Fläche halbieren die Winkel, welche die Richtungen der beiden Curven der Haupttangenten in demselben Punkte mit einander bilden.

d) Denken wir sodann alle Normalen einer Fläche in den Punkten derselben, die einem gegebenen Punkte $P$ unendlich nahe benachbart sind, so lässt sich über ihre Vertheilung im Raume Folgendes erkennen: Wir construieren eine die Fläche in $P$ osculierende Fläche zweiten Grades, welche zugleich den Punkt $P$ zum Scheitel hat, so dass die Indicatrix der gegebenen Fläche für $P$ ähnlich und ähnlich gelegen ist zu

dem zur betreffenden Axe der osculierenden Fläche zweiten Grades normalen Hauptschnitt, während ihre Axen die Geraden sind, in welchen die beiden andern Hauptebenen die Ebene der Indicatrix schneiden. Dann sind alle dem Punkte $P$ unendlich nahen Punkte der Fläche in den beiden durch $P$ gehenden Hauptebenen derselben in $P$ selbst projiciert und alle zugehörigen Normalen der Fläche werden die Gerade schneiden, die im Durchschnittspunkt der Normalen des Hauptschnitts in den zu $P$ unendlich nahen Nachbarpunkten desselben d. h. im zugehörigen Krümmungsmittelpunkt $K$ desselben auf seine Ebene projiciert erscheint oder dort zu ihr normal ist.

Nennen wir also die beiden durch die Flächennormale $n$ in $P$ in der Richtung der Krümmungslinien oder der Axen der Indicatrix der Fläche geführten Schnitte $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ der Fläche die Hauptnormalschnitte derselben in $P$ und bezeichnen wir die Krümmungsmittelpunkte dieser Schnitte d. i. auch der Hauptschnitte der osculierenden Fläche zweiter Ordnung für den Punkt $P$, welche in der Normale $n$ liegen, durch $K_1$ und $K_2$, so schneiden die Normalen der Fläche in den um $P$ herum unendlich nahe gelegenen Punkten derselben sämmtlich die beiden Geraden $g_1, g_2$, welche in $K_1$, $K_2$ respective normal zu den Ebenen $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_2$ stehen. Auch daraus folgt wieder, dass die Normale $n$ nur von den Normalen in den Scheitelpunkten der Indicatrix geschnitten wird.

Wären die Krümmungsmittelpunkte $K_1$, $K_2$ der Hauptnormalschnitte in $P$ bekannt, so ergiebt sich aus dem gefundenen Satze die Construction der Flächennormale in jedem Punkte, welcher dem Punkte unendlich nahe ist. (Vergl. § 105.; a) 4.)

1) Der Berührungskegel einer krummen Fläche aus einem Punkte hat jede Erzeugende zur Rückkehrerzeugenden, welche mit einer Haupttangente der Fläche in ihrem Berührungspunkte zusammenfällt — nach § 84., a.
2) Wie lautet der dualistisch entsprechende Satz?

### C. Von den windschiefen Regelflächen.

104. Einfach unendliche Reihen von Punkten waren die Raumcurven, einfach unendliche Schaaren von Ebenen die developpabeln Flächen; einfach unendliche Systeme von Strahlen oder Geraden sind die Regelflächen allgemeiner Art, d. i. die durch die Bewegung einer geraden Linie entstehenden Flächen. Die nicht entwickelbaren unter ihnen sind hier zuerst näher zu betrachten. Man nennt sie die windschiefen Regelflächen. Die speciellsten Formen derselben, das einfache Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid, sind als Flächen zweiten Grades schon hervorgetreten.

Zwei Erzeugungsweisen liegen für diese Flächen gleich nahe; man kann sie auffassen als Ort der Lagen einer Geraden $e$ (als Punktreihe), welche mit drei festen Curven $C_1$, $C_2$, $C_3$, den Leitcurven, stets je einen Punkt gemein hat, und ebenso als den Ort der Lagen einer Geraden $e$ (als Ebenenbüschel), welche mit drei festen entwickelbaren Flächen $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_3$, den Leit-Developpabeln, stets je eine Ebene gemein hat.

Sind die drei Leitcurven $C_1$, $C_2$, $C_3$ durch Projection gegeben, so erhält man die verschiedenen Erzeugenden $e$ der Fläche, indem man einen Punkt $M_1$ die erste Curve durchlaufen lässt und in jeder seiner Lagen die beiden Kegelflächen und ihre gemeinsamen Erzeugenden construiert, die er mit den beiden andern Curven $C_2$, $C_3$ bestimmt; diese gemeinsamen Erzeugenden sind die Erzeugenden der Regelfläche aus $M_1$. Jeder Punkt $P$ einer

Sind die drei Leit-Developpabeln $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_3$ durch Projection gegeben, so erhält man die verschiedenen Erzeugenden $e$ der Fläche, indem man eine Ebene $\mathbf{M}_1$ die erste Developpable $\mathbf{D}_1$ umhüllen lässt und in jeder ihrer Lagen die beiden ebenen Curven und ihre gemeinsamen Tangenten construiert, die sie mit den beiden andern Developpabeln $\mathbf{D}_2$ und $\mathbf{D}_3$ bestimmt; diese gemeinsamen Tangenten sind die Erzeugenden der Regelfläche

solchen Erzeugenden ist ein Punkt der Fläche und die Tangentialebene derselben in ihm ist im Allgemeinen einzig und bestimmt; die Erzeugende $e$ ist selbst die eine Haupttangente der Fläche in $P$ und die andere Haupttangente $t$ kann gefunden werden, indem man sie als die von $P$ ausgehende Transversale der unendlich nahe zu $e$ benachbarten Erzeugenden $e_1$ und $e_2$ betrachtet; die Ebene $et$ ist die Tangentialebene.

in $\mathbf{M}_1$. Jede Ebene **P** durch eine solche Erzeugende ist eine Tangentialebene der Fläche und der Berührungspunkt derselben ist im Allgemeinen einzig und bestimmt; die Erzeugende $e$ ist die eine Haupttangente der Fläche in **P** und die andere Haupttangente $t$ kann gefunden werden, indem man sie als die in **P** liegende Transversale der unendlich nahe zu $e$ benachbarten Erzeugenden $e_1$ und $e_2$ betrachtet; der Punkt $et$ ist der Berührungspunkt.

Eine windschiefe Regelfläche hat also zu den einfachsten aufgeschriebenen Curven die Punktreihen in ihren geradlinigen Erzeugenden und zu ihren einfachsten umschriebenen Developpabeln die Ebenenbüschel durch dieselben. Diess ist die Quelle der zweckmässigsten Methoden zu ihrer graphischen Behandlung.

Wir werden im Folgenden die Erzeugung aus drei Leitcurven vorzugsweis benutzen und auf die andere nur gelegentlich zurück kommen.

1) Man erläutere beide Constructionsmethoden für das einfache Hyperboloid und hyperbolische Paraboloid.
2) Man zeige, in welcher Weise die Punkte der Leitcurven und die Ebenen der Leitdeveloppabeln eine Ausnahme von der Bestimmtheit der Tangentialebene respective des Berührungspunktes machen müssen und lege dar, warum eine solche Ausnahme beim Hyperboloid wegfällt.
3) Die Leitcurven sind vielfache Curven der Fläche und zwar ist der Grad der Vielfachheit einer jeden von ihnen — d. i. die Zahl der Erzeugenden, die durch jeden ihrer Punkte gehen — ausgedrückt durch das Product der Ordnungszahlen der beiden andern Leitcurven — vorausgesetzt natürlich, dass dieselben algebraische Curven sind. Denn jene Erzeugenden sind

die gemeinschaftlichen Geraden zweier concentrischer Kegel von diesen Ordnungszahlen.

Ebenso sind die Leit-Developpabeln vielfach umschriebene Developpabeln der Fläche und der Grad der Vielfachheit einer jeden von ihnen ist durch das Product der Classenzahlen der beiden andern ausgedrückt.

4) Man erläutere für die durch zwei Ebenenbüschel und eine Kegelfläche zweiten Grades als Leit-Developpable erzeugte windschiefe Regelfläche die Natur der Ebenenbüschel als doppelt umschriebener Developpabeln der Fläche.

5) Denken wir — um die Vorstellung zu fixieren — die zweite und dritte Leitcurve als Kegelschnitte, so haben die concentrischen Kegel über ihnen aus einem Punkte der ersten Leitcurve zu ihren vier gemeinsamen Erzeugenden entweder a) vier reelle Gerade oder b) zwei reelle und zwei nicht reelle oder c) vier nicht reelle Gerade — je nach der Lage des Scheitels. Man kann darnach die Theile der ersten Leitcurve als vierfache, zweifache und als nicht mitwirkende oder parasitische unterscheiden. Diese drei Fälle gehen aber stetig in einander über und es ist lohnend, sich den Uebergang näher zu vergegenwärtigen. Es findet beim Uebergang a) zu b) und bei dem von b) zu c) im Wesentlichen das Gleiche statt, der Schnitt der Kegel geht durch die Berührung hindurch in den Fall des Nichtschneidens über, d. h. bei jeder derartigen Uebergangsstelle treten zwei Erzeugende, die in der nächstvorhergehenden Lage zwei verschiedenen Mänteln angehören, in eine zusammen, die den Character einer Grenzlinie oder Rückkehrerzeugenden hat. In dem Punkte der ersten Leitcurve, für welchen diess stattfindet, schneiden sich die auf einander folgenden Erzeugenden, die Begrenzungen des unendlich schmalen Streifens, längs welches die Kegel sich berühren; er hat also einen ausnahmsweisen Character unter den Punkten der Regelfläche. Und wenn die Leitlinien nicht Inflexionspunkte oder Rückkehrpunkte

haben, so entstehen die bezeichneten singulären Punkte der Regelfläche nur in dieser Art.

6) Das dem Vorigen dualistisch entsprechende Raisonnement zeigt, dass auch die Leitdeveloppabeln in gleicher Weise sich in vielfache der verschiedenen geraden Grade und parasitische Theile mit analogen Uebergängen zerlegen. Im Uebergang schneidet die Ebene der ersten die zweite und dritte Leitfläche in Curven, welche sich berühren, so dass zwei ihrer in der vorhergehenden Lage gemeinsamen Tangenten sich vereinigen, um in der nächstfolgenden zu verschwinden. In den bezeichneten Ebenen liegen also vereinigte benachbarte Erzeugende, für welche der Berührungspunkt jener Curven als Schnitt zu betrachten ist. (Man vergl. § 109.)

7) Die vorigen Betrachtungen erläutern Vorkommnisse bei der Entstehung von Raumcurven und developpabeln Flächen, die früher nicht in diesem Sinne hervorgehoben worden sind. Wenn eine Raumcurve sammt ihrer Developpabeln als Schnitt von zwei Kegelflächen d. i. als Ort ihrer gemeinsamen Punkte und der Verbindungslinien der benachbarten unter ihnen entsteht, und wenn eine developpable Fläche und Raumcurve durch zwei ebene Curven als Enveloppe ihrer gemeinsamen Tangentialebenen und der Schnittlinien der benachbarten unter ihnen gebildet wird (§ 101.), so ist diess ein Specialfall der allgemeinen Erzeugung der Regelflächen durch die Bedingung, dass die auf einander folgenden Erzeugenden sich schneiden oder in einer Ebene liegen; die Erzeugende des einen Kegels schneidet Erzeugende des andern und die zugehörigen Tangentialebenen liefern durch ihren Schnitt die Erzeugende der Fläche im ersten Falle, die Tangente der einen Curve schneidet Tangenten der andern und die zugehörigen Berührungspunkte liefern durch ihre Verbindungslinie die Erzeugende der Fläche im zweiten Falle. Die Zahl der Schnitte, welche eine Erzeugende oder Tangente dabei liefert, geht im Allgemeinen von 0 auf 2, auf 4, etc. und umgekehrt

und in den Momenten des Uebergangs findet ein Berühren der Erzeugenden des einen Kegels mit dem andern Kegel, andernfalls ein Schneiden der Tangente der einen Curve mit der andern Curve statt. Die Hilfsebene durch die Kegelspitzen berührt dann den einen Kegel, der Hilfspunkt in der Schnittlinie der Ebenen liegt auf der einen Curve. Einer solchen Uebergangsstelle entspricht es, dass drei auf einander folgende Erzeugende der Developpabeln oder vier folgende Punkte der Raumcurve in einer Ebene liegen, respective, dass drei folgende Erzeugende der vier folgenden Ebenen der Developpabeln durch einen Punkt gehen, d. h. diese Uebergänge liefern die stationären Ebenen und stationären (Rückkehr-) Punkte der developpabeln Flächen und der Raumcurven.

8) Man erläutere diess des Nähern an Fig. Tafel III. der Durchdringung von zwei Kegeln zweiten Grades mit gemeinsamer Hauptebene und füge die dualistisch entsprechende Construction und ihre Erläuterung hinzu. Die Rückkehrkante der Developpabeln geht durch jeden Uebergangspunkt in einer ihrer Leitcurven.

105. Im Anschluss an das einfache Hyperboloid, welches aus drei geradlinigen Reihen als Leitcurven oder aus drei Ebenenbüscheln als Leit-Developpabeln entsteht, lassen sich drei Haupt-Typen der windschiefen Regelflächen bilden, nämlich

a) Regelflächen mit zwei Leitgeraden $g_2$, $g_3$ und einer Leitcurve $C_1$ oder mit zwei Leitbüscheln $\mathbf{G}_2$, $\mathbf{G}_3$ und einer Leit-Developpabeln $\mathbf{D}_1$.

Bei ihrer Construction betrachtet man die Punkte der Leitcurve $C_1$ oder die Ebenen der Leit-Developpabeln $\mathbf{D}_1$, da dieselben einfach sind und nur je eine Erzeugende bestimmen.

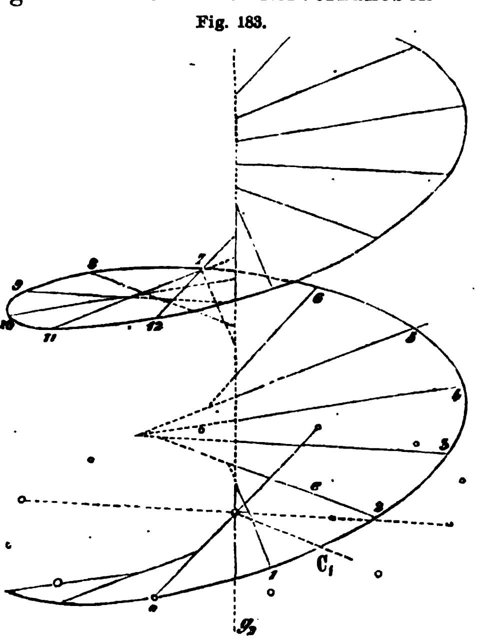
Ist eine der Geraden $g$ unendlich fern d. h. durch eine Ebene vertreten, deren Stellung sie ist, so werden windschiefe Regelflächen von diesem Typus insbesondere Conoide genannt, und wenn speciell von beiden Geraden $g$ die endliche normal ist zur unendlich fernen d. h. normal zur vorbezeichneten Richtungsebene, so wird das Conoid noch specieller als ein gerades bezeichnet.

Als wichtige Beispiele gerader Conoide sind hervorzuheben:

1) die Fläche der flachgängigen Schraube (Fig. 183.) und

2) die Wölbfläche des Eingangs in den runden Thurm. (Fig. 184.)

Fig. 183.

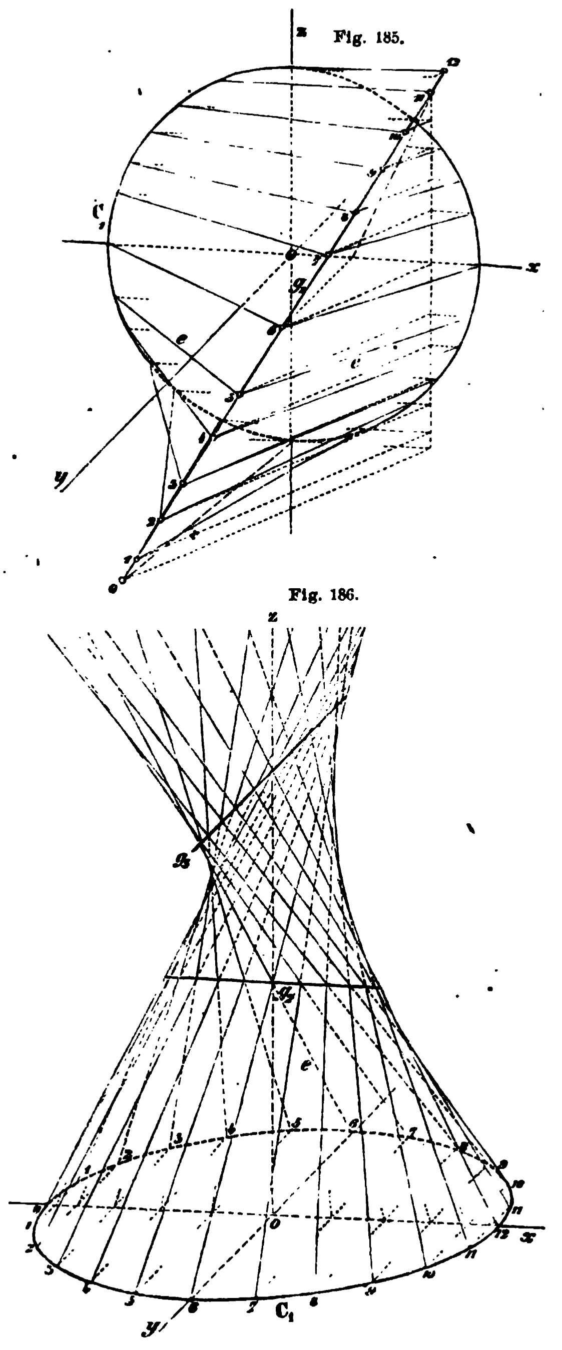


Bei jener sind die Leitcurven eine cylindrische Schraubenlinie $C_1$, die Axe derselben $g_2$ und die Stellung der Normalebenen zu dieser $g_3$; durch jeden Punkt der Schraubenlinie geht eine Erzeugende der Fläche, die Normale von ihm zur Axe derselben.

Fig. 184.

Die Wölbfläche hat eine auf dem Mantel eines geraden verticalen Kreiscylinders verzeichnete zu einer Erzeugenden desselben orthogonal symmetrische Curve $C_1$, die Axe des Cylinders $g_2$ und die Stellung der Normalebenen derselben $g_3$ zu Leitcurven, die Erzeugenden $e$ aus den Punkten von $C_1$ sind wieder die Normalen von denselben zur Axe $g_2$. Die Fläche wird gewöhnlich durch einen mit dem ersten coaxialen geraden Kreiscylinder nach innen begrenzt.

3) Ein schräges Conoid einfacher Art be-

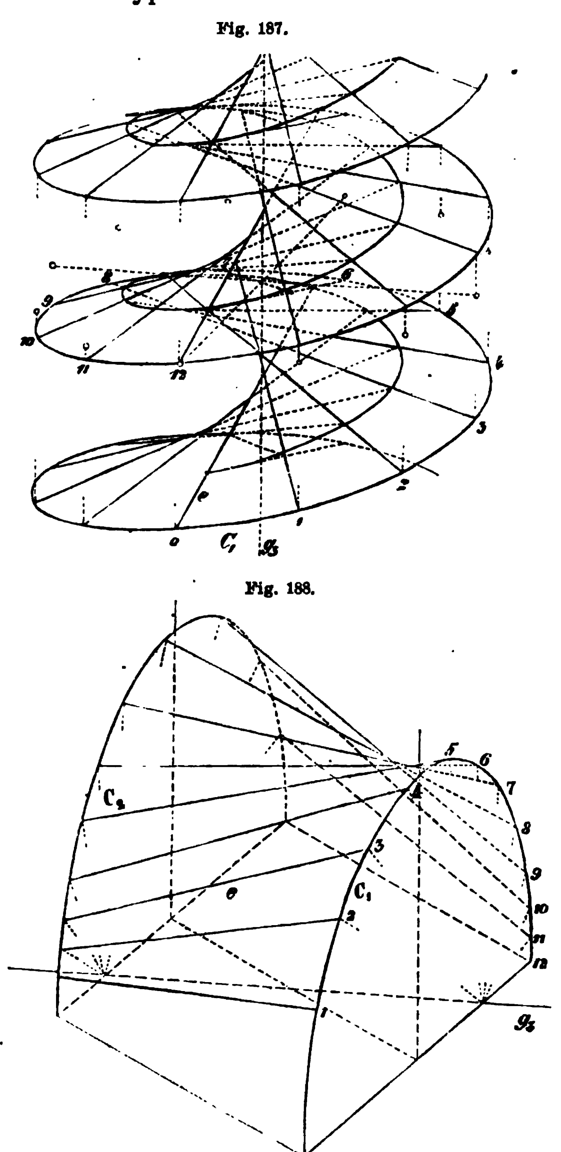



stimmen ein zu einer Projectionsebene $XOZ$ paralleler Kreis $C_1$ — oder statt dessen eine Kugel, die die Erzeugende stets berühren muss — eine schräge Gerade $g_2$ und die Stellung $g_3$ der andern Projectionsebene $XOY$. (Fig. 185.)

4) Eine Fläche vom nämlichen Typus, die aber kein Conoid ist, entsteht für einen Kegelschnitt $C_1$ und zwei zu seinen Axen parallele die Normale seiner Ebene aus seinem Mittelpunkt schneidende Gerade $g_2$ und $g_3$ als Leitlinie. (Fig. 186.) Wir wollen sie in Erinnerung an die Ergebnisse des § 103. unter d) das Normalenbündel nennen.

b) Regelflächen mit einer Leitgeraden $g_3$ und zwei Leitcurven $C_1$ und $C_2$ — oder mit einem Leitbüschel und zwei Leit-Developpabeln. Man betrachtet zur Construction die Punkte der einen Leitcurve und erkennt dieselbe als von einer der Ordnungszahl der an-

dern gleichen Vielfachheit. (Vergl. § 104.; 5., 6.) Als erstes wichtiges Beispiel von diesem Typus erwähnen wir




1) die Fläche der scharfgäng. Schraübe, für welche eine cylindrische Schraubenlinie $C_1$, die Axe des Schraubencylinders $g_3$ und ein Kreis $C_2$ in der unendlich fernen Normalebene zur Axe und aus der Richtung derselben als Centrum oder mit andern Worten der Fluchtkreis eines geraden Rotationskegels — des Richtungskegels — mit der Axe $g_3$ die Leitlinien sind (Fig. 187.). Für jeden Punkt der Schraubenlinie erhält man zwei Erzeugende parallel denjenigen Erzeugenden des Richtungskegels, welche in der zur Schraubenaxe normalen Ebene den Radius jenes Punktes im Grundkreis zu ihrer Projection haben; die Figur giebt nur die eine.

2) Die Wölbfläche des schiefen Eingangs (biais passé), bei der (Fig. 188.) zwei gleiche Kreise $C_1$, $C_2$ in parallelen Ebenen und diejenige Normale $g_3$ derselben, welche

die Centraldistanz der beiden Kreise hälftet, die Leitlinien sind. Man betrachtet die Punkte $M$ des einen Kreises $C_1$ und erhält als Schnittlinien der Ebene $Mg_3$ mit dem Kegel zweiten Grades $MC_2$ je zwei Erzeugende, von denen die eine stets durch die Mitte der Centraldistanz der Kreise $C_1$, $C_2$ geht; d. h. es entsteht in Folge der symmetrischen Anordnung der Leitlinien neben der windschiefen Regelfläche eine developpable, nämlich ein schiefer Kreiskegel; die Figur enthält sie nicht.

3) Das Cylindroid, das man so bildet: Zwei Curven $C_1$, $C_2^*$ (Fig. 189.) sind nicht parallele Verticalschnitte desselben Cylinders, die Punktepaare $M_{11}$, $M_{12}^*$; $M_{21}$, $M_{22}^*$; $M_{31}$, $M_{32}^*$; $\cdots$ sind Punktepaare derselben, welche je in der nämlichen Erzeugenden des Cylinders liegen; denkt man nun die eine dieser Curven $C_2^*$ parallel sich selbst um eine gewisse Höhe nach $C_2$ gehoben und die entsprechenden Punktepaare von vorher in der neuen Lage durch gerade Linien verbunden, so entsteht aus diesen das Cylindroid. Die dritte Leitlinie ist die Stellung $g_3$ einer zur Durchschnittslinie der Ebenen von $C_1$, $C_2$ und zu den Erzeugenden des Cylinders parallelen Ebene.

c) Regelflächen, welche drei Leitcurven $C_1$, $C_2$, $C_3$ oder drei Leit-Developpable $\mathbf{D}_1$, $\mathbf{D}_2$, $\mathbf{D}_3$ haben. Ihre Construction aus den einen oder andern ist in § 104. gegeben.

Alle Entwickelungen sollen sich auf diesen allgemeinsten Typus beziehen.

106. Die Ordnung einer windschiefen Regelfläche ist gleich der Classe derselben. Denn wenn eine Gerade die Fläche $m^{\text{ter}}$ Ordnung in $m$ Punkten schneidet, so geht durch jeden dieser Punkte eine Erzeugende der Fläche, die mit der Geraden eine Tangentialebene derselben bestimmt; in der Geraden liegen also ebenso viel Schnittpunkte mit der Fläche als durch sie Tangentialebenen an die Fläche gehen. Man spricht daher von Regelflächen $n^{\text{ten}}$ Grades. (Vergl. § 94.; 10.)

Die Zahl $n$, welche den Grad einer Regelfläche ausdrückt, lässt sich aus den Ordnungszahlen ihrer Leitcurven bestimmen; sie ist für $m_1$, $m_2$, $m_3$ als die respectiven Ordnungszah-

len von $C_1$, $C_2$, $C_3$ — die also als algebraische Curven gedacht werden — $n = 2m_1 m_2 m_3$.

Denn $n$ ist die Zahl von Schnittpunkten, die eine Gerade $g$ mit der Fläche bildet d. h. die Zahl von Erzeugenden der Fläche, denen sie begegnet; bildete man aber mit $C_2$, $C_3$, $g$ als Leitlinien eine Regelfläche, so würde man jene nämlichen Schnittpunkte als die Schnittpunkte derselben mit der Curve $C_1$ von der Ordnung $m_1$ erhalten*), d. h. nach dem in § 80. ausgesprochenen Princip, dass ihre Zahl gleich sei dem Product der Gradzahl $n_1$ dieser Fläche in die Ordnungszahl der Curve $C_1$, d. h. $n = m_1 n_1$.

Fig. 189.

Nach der nämlichen Schlussweise ist aber $n_1 = m_2 \cdot n_2$, wenn $n_2$ die Gradzahl einer Regelfläche ist, welche die Curve $C_3$ und zwei Gerade $g$, $l$ zu Leitlinien hat; und endlich ist $n_2 = 2m_3$, weil der Grad der durch drei gerade Leitlinien bestimmten Regelfläche gleich zwei ist. Man erhält also durch successive Substitution

$$n = 2m_1 m_2 m_3.$$

Der Grad der Regelfläche ist **kleiner** als $2m_1 m_2 m_3$, wenn die Leitcurven gemeinschaftliche Punkte besitzen; denn jeder

*) Ein einfaches Beispiel zur Erläuterung dieses Schlusses findet man in § 120.; 6.

Punkt, der zweien derselben gemeinschaftlich ist, giebt als Spitze einem Kegel über der dritten Leitcurve Entstehung, welcher nur uneigentlich der Regelfläche angehört. Sind also Schnittpunkte der Leitcurvenpaare $C_1, C_2$; $C_2, C_3$; $C_3, C_1$ in den Anzahlen $s_3, s_1, s_2$ vorhanden, so wird die Gradzahl der Fläche um den Betrag von

$$s_1 m_1 + s_2 m_2 + s_3 m_3$$

Einheiten vermindert. Zugleich reducieren sich die Zahlen, welche die Vielfachheit der Leitcurven $C_1, C_2, C_3$ (§ 104.; 3.) in der Fläche ausdrücken, von ihren allgemeinen Werthen auf $m_2 m_3 - s_1$, $m_3 m_1 - s_2$, $m_1 m_2 - s_3$ respective.

Solche Reductionen durch das Auftreten von developpabeln Flächen können auch durch besondere Symmetrien in der gegenseitigen Lage der Leitcurven hervorgerufen werden.

1) Die Regelflächen vom Typus a) haben im Allgemeinen den Grad $n = 2m_1$, wenn $m_1$ die Ordnungszahl ihrer Leitcurve ist; die vom Typus b) haben den Grad $n = 2m_1 m_2$, wenn $m_1, m_2$ die Ordnungszahlen ihrer beiden Leitcurven bezeichnen.

2) Die Regelfläche, welche ein Kegelschnitt $K$ und zwei Gerade $g_2, g_3$ als Leitlinien erzeugen, ist im Allgemeinen vom Grade $n = 4$ und die beiden Geraden sind Doppellinien derselben. So im Falle des Normalenbündels.

   Schneidet eine der Geraden z. B. $g_3$ den Kegelschnitt $K$ einfach, so wird $n = 3$ und nur die Gerade $g_3$ ist noch eine doppelte Gerade der Fläche.

   Schneidet aber jede der Geraden den Kegelschnitt in einem Punkte, so entsteht eine Regelfläche zweiten Grades und für dieselbe ist keine der Leitlinien doppelt. Schneiden endlich die Geraden einander und jede den Kegelschnitt, so entsteht keine windschiefe Regelfläche, es ist $n = 0$.

3) Man erörtere den Fall, wo die eine Gerade $g_3$ den Kegelschnitt $K$ zweimal schneidet.

4) Für zwei Kegelschnitte $K_1$ und $K_2$ und eine Gerade $g_3$ ist der Grad der Regelfläche $n = 8$; die Kegelschnitte sind zweifach, die Gerade ist vierfach. Re-

ductionen treten ein auf $n = 7$, wenn die Kegelschnitte einen gemeinsamen Punkt haben; dann ist die Gerade nur dreifach in der Regelfläche. Auf $n = 6$, wenn $g_3$ den einen Kegelschnitt $K_2$ einfach schneidet, wobei die Gerade vierfach, der Kegelschnitt $K_2$ zweifach bleibt, der Kegelschnitt $K_1$ aber einfach wird; oder wenn die Kegelschnitte $K_1$ und $K_2$ zwei Punkte mit einander gemein haben, indem zugleich die Gerade $g_3$ zur nur zweifachen Linie der Fläche wird. Auf $n = 4$, wenn $g_3$ beide Kegelschnitte einfach trifft, wodurch dieselben einfache Linien der Fläche werden; oder wenn die Kegelschnitte einander zweifach schneiden und der eine $K_2$ auch mit $g_3$ einen Punkt gemein hat, wobei $K_1$ einfach wird, während $K_2$ und $g_3$ Doppellinien in der Fläche sind. Auf $n = 3$, wenn jedes Paar der Leitlinien einen gemeinsamen Punkt hat; die Gerade ist zweifach, die Kegelschnitte werden einfach in der Fläche. Endlich auf $n = 2$, wenn die Kegelschnitte einander zweifach schneiden und je einen Punkt mit der Geraden gemein haben. Wenn tritt die Reduction auf $n = 5$ ein?

5) Man erörtere den Fall von drei Kegelschnitten als Leitcurven und die dabei möglichen Reductionen; wenn wird speciell die erzeugte Regelfläche vom zweiten Grade?

6) Eine Raumcurve dritter Ordnung $C_3$ mit zwei Geraden $g_1$, $g_2$ erzeugt im Allgemeinen eine Regelfläche sechsten Grades mit den Geraden als dreifachen Linien. Schneidet $C_3$ die Gerade $g_1$ oder beide Geraden $g_1$ und $g_2$ einfach, so wird $n = 5$, respective $n = 4$; schneidet $C_3$ die Gerade $g_1$ doppelt, $n = 4$; schneidet sie $g_1$ doppelt und $g_2$ einfach, $n = 3$ und wenn sie beide zweifach schneidet $n = 2$. Im Falle $n = 3$ ist die Gerade $g_1$ eine doppelte Gerade der Fläche.

7) Welche Regelflächen verschiedener Grade entstehen aus einer Raumcurve dritter Ordnung $C_3$, einem Kegelschnitt $K_2$ und einer Geraden $g_1$ als Leitcurve?

8) Wie kann man eine Regelfläche dritten Grades durch Leit-Developpable erzeugen? Es geschieht auf Grund

von Betrachtungen, die den im Text gegebenen nach dem Gesetz der Dualität entsprechen.

9) Die Wölbfläche des schiefen Eingangs (§ 105.; b) 2.) wäre als durch zwei Kegelschnitte und eine Gerade als Leitlinie erzeugt vom Grade 8; weil aber Kreise in parallelen Ebenen die unendlich fernen nicht reellen Kreispunkte gemein haben, so scheiden zwei nicht reelle Ebenen aus der Regelfläche aus, es wird $n = 6$ für alle Regelflächen durch eine Gerade und zwei Kreise in parallelen Ebenen. Durch die Gleichheit der Kreise und die symmetrische Lage der Leitgeraden zu ihnen im Falle des schiefen Eingangs wird ein Kegel zweiten Grades aus der Mitte der Centrallinie über den Kreisen als Theil der Fläche erzeugt; die windschiefe Regelfläche, welche als Wölbfläche dient, ist also nur vom vierten Grade. Der nämliche Character kann ihr auch bei ungleichen Kreisen erhalten bleiben.

107. Auf einer Erzeugenden der Regelfläche liegen unendlich viele Punkte, die unmittelbar bestimmt sind, jeder durch seine Projection, wenn die Erzeugende selbst durch Projection bestimmt ist; es gehen auch durch die Erzeugende unendlich viele Tangentialebenen, gegeben durch ihre Spuren. Diese Punkte und Ebenen gehören paarweis als Berührungspunkt und Tangentialebene zusammen und es ist zunächst das Gesetz dieser Zusammengehörigkeit zu ermitteln.

Wir denken dazu drei unendlich nahe auf einander folgende Erzeugende der Fläche $e_1$, $e_2$, $e_3$ und in der ersten die Punktreihe $A_{11}$, $A_{12}$, $A_{13}$, $\cdots$, so ist für jeden derselben $e_1$ die erste Inflexionstangente der Fläche und die bezügliche zweite Inflexionstangente kann direct bestimmt werden als die Gerade $t_{1i}$, welche von dem Punkte $A_{1i}$ ausgeht als die Transversale von $e_2$ und $e_3$, die ihm entspricht. Die Gesammtheit dieser Geraden aus den Punkten von $e_1$ bildet ein einfaches Hyperboloid, das in allen Punkten von $e_1$ mit der gegebenen Regelfläche dieselbe Tangentialebene hat und von dem wir daher sagen, dass es sich der Regelfläche längs $e_1$ anschmiegt; diese Geraden bestimmen in den Nachbar-Erzeugenden $e_2$, $e_3$ Punktreihen $A_{21}$, $A_{22}$, $A_{23}$, $\cdots$; $A_{31}$, $A_{32}$, $A_{33}$, $\cdots$,

welche zu der Reihe $A_{11}, A_{12}, A_{13}, \cdots$ projectivisch sind und man hat auch

$$(e_1 \cdot A_{21} A_{22} A_{23} \cdots) = (A_{21} A_{22} A_{23} \cdots) = (A_{11} A_{12} A_{13} \cdots),$$

d. h. das Büschel der Berührungsebenen durch eine Erzeugende der Regelfläche ist projectivisch zur Reihe der Berührungspunkte derselben auf dieser Erzeugenden.

Daraus folgt sofort, dass durch drei Berührungsebenen durch eine Erzeugende und die zugehörigen Berührungspunkte auf derselben für alle übrigen Berührungsebenen durch sie die Berührungspunkte und für alle übrigen Punkte auf ihr die Berührungsebenen linear bestimmt sind.

Sind also drei Leitcurven $C_1, C_2, C_3$ gegeben, mit denen die Erzeugende $e$ die Punkte $P_1, P_2, P_3$ gemein hat und sind $t_1, t_2, t_3$ die zugehörigen Tangenten derselben, so sind $et_1$, $et_2$, $et_3$ die Tangentialebenen $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ der Regelfläche in $P_1, P_2, P_3$ respective und die Tangentialebene $\mathbf{P}_i$ in einem beliebigen Punkte $P_i$ derselben Erzeugenden bestimmt sich nach der Projectivitäts-Relation

$$(e \cdot \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_i) = (P_1 P_2 P_3 P_i);$$

ebenso der Berührungspunkt $P_i$ der beliebigen Ebene $\mathbf{P}_i$ durch dieselbe Erzeugende.

Sind ebenso drei Leit-Developpable $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$ gegeben, mit denen die Erzeugende $e$ die Ebenen $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3$ gemein hat und sind $t_1, t_2, t_3$ die zugehörigen Erzeugenden derselben, so sind $et_1, et_2, et_3, \cdots$ die Berührungspunkte $P_1, P_2, P_3, \cdots$ der Regelfläche in diesen Ebenen respective und der Berührungspunkt $P_i$ in einer beliebigen Ebene $\mathbf{P}_i$ durch dieselbe wird durch die Relation

$$(e \cdot P_1 P_2 P_3 P_i) = (\mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_3 \mathbf{P}_i)$$

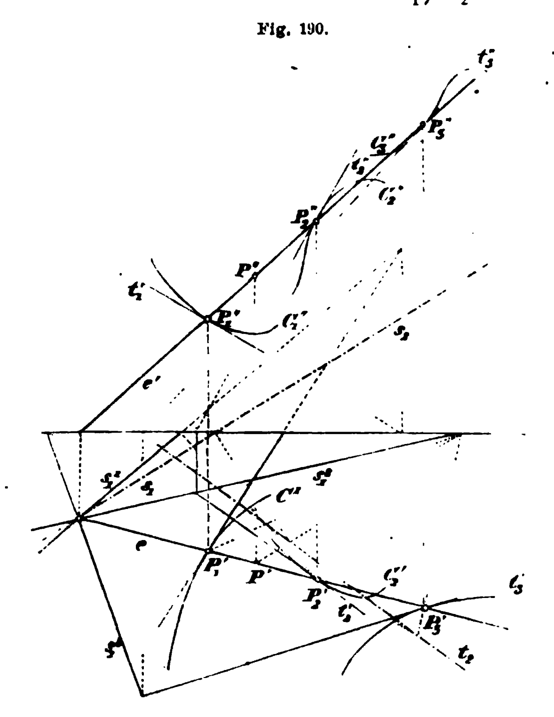
bestimmt und umgekehrt.

Das Büschel der Tangentialebenen bestimmt also z. B. als Reihe der entsprechenden Axenschnittpunkte in $OX$ eine zur Reihe der Berührungspunkte, also auch zur Reihe ihrer ersten oder zweiten Projectionen projectivische Reihe. In Fig. 190. sind $s_1{}^1, s_1{}^2, s_1{}^3$ die Horizontalspuren der bezeichneten Tangentialebenen; für die Reihe ihrer Schnitte mit der

Axe $x$ und die Reihe der Grundrisse der Berührungspunkte ist $t_2$ die perspectivische Axe, mit deren Hilfe für den Berührungspunkt $P$ auf $e$ die Tangentialebene **P** bestimmt ist, welche die Spuren $s_1$, $s_2$ hat. (Vergl. § 91., Fig. 168.)

Die Wölbfläche des schiefen Eingangs (§ 105.; b) 2.), für welche die Leitkreise $C_1$, $C_2$ in zur zweiten Projectionsebene parallelen Ebenen und somit die gerade Leitlinie $g_3$ parallel zur Axe $OY$ liegen, giebt für jede Erzeugende $e$ in den Punkten $P_1$, $P_2$, $P_3$ derselben auf den Leitlinien die $t_1$, $t_2$ als Tangenten der Kreise $C_1$, $C_2$ in $P_1$, $P_2$ und $t_3$ als mit $g_3$ identisch, damit also die Tangentialebenen $et_1$, $et_2$, $et_3$.

Fig. 190.



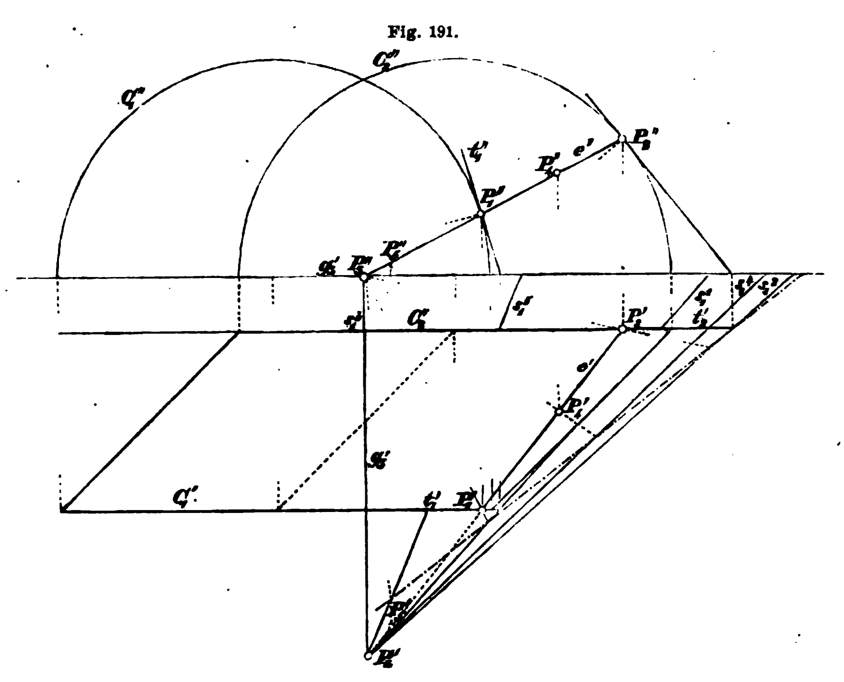
Mittelst der Reihe der Axenschnittpunkte derselben in $OX$ sind dann in Fig. 191. für den Punkt $P_4$ der Erzeugenden $e$ die Tangentialebene $\mathbf{P}_4$ und für die durch sie gehende Ebene $\mathbf{P}_5$ der Berührungspunkt $P_5$ construiert.

1) Wenn zwei Regelflächen eine Erzeugende $e$ gemeinsam enthalten und in drei Punkten derselben die nämlichen Berührungsebenen haben, oder umgekehrt, so haben sie in allen Punkten von $e$ einerlei Berührungsebenen und für alle Ebenen durch $e$ einerlei Berührungspunkte. (Vergl. § 91.; 11.)

2) Zu einer windschiefen Regelfläche lassen sich für jede Erzeugende $e$ unzählig viele längs derselben sich ihr anschmiegende einfache Hyperboloide und hyperbolische Paraboloide bestimmen, nämlich je ein Hyper-

boloid durch eine willkürlich gewählte Gerade $e^*$, welche mit $e$ nicht in einer Ebene liegt. (§ 91.; 12.) Drei Tangentialebenen $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ der Regelfläche in Punkten $P_1$, $P_2$, $P_3$ von $e$ bestimmen mit $e^*$ drei Punkte $P_1^*$, $P_2^*$, $P_3^*$ und die geraden Linien $P_1P_1^*$, $P_2P_2^*$, $P_3P_3^*$ sind drei Erzeugende der zweiten die $e$ nicht enthaltenden Regel-Schaar des Hyperboloids. Es giebt also auch unzählig viele Hyperboloide, die einen bestimmten Punkt enthalten oder eine bestimmte Ebene

Fig. 191.



berühren und einer Regelfläche längs einer gegebenen Erzeugenden sich anschmiegen — nämlich so viele als Gerade durch diesen Punkt oder in dieser Ebene möglich sind.

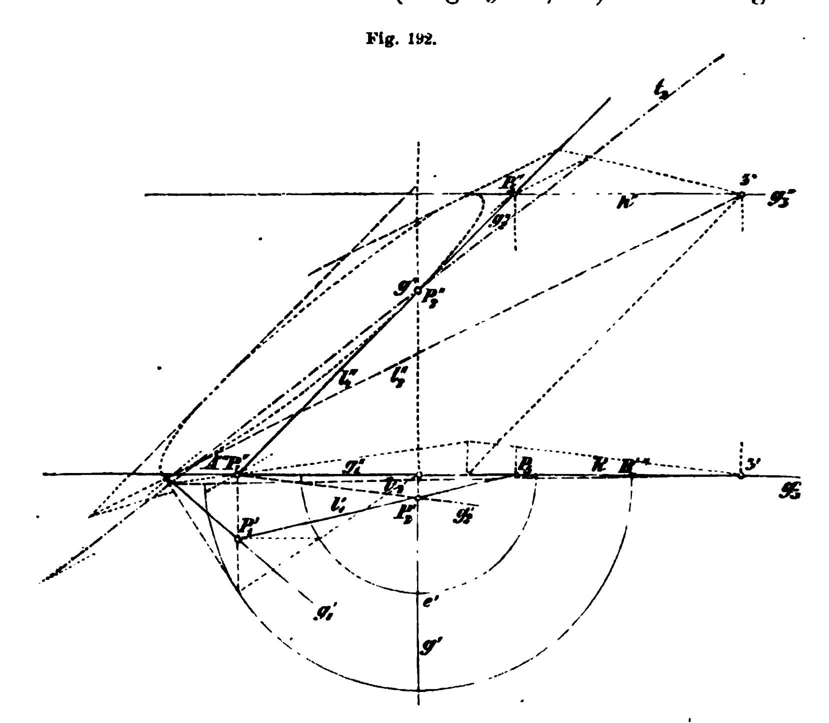
Wie ist im letztern Falle der Berührungspunkt auf, respective die Berührungsebene durch $e^*$ bestimmt?

3) Ist $e^*$ eine unendlich ferne Gerade, d. h. die Stellung einer Ebene, so bestimmt sie ein anschmiegendes

hyperbolisches Paraboloid, für welches durch diese Stellung die eine Richtungsebene bestimmt ist. Wie bestimmt sich die Axenrichtung des Paraboloids?

4) Die Schnittlinien einer Schaar von Parallelebenen durch die Punkte einer Erzeugenden mit den entsprechenden Tangentialebenen der Regelfläche bilden ein derselben sich längs jener anschmiegendes hyperbolisches Paraboloid. (Vergl. § 91.; 15.) Wie erzeugt

Fig. 192.



man auf analoge Weise ein anschmiegendes Hyperboloid?

Die Fig. 192. enthält dasjenige längs einer Erzeugenden $l_1$ des Normalenbündels über der Ellipse von den Scheiteln $A$, $B$ und $C$ mit den geraden Leitlinien $g$, $h$ — die erste normal zur zweiten Projectionsebene, die letztere in derselben parallel der Axe $x$ — sich demselben anschmiegende Hyperboloid, welches die Axe $AB$ der Leitellipse oder die Projec-

tionsaxe $x$ enthält. Für die drei Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ der Erzeugenden $l_1$ in den Leitlinien liefert die Verbindung mit den respectiven Schnittpunkten der Tangentialebenen der Fläche in ihnen mit $AB$ die Erzeugenden $g_1$, $g_2$, $g_3$ des Schmiegungs-Hyperboloids; man hat dann die Erzeugende $l_2$ desselben ermittelt, welche durch den Punkt 3 von $g_3$ geht und damit bereits die Umrisse respective die erste und zweite Spur des Hyperboloids — letztere natürlich Paare von Geraden — bestimmt. Mittelst der perspectivischen Axe $t_2$ der projectivischen Reihen, welche durch $g_1$, $g_2$, $g_3$ in $l_1$, $l_2$ gegeben sind, lassen sich andere Erzeugende der Schaar $g$ finden. Der Umriss des Hyperboloids in der zweiten Projection ist eingezeichnet; er berührt $l_1''$ in $P_2''$.

5) Die Tangentialebene der Regelfläche in dem unendlich fernen Punkte von $e$ — welche nach der Methode des Textes bestimmt wird — enthält, weil sie eine asymptotische Ebene für die anschmiegenden Regelflächen zweiten Grades ist, die Mittelpunkte aller dieser Flächen. Man kann also unendlich viele in $e$ sich anschmiegende Hyperboloide bestimmen, deren Mittelpunkte in einer festen Ebene und stets eines, dessen Mittelpunkt in einer festen Geraden liegt.

6) Für die längs $e$ der Regelfläche sich anschmiegenden hyperbolischen Paraboloide ist die zu $e$ gehörige asymptotische Ebene der Regelfläche — d. i. die sie in der Richtung von $e$ berührende Ebene — die eine ihnen allen gemeinsame Richtungsebene.

7) Man kann ein längs $e$ sich anschmiegendes hyperbolisches Paraboloid mit gegebener Axenrichtung nur construieren, wenn diese Axenrichtung in der Stellung der zu $e$ gehörigen asymptotischen Ebene enthalten ist.

8) Je zwei einfache Hyperboloide, welche sich längs derselben Erzeugenden $e$ einer gegebenen Regelfläche anschmiegen, schneiden sich in zwei Erzeugenden der andern Regelschaar (vergl. § 93.; 10.) und diese bestimmen mit der Erzeugenden $e$ zwei Schnittpunkte,

in denen sich beide Hyperboloide und in denen sie daher auch die Regelfläche osculieren. (§ 102.)

9) Man construiere die Tangentialebenen einer flachgängigen Schraubenfläche in drei Punkten einer Erzeugenden $e$, wenn die Schraubenaxe parallel zu $OZ$ ist; ebenso die Berührungspunkte für diejenigen beiden Tangentialebenen, welche mit der Neigung $\alpha_1$ z. B. gleich $45^0$ durch die Erzeugende $e$ gehen und für die zu den Projectionsebenen respective normalen.

10) Man führe das Analoge aus a) für die Wölbfläche des Eingangs in den runden Thurm, wenn die Axe desselben der Axe $OZ$ parallel ist; b) für die scharfgängige Schraubenfläche mit gleicher Lage; c) für das Kugel-Conoid von § 105.; a) 3.; d) für das Normalenbündel ibid. a) 4.; e) für das Cylindroid von § 105.; b) 3., wenn $g_3$ als Stellung der zweiten Projectionsebene gewählt ist.

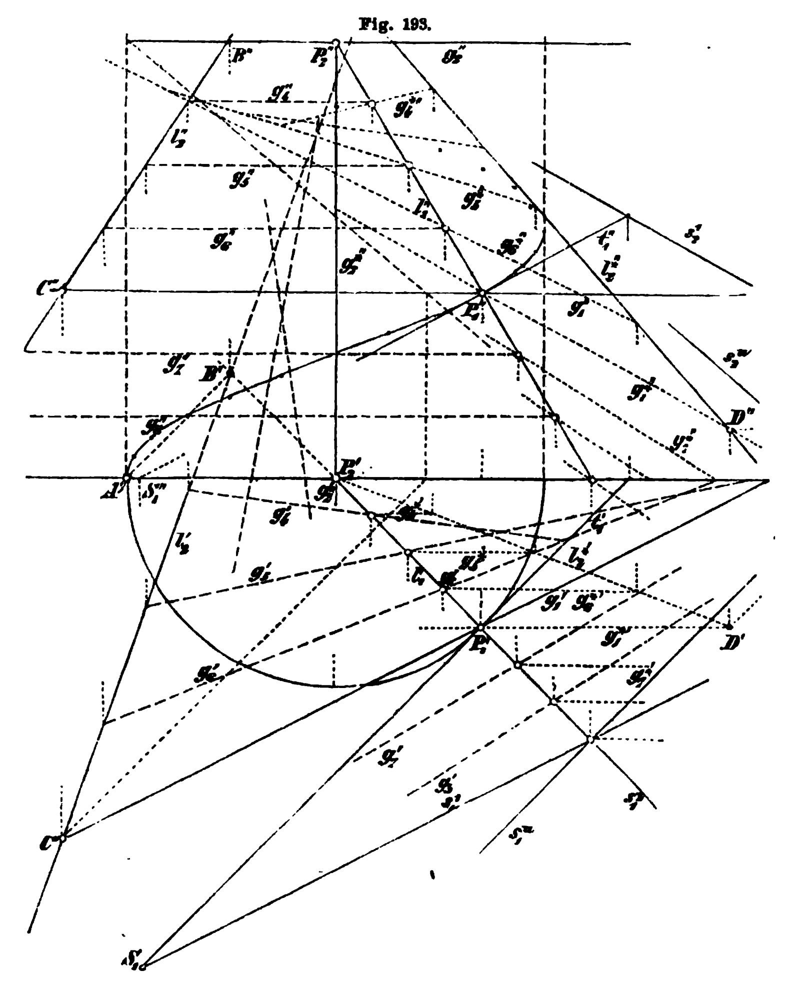
11) Man construiere für die Erzeugende $e$ einer durch drei Leitlinien gegebenen Regelfläche ein anschmiegendes Hyperboloid, welches a) die Axe $OY$ des Projectionssystems oder b) die projicierende Tafelnormale enthält — in Centralprojection.

12) Man construiere für die Erzeugende $e$ einer durch drei Leitlinien gegebenen Regelfläche z. B. die scharfgängige Schraubenfläche das anschmiegende Paraboloid, welches die Bildebene oder respective eine der Projectionsebenen zur Richtungsebene hat.

In Fig. 193. ist für die Erzeugende $l_2$ aus dem Punkte $P_1$ der Schraubenlinie zuerst das Schmiegungsparaboloid nach der Ebene $XOY$, sodann auch das nach der Ebene $XOZ$ construiert; die Erzeugenden des Ersten sind durch $g$ und $l$, die des Letztern durch $g^*$ und $l^*$ bezeichnet. Die Tangentialebenen in $P_1$, $P_2$ und dem unendlich fernen Punkte der Erzeugenden haben die Spuren $s_1^1$, $s_1^2$, $s_1^\infty$, respective $s_2^1$, $s_2^2$, $s_2^\infty$; die Ebene $s^\infty$ ist gemeinschaftliche Richtungsebene beider Paraboloide, zu ihr sind die $l$ und die $l^*$ parallel. Die Punkte $P_1$, $P_2$ liefern für das erste die Erzeugenden $g_1$, $g_2$, für das zweite $g_1^*$, $g_2^*$. Für das

erste Paraboloid ist dann aus dem Punkte $B$ in $g_2$ die Erzeugende $l_2$ construiert und damit Erzeugende $g_4, \cdots g_8$ der Schaar $g$; der horizontale Umriss ist ersichtlich. Für das zweite Paraboloid ist für den

Fig. 193.



Punkt $D$ auf $g_1{}^*$ die Erzeugende $l_2{}^*$ bestimmt und damit Erzeugende $g_4{}^*, \cdots g_7{}^*$ der Schaar $g^*$; der Umriss in der Verticalprojection erscheint.

108. Wenn wir durch eine Erzeugende $e$ einer windschiefen Regelfläche Paare von Ebenen normal zu einander

legen, so bilden dieselben ein involutorisches Büschel aus $e$ und somit ihre Berührungspunkte eine involutorische Reihe in $e$; in derselben ist der Centralpunkt derjenige, dessen Tangentialebene normal ist zur asymptotischen Ebene der Erzeugenden, d. h. (§ 10.; 9.) er ist derjenige Punkt der Erzeugenden, in welchem sie der unendlich nahe benachbarten folgenden Erzeugenden der Fläche am nächsten kommt; er ist also der der Erzeugenden $e$ angehörige Punkt der Strictionslinie der Regelfläche. (Vergl. § 91.)

Für die Berührungspunkte von zwei zu einander normalen Ebenen durch die Erzeugende $e$ oder für die Paare von Punkten, wo je die nämliche Ebene die Fläche berührt und zu derselben normal ist, ist das Product ihrer Entfernungen vom Centralpunkt constant — die projectivische Potenz der Erzeugenden $e$. (Vergl. §§ 15., 20.) Wenn die Erzeugende $e$ die nächstfolgende Erzeugende der Regelfläche schneidet, so gehört der Schnittpunkt zur Strictionslinie der Fläche; die Ebene beider Erzeugenden berührt dann die Fläche in allen Punkten derselben, diese besitzt ein ebenes Element oder ist längs dieser Erzeugenden developpabel. Wir haben in § 104. (5., 6.) die Herkunft solcher singulärer Erzeugenden bereits betrachtet, sie sind hier nur noch für specielle Fälle zu erörtern. Die Conoide mit geschlossener Leitcurve bieten in der geraden Leitlinie im endlichen Raum, welche ihre Doppellinie ist, den Uebergang von reellen zu parasitischen Punkten dar — er findet in den Punkten statt, wo dieselbe von den zur Richtungsebene parallelen Ebenen geschnitten wird, welche die Leitcurve berühren. Die durch sie gehenden Erzeugenden schneiden die unendlich nahe benachbarten in diesen Punkten. Dasselbe Beispiel zeigt aber eine Specialität dieses Characters. Denken wir diejenigen Tangenten der Leitcurve, welche der geraden Leitlinie des endlichen Raumes begegnen, so gehen durch ihre Berührungspunkte an der Curve Erzeugende, welche den unendlich nahe benachbarten offenbar parallel sind. Man muss bemerken, dass in diesem besondern Falle die Richtung der benachbarten Erzeugenden nicht zur Strictionslinie der Fläche gehört, weil die kürzeste Entfernung derselben überall stattfindet.

1) Die Normalen einer windschiefen Regelfläche in den

Punkten einer Erzeugenden bilden ein hyperbolisches Paraboloid, das zugehörige Normalenparaboloid der Fläche; die Normalebene der Erzeugenden ist die eine, die durch die Erzeugende selbst gehende Normalebene ihrer asymptotischen Ebene ist die andere Richtungsebene desselben; es ist also gleichseitig. (§ 90.; 16.) Der Centralpunkt der Erzeugenden ist der Scheitel dieses Paraboloids.

2) Man stelle das Normalenparaboloid für eine gegebene Erzeugende einer scharfgängigen und ebenso für die einer flachgängigen Schraubenfläche dar.

3) Wenn ein einfaches Rotationshyperboloid sich einer gegebenen windschiefen Regelfläche längs einer Erzeugenden anschmiegt, so liegt sein Mittelpunkt in der im Centralpunkte der Erzeugenden auf der Fläche errichteten Normale.

4) Man soll für eine gegebene Erzeugende einer windschiefen Regelfläche ein anschmiegendes Rotationshyperboloid so bestimmen, dass dasselbe eine gegebene Ebene zu einer seiner Axe parallelen Tangentialebene hat.

5) Wenn zwei Rotationshyperboloide für eine Erzeugende $e$ des einen und eine Erzeugende $e^*$ des andern gleiche projectivische Potenz haben, so können sie in eine solche Lage gebracht werden, dass das eine sich dem andern längs der Erzeugenden $e$ anschmiegt; man hat die Erzeugenden $e$, $e^*$ so zur Deckung zu bringen, dass ihre Centralpunkte zusammenfallen. Was ergiebt sich daraus für zwei beliebige Regelflächen?

6) Man construiere Punkte der Strictionslinie für das Normalenbündel. (§ 106.; a) 4.)

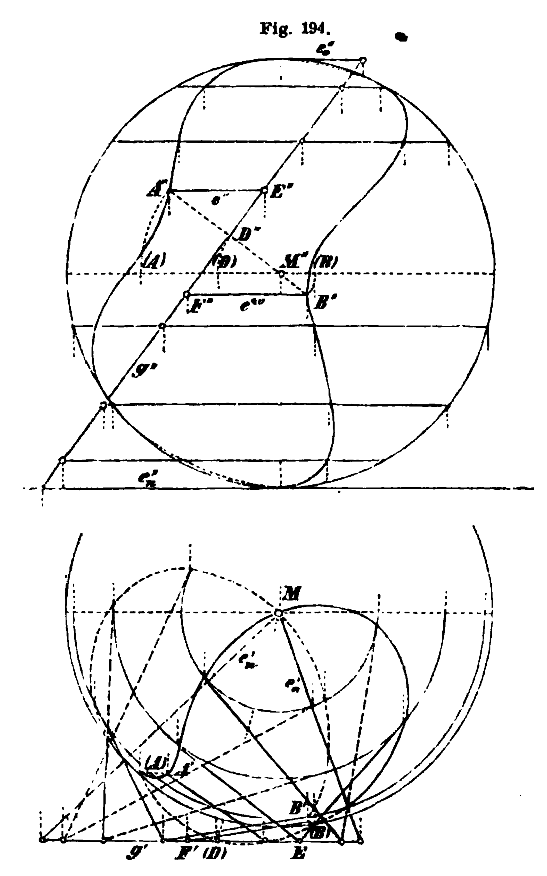
7) Die Strictionslinie der flachgängigen sowohl als der scharfgängigen Schraubenfläche fällt mit der Schraubenaxe zusammen. Mit welchem Unterschied?

8) Die Strictionslinie eines geraden Conoids ist die gerade Leitlinie desselben im endlichen Raume; die orthogonale Projection der Strictionslinie eines beliebigen Conoids auf seine Richtungsebene ist die En-

veloppe der entsprechenden Projectionen seiner Erzeugenden.

9) Die Strictionslinie einer Regelfläche mit einer geraden Leitlinie und einem Richtungskegel, der ein mit dieser Leitlinie als Axe beschriebener Rotationskegel ist, ist eben diese gerade Leitlinie.

Fig. 194.




10) Man construiere die sich schneidenden und die parallelen Nachbarerzeugenden des Kugel-Conoids. Welches sind diese Erzeugenden beim Kreis-Conoid Fig. 185., § 105., a)?

Es sind hier die, welche in jenen Berührungsebenen der Kugel liegen, die durch die geraden Leit-

linien gehen. In Fig. 194. ist das Kugel-Conoid in erster und zweiter Projection unter der Annahme verzeichnet, dass die gerade Leitlinie $g$ im endlichen Raume zu $XOZ$ parallel und die gerade Leitlinie im Unendlichen die Stellung von $XOY$ ist. Dann ist die eine Gruppe jener Geraden — welche? — gebildet von der höchsten und tiefsten Erzeugenden $e_0$, $e_n$, die andere von den Erzeugenden $e$ und $e^*$, welche von den Berührungspunkten $A$ und $B$ der Kugel mit durch $g$ gehenden Ebenen ausgehen.

11) Man zeige, dass ein Cylindroid zwei Erzeugende hat, die zu ihren nächstbenachbarten parallel sind.

12) Die Wölbfläche des schiefen Durchgangs hat zwei Erzeugende, die ihre benachbarten schneiden und zwei andere die zu ihren benachbarten parallel sind; man construiere dieselben.

109. Die Punkte einer windschiefen Regelfläche, in welchen ausnahmsweise zwei benachbarte Erzeugende sich schneiden, erscheinen natürlich inbegriffen unter den Punkten derselben, in welchen überhaupt zwei Erzeugende derselben zusammen treffen. Es ist evident, dass solche Punkte im Allgemeinen auf jeder Erzeugenden existieren. Legt man nämlich durch die Erzeugende $e$ der Fläche eine beliebige Ebene, so berührt dieselbe die Fläche in einem Punkte und schneidet sie ausser in der Erzeugenden in einer Curve von der Ordnung $(n-1)$ — wenn die Regelfläche als eine algebraische vom $n^{\text{ten}}$ Grade gedacht wird —, welche mit $e$ ausser dem Berührungspunkt der Ebene — darin liegt die Bestimmung der zweiten Haupttangente der Fläche in einem gegebenen Punkt derselben (vergl. unten 5 f.) — noch $(n-2)$ andere Schnittpunkte bestimmt, in deren jedem offenbar die Erzeugende $e$ einer andern Erzeugenden der Regelfläche begegnen muss, d. h. eine Regelfläche $n^{\text{ten}}$ Grades enthält im Allgemeinen eine Doppelcurve, die mit jeder Erzeugenden $(n-2)$ Punkte gemein hat. Die Fläche hat in den Punkten dieser Curve im Allgemeinen zwei von einander verschiedene Tangentialebenen; die besondern Punkte der Fläche aber, in denen zwei benachbarte Erzeugende sich treffen, haben in der Doppelcurve die auszeichnende Eigenschaft, dass ihnen

nur je **eine** Tangentialebene entspricht, dass sich also die Doppelcurve in ihnen wie die Rückkehrkante einer developpabeln Fläche verhält.

Wählt man anderseits in der Erzeugenden $e$ einen Punkt und legt durch ihn nach allen Erzeugenden der Regelfläche Ebenen, so berühren dieselben die Fläche und umhüllen einen Kegel von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Classe, welcher mit der Geraden $e$ ausser der Berührungsebene der Fläche im gewählten Punkt noch $(n-2)$ andere Ebenen gemein hat; d. h. es giebt zu jeder Regelfläche $n^{\text{ten}}$ Grades im Allgemeinen eine Developpable, die als **doppelt umschriebene Developpable der Fläche** zu bezeichnen ist und welche mit jeder Erzeugenden $(n-2)$ Ebenen gemein hat. Die Fläche hat mit den Ebenen dieser Developpabeln im Allgemeinen je zwei verschiedene Berührungspunkte; nur die besondern Ebenen der Fläche, welche zwei benachbarte Erzeugende derselben enthalten, liefern nur je **einen** Berührungspunkt.

Endlich enthält eine durch drei Leitcurven $C_1$, $C_2$, $C_3$ erzeugte Regelfläche im Allgemeinen eine Anzahl von geraden Erzeugenden, welche doppelt sind, d. h. in denen je zwei nicht auf einander folgende Lagen der erzeugenden Geraden sich decken; jede Gerade, welche die eine Leitcurve zweimal schneidet, während sie zugleich die andern Leitcurven je einfach trifft, ist eine solche. Sei $C_1$ die Leitcurve, welche zweimal geschnitten werden soll, so ist die Zahl solcher Geraden die Zahl der Durchschnittspunkte der Curve $C_3$ mit derjenigen Regelfläche, welche durch die Geraden erzeugt wird, die mit $C_1$ je zwei Schnittpunkte und mit $C_2$ je einen Punkt gemein haben und diese Zahl ist das $m_2$fache der Zahl, die den Grad einer Regelfläche angiebt, für welche $C_1$ eine von jeder Erzeugenden zweifach geschnittene und eine gerade Linie eine einfache Leitlinie ist; giebt es dann für die Curve $C_1$ durch jeden Punkt im Raum $h_1$ Gerade, die sie zweimal schneiden (vergl. § 82.; c.), so ist der Grad der letztbezeichneten Fläche und die Zahl der aus $C_1$ entspringenden doppelten Erzeugenden respective

$$= h_1 + \frac{m_1(m_1-1)}{2} \text{ und } = m_2 m_3 \left\{\frac{m_1(m_1-1)}{2} + h_1\right\}.$$

In Folge dessen besitzt die windschiefe Regelfläche aus drei Leitcurven $C_1, C_2, C_3$ mit den Characterzahlen $m_1, h_1$; $m_2, h_2$; $m_3, h_3$ doppelte Erzeugende in der Anzahl

$$m_1 m_2 m_3 \left\{\frac{m_1 + m_2 + m_3 - 3}{2} + \frac{h_1}{m_1} + \frac{h_2}{m_2} + \frac{h_3}{m_3}\right\}.$$

1) Weil in der Regelfläche vom Grade $2 m_1 m_2 m_3$ aus den Leitcurven $C_1, C_2, C_3$ von den respectiven Ordnungen $m_1, m_2, m_3$ diese Curven selbst einfach sind in den Graden $m_2 m_3, m_3 m_1, m_1 m_2$, so begegnet jede Erzeugende in den Leitcurven selbst bereits

$$(m_2 m_3 + m_3 m_1 + m_1 m_2) - 3$$

andern Erzeugenden der Fläche und hat somit ausser diesen, also in der Doppelcurve der Textbetrachtung, noch Schnittpunkte mit andern Erzeugenden der Regelfläche in der Anzahl

$$2 m_1 m_2 m_3 + 1 - (m_1 m_2 + m_2 m_3 + m_3 m_1).$$

Setzen wir $m_2 = m_3 = 1$, so wird diese Zahl Null, d. h. Regelflächen, welche zwei gerade Leitlinien enthalten, können ausser diesen Leitlinien selbst, welche vielfach sind, keine eigentliche Doppelcurve enthalten; diess gilt z. B. vom Normalenbündel, von der flachgängigen Schraubenfläche, von den Conoiden. Die windschiefe Regelfläche sechsten Grades, welche aus einer Raumcurve dritter Ordnung und zwei Geraden entsteht, enthält keine Doppelcurve, aber sie hat vier doppelte Erzeugende.

2) Die windschiefe Regelfläche dritten Grades (§ 106.) kann nur eine doppelte Gerade enthalten — wie auch daraus hervorgeht, dass in einer ebenen Curve dritter Ordnung nur ein Doppelpunkt möglich ist. (Vergl. § 114.)

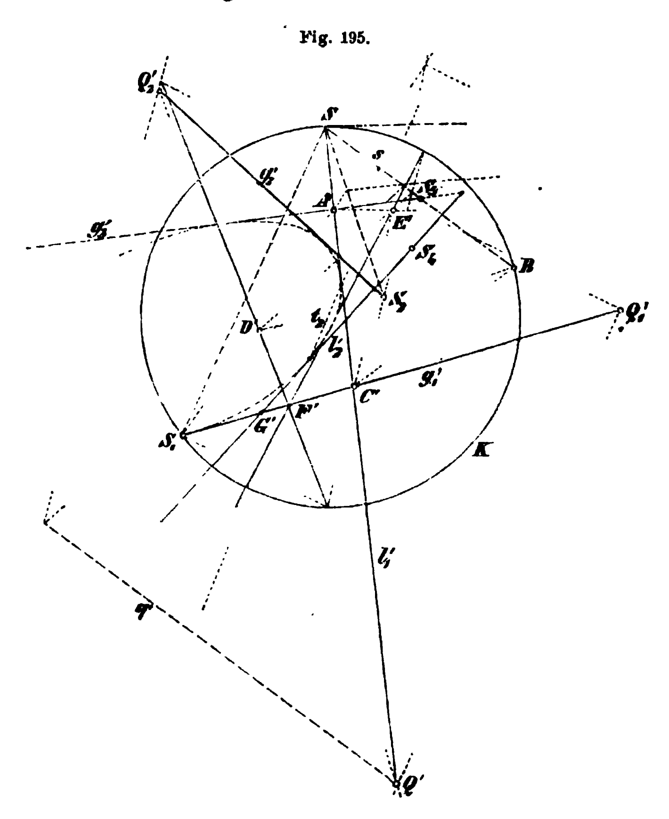
3) Die Fläche des schiefen Durchgangs (§ 105.) hat paarweis parallele Erzeugende, besitzt also in unendlicher Ferne eine Doppelcurve, die als ein Kegelschnitt anzusehen ist.

4) Man erläutere die Natur der Doppelcurve einer windschiefen Regelfläche an dem Beispiel der scharfgängigen

Schraubenfläche; dieselbe ist ein System von Schraubenlinien von derselben Axe und Ganghöhe mit der Schraube selbst. (Fig. 187. erlaubt sie zu verfolgen.)

5) Man verzeichnet die zweite Inflexionstangente der Regelfläche in einem Punkte der Erzeugenden $e$, indem man den Schnitt der Fläche mit ihrer Tangentialebene in diesem Punkte construiert, als die betreffende Tangente dieses Letzteren.

Fig. 195.



6) Giebt man für drei Punkte $P_1$, $P_2$, $P_3$ einer Erzeugenden $e$ der windschiefen Regelfläche diese zweiten Inflexionstangenten an, so sind sie die Erzeugenden der einen Schaar eines einfachen Hyperboloids, welches die Fläche längs der Erzeugenden $e$ so berührt, dass es in allen ihren Punkten ihre zweite Inflexions-

tangente zu seiner zweiten Erzeugenden hat (vergl. § 102.) oder sie in allen osculiert. Diess ist die Construction des osculierenden einfachen Hyperboloids für eine Erzeugende $e$ der windschiefen Regelfläche. In Fig. 195. ist für die Erzeugende $l_1$ einer Regelfläche dritten Grades von den Leitlinien — Kreis $K$ in der Bildebene, Gerade $g_1$ oder $S_1 Q_1'$, welche den Kreis trifft, und Gerade $g_2$ oder $S_2 Q_2'$, welche weder ihn noch $g_1$ schneidet — das osculierende einfache Hyperboloid construiert. Man hat für dasselbe die Erzeugende $l_1$ und die Geraden $g_1$, $g_2$ als Erzeugende der andern Schaar und es bleibt sonach eine Erzeugende $g_3$ der Letztern zu ermitteln. Man hat dazu die Tangentialebene $sq'$ der Regelfläche im Punkte $A$ von $l_1$ construiert — vergl. § 107. — und den Kegelschnitt bestimmt, welchen sie ausser $l_1$ mit der Fläche gemein hat; von demselben sind die Punkte $B$, $C$ im Kreis und auf $s$ und in der Geraden $g_1$ a priori bekannt und zwei weitere $D$ und $E$ sind als Schnittpunkte der Ebene mit dem Paar von Erzeugenden aus $F$ in $g_1$ erhalten; dadurch ergiebt sich die Tangente dieses Kegelschnitts in $A$, die zweite Haupttangente dieses Punktes, und die dritte Erzeugende $g_3$ der Schaar $g$ des Hyperboloids. Ermittelt man dann eine zweite Erzeugende seiner Schaar $l_1$ z. B. die durch $G$ in $g_1$ gehende $l_2$, so sind Spur, Fluchtlinie und Umriss des osculierenden Hyperboloids bestimmt; in der Fig. 195. ist die Umrissellipse angedeutet, die perspectivische Axe $t_2$ der von $g_1$, $g_2$, $g_3$ in $l_1$, $l_2$ bestimmten projectivischen Reihen giebt zu $l_1$, $l_2$ die Berührungspunkte im Umriss. Die fünf Punkte $S$, $\cdots$ $S_4$ bestimmen die elliptische Spur; etc.

Dieselbe Regelfläche ist in Fig. 196., p. 442. nochmals vollständiger dargestellt, und die Erzeugende $l_1$ oder $SQ'$ ist dort ebenso bezeichnet.

7) Wenn zwei windschiefe Regelflächen sich längs einer Erzeugenden berühren (§ 107.), so schneiden sie sich im Allgemeinen in einer Curve, welche die Berührungserzeugende in den zwei Punkten schneidet, in wel-

chen diese Flächen einander osculieren. Die zweiten Haupttangenten in diesen Punkten sind die bezüglichen Tangenten der Schnittcurve. (Vergl. §93.; 10.)

8) Wenn wird das osculierende Hyperboloid ein hyperbolisches Paraboloid? Insbesondere in welchen der Fälle des § 105.?

9) Jede windschiefe Regelfläche enthält eine Schaar aufgeschriebener Raumcurven, für welche sie zugleich entsprechend der doppelten Erzeugung des § 104. die Enveloppe ihrer developpabeln Flächen ist. (Vergl. § 103., a.) Man nennt sie die Curven der Haupttangenten. Sie gehen durch die Schnittpunkte benachbarter Erzeugenden und berühren dieselben in ihnen.

10) Da die Haupttangenten der windschiefen Regelfläche in den Punkten derselben Erzeugenden $e$ ein Hyperboloid bilden, welches die unendlich nahe Erzeugende $e_1$ enthält und die Stücke derselben zwischen $e$ und $e_1$ Elemente der Curven der Haupttangenten sind, so erhält man den Satz: Die Curven der Haupttangenten einer windschiefen Regelfläche bestimmen auf den Erzeugenden derselben projectivische Reihen. Es ist der allgemeine Satz zu dem speciellen für das einfache Hyperboloid. Durch drei Curven der Haupttangenten auf einer windschiefen Regelfläche sind alle übrigen linear bestimmt, wenn je ein Punkt derselben bekannt ist.

11) Ist unter den Leitlinien einer windschiefen Regelfläche eine unendlich ferne Gerade, so bilden die Curven der Haupttangenten in den Erzeugenden derselben ähnliche Punktreihen. Diess ist der allgemeine Satz zu dem speciellen für das hyperbolische Paraboloid. Zwei jener Curven bestimmen linear alle übrigen aus je einem Punkte.

12) Wie bestimmt man mit Hilfe der Haupttangente in einem Punkte der windschiefen Regelfläche die Richtungen der Krümmungslinien? (Vergl. § 103.; c.)

110. Der Querschnitt der Regelfläche $n^{ten}$ Grades mit einer beliebigen Ebene ist eine Curve von der Ordnung $n$,

deren Punkte als die Schnittpunkte der Ebene mit den Erzeugenden der Fläche und deren Tangenten als ihre Schnittlinien mit den zugehörigen Tangentialebenen der Fläche bestimmt sind. Sie enthält eine gewisse Anzahl von Doppelpunkten, indess Rückkehrpunkte in ihr nur ausnahmsweise auftreten, nämlich wenn die Ebene einen jener singulären Punkte der Fläche enthält, in welchen zwei benachbarte Erzeugende derselben zusammen treffen.

Diese Construction und diese Characteristik gelten insbesondere von den Spuren der Regelflächen in den Projectionsebenen, respective der Bildebene, oder in der Halbierungsebene $\mathbf{H}_{x'}$.

Der Berührungskegel der Fläche aus einem beliebigen also insbesondere nicht auf ihr gelegenen Punkte ist ein Kegel $n^{\text{ter}}$ Classe, der die Verbindungsebenen des Punktes mit den Erzeugenden der Regelfläche zu seinen Tangentialebenen und die nach den entsprechenden Berührungspunkten gehenden Strahlen zu seinen Erzeugenden hat. Derselbe besitzt eine gewisse Anzahl von Doppeltangentialebenen, aber nur in speciellen Fällen Rückkehrtangentialebenen, nämlich dann, wenn der gewählte Punkt in einer der singulären Ebenen liegt, in denen zwei benachbarte Erzeugende der Fläche liegen. In solcher Weise bestimmen sich die Umrisse der Regelfläche in den Projectionen; sie sind umhüllt von den entsprechenden Projectionen der Erzeugenden und man erhält die zugehörigen Berührungspunkte, indem man sie als entsprechende Projectionen der Berührungspunkte der projicierenden Ebenen durch die respectiven Erzeugenden bestimmt. So erhält man auch die Schlagschattengrenze einer solchen Fläche auf einer Ebene speciell Projectionsebene für Licht aus einem endlich oder unendlich entfernten Punkte; dann ist die Curve der Berührungspunkte der vom Leuchtpunkt an die Fläche gehenden Tangentialebenen die Trennungslinie des beleuchteten und unbeleuchteten Theils der Fläche oder die Schattengrenze. Man wird nach § 102.; 5. ihre Tangente in einem ihrer Punkte bestimmen können, wenn man für diesen Punkt die beiden Inflexionstangenten der Fläche kennt und hat also dafür die zweite dieser Inflexionstangenten zu bestimmen nach § 109.; 5.

1) Man verzeichne die Spur eines Cylindroids (§ 105.) in der Projectionsebene $XOY$ und zeige, dass alle die Schnitte desselben mit Ebenen, welche durch die Schnittlinie der Ebenen der beiden Leitcurven gehen, mit den entsprechenden Schnitten des Originalcylinders congruent sind; also beispielsweise Kegelschnitte für den Cylinder zweiten Grades.
2) Man construiere einen ebenen Schnitt der Fläche des schiefen Durchgangs normal zur geraden Leitlinie desselben.
3) Man zeige, dass der Schnitt der Fläche der scharfgängigen Schraube mit einer zu ihrer Axe normalen Ebene eine Archimed'sche Spirale ist. Wie construiert man dieselbe mit Hilfe der Evolvente des Grundkreises? (Vergl. § 111.)

*4) Die Schnitte derselben Regelfläche mit verschiedenen Ebenen sind im Allgemeinen Curven von solcher Beschaffenheit, dass jedem Punkte und jeder Tangente der einen ein Punkt und eine Tangente der andern entsprechen; sie sind also nach § 62. Anmerkung*) von demselben Geschlecht, d. h. es ist für sie

$$p = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{2} - \delta - \varkappa = \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2} - \tau - \iota$$

eine constante Zahl; kennt man dieselbe für einen dieser Querschnitte, so hat man damit für alle andern eine Relation ihrer characteristischen Zahlen und es genügt, zwei derselben zu wissen, um sie alle zu bestimmen, also z. B. $\varkappa = 0$, was nach dem Obigen im Allgemeinen stattfindet und die Ordnungszahl.

*5) Die Ordnung der Doppelcurve einer Regelfläche ist der Classe ihrer doppelt umschriebenen Developpabeln gleich.

Denn ist jene $x_1$ und diese $x_2$, so ist der der Fläche aus einem beliebigen Punkte umschriebene Kegel von der Classe $n$ und hat keine Rückkehrtangentialebenen, aber $x_2$ Doppeltangentialebenen, so dass seine Ordnungszahl

$$= n(n-1) - 2x_2$$

ist; diese ist aber zugleich die Classenzahl eines durch den gewählten Punkt geführten ebenen Querschnitts der Fläche und dieser ist von der $n^{\text{ten}}$ Ordnung und enthält $x_1$ Doppelpunkte aber keine Rückkehrpunkte, d. h. seine Classe ist ausgedrückt durch

$$n(n-1)-2x_1;$$

es ist also auch $\qquad x_1 = x_2.$

6) Man construiere die Grenze des Selbstschattens für paralleles Licht an den beiden windschiefen Schraubenflächen.
7) Die Durchschnittspunkte benachbarter Erzeugenden der Regelfläche liegen für jederlei Beleuchtung auf der Grenze des Selbstschattens und die zugehörige Erzeugende berührt diese Letztere daselbst — sie verhalten sich analog den Spitzen der Kegelflächen und den Punkten der Rückkehrkante der Developpabeln. Ihre Bilder liegen für jede Projection im entsprechenden Umriss der Fläche.
8) Man construiere die Grenze des Selbstschattens an der Wölbfläche des schiefen Eingangs und an der des Eingangs in den runden Thurm und erläutere für die erste, dass die Erzeugenden derselben, welche ihren unendlich nahe benachbarten parallel sind (§ 108.; 12.), Asymptoten der Schattengrenze sein müssen.
9) Wenn man das osculierende Hyperboloid der Fläche für die Erzeugende $e$ kennt (d. h. drei seiner Erzeugenden), so ist die Tangente der Schattengrenze in dem auf $e$ gelegenen Punkte nach § 102.; 5. construierbar; sie ist harmonisch conjugiert zum Lichtstrahl in Bezug auf den Umrisskegelschnitt des Hyperboloids.
10) Die Construction der Asymptote der Schattengrenze, also ihrer Tangente in einem Punkte, dessen Tangentialebene den Leuchtpunkt enthält, soll daraus abgeleitet werden. Von der harmonischen Theilung aus kommt man zu den Sätzen: Für den Berührungskegel eines Conoids liegen der Scheitel und eine Asymptote der Berührungscurve gleich entfernt von

der Erzeugenden der asymptotischen Ebene der Fläche, die durch den Scheitel geht. Für den Berührungscylinder einer windschiefen Regelfläche liegt die Asymptote der Berührungscurve in der die Richtung des Cylinders enthaltenden asymptotischen Ebene der Fläche gleich entfernt von der Erzeugenden der Fläche und der zweiten ihr angehörigen Erzeugenden des osculierenden Hyperboloids.

11) Man construiere die Umrisscurve der Fläche der scharfgängigen Schraube in einer zu ihrer Axe parallelen Ebene. Sie hat zwei Schaaren äquidistanter zur Axe symmetrischer Parallelen zu ihren Asymptoten. (Vergl. § 111.)

12) Die Zahl und Lage der Asymptoten eines ebenen Schnittes der Regelfläche bestimmt sich durch die Beziehung der Schnittebene zum unendlich fernen ebenen Schnitt der Fläche. Man erörtere diess für die Fälle a) 1, 2, 3; b) 1, 3 in § 105, Die Beispiele geben unendliche Aeste der Schnittcurve von zweierlei Ursprung: Solche aus zur Schnittebene parallelen Erzeugenden und solche aus unendlich fernen Erzeugenden. Für den entsprechenden allgemeinen Satz betreffs der Berührungskegel ist das Folgende zu beachten.

111. Wenn man durch einen beliebigen Punkt des Raumes zu den auf einander folgenden Erzeugenden einer Regelfläche Parallelen zieht, so bilden dieselben einen Kegel, der als Richtungskegel der Fläche bezeichnet werden kann. Diese Bezeichnung gilt jedoch hier in eingeschränkterem Sinne als bei den developpabeln Flächen (§ 75.). Die Tangentialebene des Richtungskegels längs einer seiner Erzeugenden ist parallel nur zu der im unendlich fernen Punkt berührenden Ebene der windschiefen Regelfläche oder der asymptotischen Ebene für die parallele Erzeugende dieser Letzteren.

Der Richtungskegel ist am unmittelbarsten hervorgetreten bei der Fläche der scharfgängigen Schraube, wo er ein gerader Kreiskegel mit der Schraubenaxe als Axe ist; er ersetzt immer, wie in diesem Falle, eine unendlich ferne also ebene Leitcurve.

Für jeden ebenen Schnitt der Fläche bestimmt er die unendlichen Aeste und die Asymptoten; denn er liefert zunächst in den Richtungen der zur Schnittebene parallelen Erzeugenden die Richtungen der Asymptoten, sodann mit den zugehörigen Tangentialebenen die Stellungen der entsprechenden asymptotischen Ebenen der Fläche, also diese selbst; die Durchschnittslinien der Letztern mit der Schnittebene sind aber die Asymptoten der Schnittcurve.

Nach dem unendlich fernen ebenen Schnitt der Regelfläche ist derselben eine developpable Fläche umschrieben, deren Tangentialebenen also die asymptotischen Ebenen der Regelfläche sind; man kann dieselbe die asymptotische Developpable der Regelfläche nennen. Ihre Erzeugenden sind denen des Richtungskegels und der Fläche parallel. Sie berührt die Regelfläche offenbar längs derjenigen singulären Erzeugenden, welche von ihren benachbarten geschnitten werden. Ihre Tangentialebenen durch einen Punkt gehören zu den Erzeugenden der Regelfläche, welchen die unendlichen Aeste der Berührungscurve des ihr aus jenem Punkt umschriebenen Kegels angehören und bestimmen ihre Asymptoten. (Vergl. § 110.; 10.)

1) In centralprojectivischer Darstellung ist die Fluchtlinie der Regelfläche zugleich die ihres Richtungskegels und ihrer asymptotischen Developpabeln.
2) Zwei windschiefe Regelflächen berühren sich längs einer gemeinsamen Erzeugenden, wenn sie in zwei Punkten derselben die nämlichen Tangentialebenen haben und ihre Richtungskegel aus demselben Centrum sich in der gleichgerichteten Erzeugenden berühren.
3) Wenn hat eine ebene Schnittcurve der windschiefen Regelfläche einen parabolischen Ast und wenn hat die Berührungscurve derselben mit einem umschriebenen Kegel einen solchen?
4) Man erläutere Verhalten und Einfluss der asymptotischen Developpabeln, wenn der unendlich ferne ebene Schnitt der Fläche eine Doppelcurve derselben ist — z. B. im Falle der Fläche des schiefen Durchgangs. (Vergl. Fig. 188., § 105.; b) 2.)

5) Für das einfache Hyperboloid fällt der Richtungskegel aus dem Mittelpunkt mit der asymptotischen Developpabeln zusammen. Immer ist der Richtungskegel der Regelfläche auch der ihrer asymptotischen Developpabeln.
6) Der Richtungskegel der Wölbfläche des schiefen Durchgangs schneidet die Normalebenen zu der geraden Leitlinie derselben in Kreisen.
7) Die asymptotische Developpable der Fläche der scharfgängigen Schraube ist eine developpable Schraubenfläche. Und allgemein: Wenn der Richtungskegel der Regelfläche ein Rotationskegel ist, so ist die Rückkehrkante ihrer asymptotischen Developpabeln eine Schraubenlinie auf einem Cylinder, dessen Erzeugende zur Axe des Richtungskegels parallel ist.
8) Man construiere durch eine gegebene Curve $C$ eine windschiefe Regelfläche mit einem gegebenen Kegel $K$ als ihrer asymptotischen Fläche — indem man die Schnittpunkte der Tangentialebenen von $K$ mit der Curve $C$ betrachtet. Wie kann für eine Leitfläche **F** dasselbe geleistet werden?
9) In welcher Beziehung steht die asymptotische Developpable zu der developpabeln Fläche, welche einer Regelfläche nach ihrer Strictionslinie umschrieben wird?
10) Wenn eine gerade Linie sich so bewegt, dass sie um eine beliebige Gerade des Raumes als Axe sich gleichförmig dreht, während alle ihre Punkte gleichzeitig parallel jener Axe gleichförmig vorrücken, so entsteht als Ort der Geraden eine windschiefe Regelfläche, welche man eine S c h r a u b e n r e g e l f l ä c h e nennen mag; eine Fläche, auf der durch jeden ihrer Punkte eine Gerade und eine Schraubenlinie geht. Alle diese Schraubenlinien haben die feste Gerade zur Axe und einerlei Ganghöhe; alle die Geraden sind den Erzeugenden eines geraden Kreiskegels um jene Axe parallel. Die asymptotische Developpable der Fläche ist die Tangentenfläche der Schraubenlinie, welche der der Axe nächstgelegene Punkt der erzeugenden Geraden beschreibt. Diese Linie ist die Strictionslinie der Fläche.

Es ist für diese Regelfläche die Erörterung der bisher behandelten Hauptaufgaben durchzuführen.

112. Eine gerade Linie $g$ hat mit einer windschiefen Regelfläche vom $n^{ten}$ Grade $n$ Punkte $P$ und $n$ Tangentialebenen $\mathbf{T}$ gemein. Man construiert jene, indem man den Schnitt der Fläche mit einer die Gerade enthaltenden Ebene zeichnet (§ 110) als diejenigen Punkte $P$, welche die Gerade $g$ mit dieser Curve gemein hat; in Parallelprojection wird man eine projicierende Ebene von $g$ zu diesem Zwecke benutzen.

Man construiert dagegen die der Fläche mit $g$ gemeinsamen Tangentialebenen $\mathbf{T}$, indem man für einen beliebigen Punkt der Geraden $g$ den Berührungskegel der Fläche bestimmt, als diejenigen Ebenen, welche der Geraden $g$ und dieser Kegelfläche gemeinsam sind; man kann stets den der Geraden parallelen Berührungscylinder der Fläche dafür benutzen.

Die Punkte $P$ führen aber auch zur Bestimmung der Ebenen $\mathbf{T}$, weil diese offenbar die durch $g$ mit den respectiven Erzeugenden der Regelfläche für die $P$ bestimmten Ebenen sein müssen; und umgekehrt lassen die Ebenen $\mathbf{T}$ die Punkte $P$ finden, als die durch $g$ mit den in den respectiven $\mathbf{T}$ liegenden Erzeugenden der Regelfläche bestimmten Punkte. (§ 93.)

Ist die Gerade $g$ unendlich fern oder die Stellung einer Ebene, so sind die ihr angehörigen Punkte der Regelfläche die Richtungen derjenigen Erzeugenden derselben, welche dieser Ebene parallel sind; diese Erzeugenden bestimmen mit $g$ diejenigen Tangentialebenen der Fläche, deren Bestimmung die Aufgabe ferner verlangt.

1) Man construiere zur ersten Projection eines Punktes der Regelfläche die zweite Projection desselben — z. B. für die Wölbfläche des schiefen Durchgangs oder für das Normalenbündel.

2) Wie vereinfacht sich die Bestimmung der andern Projection eines Punktes der windschiefen Regelfläche zu einer gegebenen, wenn die Fläche eine Leitlinie besitzt, die mit der entsprechenden projicierenden Geraden in einer Ebene liegt?

Man discutiere die Fälle der Schraubenflächen und der Wölbfläche des Eingangs in den runden Thurm bei zu $oz$ paralleler Axe für gegebene erste Projection

und den Fall des schiefen Durchgangs mit zu $oy$ paralleler Axe für die zweite Projection.

3) Man bestimme die zur ersten respective zweiten Projectionsebene parallelen Tangentialebenen einer windschiefen Regelfläche.

4) Man soll für Beleuchtung durch parallele Strahlen die hellsten Punkte einer windschiefen Regelfläche finden d. h. die, wo der Lichtstrahl in die Normale der Fläche fällt. Man bestimmt mit Hilfe des Richtungskegels die zur Normalebene des Lichtstrahls parallelen Erzeugenden und erhält auf ihnen die fraglichen Punkte als Berührungspunkte der Fläche mit den durch sie gehenden zum Lichtstrahl normalen Ebenen.

113. Die Verbindung einer windschiefen Regelfläche mit jeder der bisher behandelten Flächenarten, also mit einer developpabeln Fläche, mit einer krummen Fläche zweiten Grades oder mit einer andern windschiefen Regelfläche, giebt Anlass zu einer grossen Reihe von Problemen, von denen nur einige hervorgehoben werden sollen.

Eine Kegel- oder Cylinderfläche hat mit der Regelfläche eine Curve gemein, und unter ihren Erzeugenden sind im Allgemeinen Tangenten der Regelfläche, sowie unter ihren Tangentialebenen Tangentialebenen derselben. Legt man durch die Spitze des Kegels oder parallel den Erzeugenden des Cylinders eine Ebene nach einer Erzeugenden $e$ der Regelfläche, so enthält diese eine Gruppe $e_1, e_2 \ldots$ von Erzeugenden des Kegels oder Cylinders und einen aus der Erzeugenden $e$ und einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $C_{n-1}$ zusammengesetzten Schnitt der Regelfläche; die Punkte, welche die Gruppe der $e_i$ mit der Verbindung der $e$ und $C_{n-1}$ gemein hat, gehören zur Durchdringungscurve; die zugehörigen Tangenten derselben sind die Schnittlinien der bezüglichen Tangentialebenen des Kegels und der windschiefen Regelfläche. Man erkennt, dass die Ordnungszahl der Durchdringungscurve das Product der Gradzahlen des Kegels und der Regelfläche ist.

Für die constructive Durchführung erscheint es zumeist bequemer, immer nur die Schnittpunkte der Erzeugenden $e$ mit den Linien der Gruppe der $e_i$ zu beachten, da man auch

so alle Punkte der Durchdringung bekommt, wenn man alle Erzeugenden nach einander benutzt.

Construiert man für dieselben Ebenen je den Berührungspunkt $P$ mit der Regelfläche, so erhält man gleichzeitig den aus der Spitze des gegebenen Kegels der Fläche umschriebenen Berührungskegel und seine Berührungscurve mit der Fläche; dieselbe enthält die Doppelpunkte der vorher erörterten Durchdringungscurve. Die gemeinsamen Erzeugenden beider Kegel sind die Tangenten der Fläche unter den Erzeugenden des gegebenen. Ebenso sind die gemeinschaftlichen Tangentialebenen unserer beiden Kegel die Tangentialebenen der Fläche unter denen des gegebenen Kegels.

Eine developpable Fläche D mit Rückkehrkante C hat mit der windschiefen Regelfläche R eine Curve gemein, in welcher einzelne Punkte der Rückkehrkante gelegen sind und sie hat unter ihren Erzeugenden Tangenten und unter ihren Schmiegungsebenen Tangentenebenen der Regelfläche. Man wird die gemeinsame Curve construieren, indem man die Schnittpunkte der aufeinanderfolgenden Erzeugenden der developpabeln Fläche mit der Regelfläche bestimmt.

Wenn man dagegen der windschiefen Regelfläche eine Developpable D* umschreibt, welche mit der gegebenen D den nämlichen Richtungskegel hat, so müssten die gemeinsamen Ebenen dieser beiden Developpabeln die die Regelfläche berührenden Ebenen von D sein. Und die Construction von D* ist nach dem Vorigen ausführbar, da jede Tangente der Fluchtlinie von D einige Tangentialebenen der windschiefen Regelfläche von der durch sie bestimmten Stellung liefert und die auf einander folgenden Tangenten die nächstfolgenden Gruppen dieser Ebenen und die zugehörigen Erzeugenden der Developpabeln D* ergeben. Man kann auch die Gruppen der Schmiegungsebenen dieser Developpabeln construieren, welche eine bestimmte Erzeugende der Fläche enthalten, da ihre Stellungen die Tangenten der Fluchtlinie der gegebenen Developpabeln aus dem Fluchtpunkt der Erzeugenden sind.

Mit einer andern krummen Fläche F endlich hat eine windschiefe Regelfläche R eine aufgeschriebene Curve C und eine umschriebene Developpable D gemein. Man wird jene construieren als den Ort der Punkte, in welchen die Erzeu-

genden der Regelfläche die andere krumme Fläche schneiden und ihre Tangenten erhalten als die Schnittlinien der Tangentialebenen beider Flächen in diesen Punkten. Man bestimmt die Developpable D anderseits als die Enveloppe der Ebenen, die durch Erzeugende der Regelfläche berührend an die andere Fläche gehen und ihre Erzeugenden als die geraden Verbindungslinien der Punkte, in welchen die betrachtete Ebene die beiden Flächen berührt:

1) Eine Raumcurve C ist durch ihre erste und zweite Projection gegeben; man soll ihre Durchschnittspunkte mit einer durch drei Leitlinien bestimmten Regelfläche construieren — mit Hilfe des ersten projicierenden Cylinders derselben und seines Schnittes in der Fläche.
2) Man lege an die Wölbfläche des schiefen Durchgangs, an eine scharfgängige Schraubenfläche oder allgemeine Schraubenregelfläche durch einen gegebenen Punkt diejenigen Tangenten und Tangentialebenen, welche unter $45^0$ zur ersten Projectionsebene geneigt sind.
3) Man construiere in Centralprojection die Durchdringungs-Curve eines Cylinders mit einem Conoid, dessen endlich entfernte Leitgerade der Bildebene parallel ist.
4) Alle auf eine windschiefe Regelfläche fallenden Schlagschatten werden begrenzt durch die Durchschnittslinien derselben mit Cylindern respective Kegeln, welche den Leuchtpunkt zur Spitze haben und der schattenwerfenden Fläche umschrieben sind. Man erhält somit die Punkte des Schlagschattens in einer beliebigen Erzeugenden *e* der Fläche, indem man die Erzeugenden des Schattencylinders oder Kegels in der durch die Erzeugende *e* und den Leuchtpunkt bestimmten Ebene mit jener zum Durchschnitt bringt; man bestimmt auch die Tangente der Schlagschattencurve als Schnittlinie der Tangentialebene des Cylinders mit der der windschiefen Regelfläche.

Man construiere die Grenzlinie des Schlagschattens, der auf die Fläche der scharfgängigen Schraube von einer zu ihrer Axe normalen regulär sechsseitigen oder kreisförmigen Scheibe geworfen wird — für paralleles Licht und für Licht aus endlich entferntem Punkte.

5) Wenn man für Beleuchtung durch parallele Lichtstrahlen die Helligkeit eines beleuchteten Punktes einer Fläche nur vom sinus des Einfaltswinkels, d. i. von der Neigung der Tangentialebene der Fläche in ihm gegen den einfallenden Lichtstrahl abhängig nämlich ihm proportional sein lässt, so sind Punkte gleicher Helligkeit auf einer Fläche Punkte derselben, für die die Tangentialebenen der Fläche einerlei Neigung gegen den Lichtstrahl haben. Die Gesammtheit solcher Punkte bildet somit eine Curve auf der Fläche (eine Isophote derselben), nach welcher ihr eine Developpable umschrieben wird, die einen Rotationskegel von gegebenem Winkel an der Spitze und mit einem Lichtstrahl als Axe zu ihrem Richtungskegel hat. (§ 125. f.)

6) Man construiere in Centralprojection auf den Erzeugenden einer windschiefen Regelfläche die Punkte, in welchen die Helligkeit der Fläche 0,5 der Helligkeit des einfallenden Lichtes beträgt — indem man durch jede derselben die Ebenen legt, welche mit dem Lichtstrahl den entsprechenden Winkel ($arc\ sin = 0{,}5$) bilden und ihre Berührungspunkte ermittelt. (§ 59.; 8.)

7) Die Fläche der flachgängigen Schraube wird von einem Rotationscylinder durch ihre Axe, der einen ihrer Halbmesser zum Durchmesser hat, in einer Schraubenlinie geschnitten, deren Ganghöhe die Hälfte der ihren ist.

8) Die Durchdringungen von Regelflächen mit derselben Richtungsebene werden mittelst Hilfsebenen von der Stellung dieser Letztern construiert. Aus der Existenz einer gemeinsamen Leitlinie von zwei Regelflächen lassen sich für die Construction ihrer Durchdringung stets ähnliche Vereinfachungen ableiten.

9) Eine allgemeine Schraubenregelfläche und die Fläche einer flachgängigen Schraube von derselben Axe durchdringen einander in einer Schraubenlinie. Die Durchdringung eines Conoids mit horizontaler Richtungsebene mit einer Schraubenregelfläche von verticaler Axe kann daher durch die Fläche der flachgängigen Schraube als Hilfsfläche vermittelt werden.

10) Welche Vereinfachungen entspringen für die Construction der gemeinschaftlichen umschriebenen Developpabeln für eine windschiefe Regelfläche und eine Fläche zweiten Grades, wenn die Letztere eine Kugel ist? Man interpretiere die Construction derselben als Construction der Grenzen von Halbschatten und Kernschatten, wenn die Kugel als leuchtende Fläche betrachtet wird.

114. Die Regelfläche dritten Grades ist nächst dem Hyperboloid und hyperbolischen Paraboloid die einfachste unter den algebraischen Regelflächen. Einige der vorigen Entwickelungen mögen auf sie als ein wichtiges Beispiel angewendet werden.

Wir fanden in § 106. verschiedene Erzeugungsweisen einer solchen Fläche; nämlich:

a) durch einen Kegelschnitt $K_1$ und zwei Gerade $g_2$, $g_3$ als Leitlinien, deren eine $g_3$ den Kegelschnitt schneidet;

b) durch zwei Kegelschnitte $K_1$, $K_2$ und eine Gerade $g_3$, wenn jedes Paar der Leitlinien einen Punkt gemein haben;

c) durch eine Raumcurve dritter Ordnung $C_3$ und zwei Gerade $g_1$, $g_2$, von denen die erste jene Curve einfach und die letzte sie zweifach schneidet; wobei dann in den Fällen a) und b) die Gerade $g_3$, im Falle c) die Gerade $g_1$ als doppelt erscheint — als die Doppelgerade der Fläche, weil § 109. gezeigt hat, dass dieselbe als Doppellinie nur eine Gerade enthalten kann. Nach § 109. müssen wir überdiess schliessen, was auch die Erzeugung aus Leit-Developpabeln direct ergeben würde, dass überdiess ein Ebenenbüschel existiert, dessen Ebenen die Fläche doppelt berühren, dessen Scheitelkante also gleichfalls in der Fläche liegen muss. Die Identität der durch die Methoden a), b), c) erzeugten Flächen wird leicht erkannt. Jede Regelfläche dritten Grades enthält zwei gerade Leitlinien, d. h. zwei Gerade, welche von allen ihren Erzeugenden geschnitten werden; denn sind $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ beliebige vier Erzeugende der Fläche, so gehören die beiden gemeinsamen Transversalen $g_2$, $g_3$ derselben (§ 93.) zur Fläche, weil sie vier Punkte mit ihr gemein haben (§ 87.), und werden von allen Erzeugenden derselben geschnitten; eine Ebene $g_2 e_i$ schneidet die Fläche noch in einer dritten Geraden $e_i^*$; ebenso für $g_3$. Schneiden aber ferner $e_i$, $e_i^*$ die Gerade $g_2$ in verschiedenen Punkten,

so müssen sie nothwendig die Gerade $g_3$ in demselben Punkte schneiden, d. h. von den beiden Leitgeraden $g_2$, $g_3$ ist immer eine die Doppelgerade der Fläche; durch jeden Punkt derselben gehen zwei Erzeugende. Dagegen repräsentiert die andere eine der Fläche doppelt umschriebene Developpable; sie ist die Scheitelkante eines Ebenenbüschels, in dessen Ebenen je zwei Erzeugende der Fläche liegen, d. h. welche sämmtlich die Fläche doppelt berühren. Im Falle der Erzeugung aus dem Kegelschnitt $K$ und den Geraden $g_1$, $g_2$, von denen die Letztere den Kegelschnitt schneidet, ist die Letztere die Reihe der Doppelpunkte in der Fläche, und die Erstere die Scheitelkante des Büschels der Doppeltangentialebenen derselben. Die Figuren 196., 197. geben diese Construction der Fläche in Centralprojection nach der Voraussetzung, dass der Leitkegelschnitt (Kreis) $K$ in der Bildebene liegt.

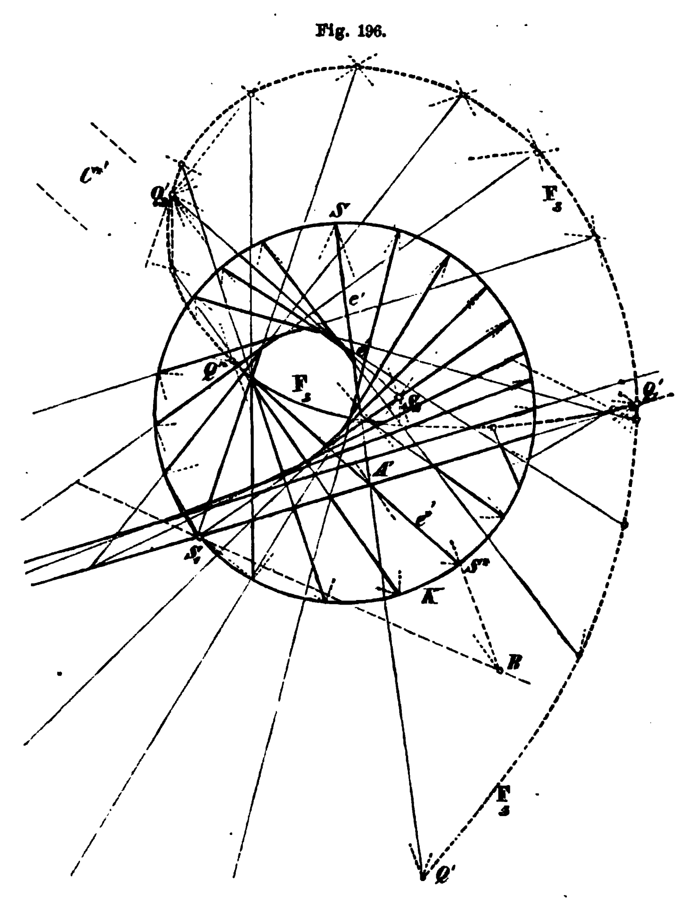
Lassen wir dann einen Punkt $A_i$ die Gerade $g_1$ durchlaufen, so gehen von jeder Lage desselben zwei Erzeugende $e_i$, $e_i^*$ aus, die Erzeugenden, welche der Kegel $A_i$, $K$ mit der Ebene $A_i$, $g_2$ gemein hat. Sind $S_1$, $Q_1'$ und $S_2$, $Q_2'$ die Durchstoss- und Fluchtpunkte von $g_1$, respective $g_2$, ist also $S_1$ ein Punkt von $K$, so zieht man $Q_2'A_i$ bis zum Durchschnitt $B_i$ mit der Parallelen durch $S_1$ zu $Q_1'Q_2'$ und hat in $S_2B_i$ die Spur der durch $A_i$ und $g_2$ bestimmten Ebene; in $S_i$, $S_i^*$ oder $K_i$, $K_i^*$ zur Unterscheidung, wo dieselbe den Kegelschnitt $K$ trifft, sind die Durchstosspunkte der Erzeugenden $e_i$, $e_i^*$, deren Bilder damit bestimmt sind und deren Fluchtpunkte in diesen erhalten werden, indem man die Fluchtlinie der durch sie gehenden Ebene $A_i$, $g_1$ verzeichnet.

Die Construction kann auch so gefasst werden: Man drehe um $S_2$ einen Strahl, der den Kreis in Punkten $S$, $S^*$ oder $K_i$, $K_i^*$ schneidet, ziehe zu ihm durch $Q_2'$ die Parallele und schneide diese in $Q'$, $Q^{*\prime}$ ($Q_i'$, $Q_i^{*\prime}$) durch die Parallelen aus $Q_1'$ zu den Geraden $S_1S$, $S_1S^*$ oder $S_1K_i$, $S_1K_i^*$ — so sind $SQ'$, $S^*Q^{*\prime}$ etc. die betreffenden Erzeugenden der Fläche und schneiden sich in einem Punkte $A$ der Doppelgeraden $g_1$.

Nach dieser Construction sind die Reihen $A_1, A_2, A_3, \cdots$; $B_1, B_2, B_3, \cdots$ perspectivisch aus $Q_2'$ und die Punktepaare $K_i$, $K_i^*$ bilden eine Involution im Kegelschnitt $K$ mit dem Pol in $S_2$ und ihre Paare entsprechen den Punkten der Reihe

$A_i$ eines zu einem und umgekehrt; speciell dem Punkte $S_1$ von $g_1'$ ein Punktepaar, von welchem der eine mit $S_1$ selbst zusammenfällt. Die Verbindungslinien der so einander zugeordneten Punkte sind die Erzeugenden unserer Regelfläche, — so dass dieselbe durch den Kegelschnitt und eine ihn schneidende Gerade allein definiert werden kann.

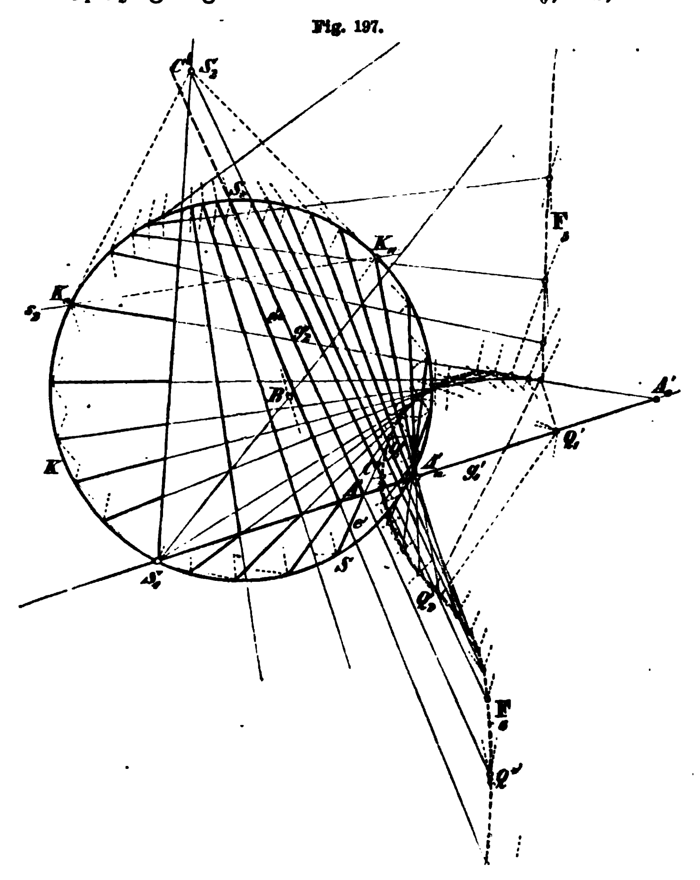
Fig. 196.



Die Ebenenpaare $g_1 e_1$, $g_1 e_1^*$; $g_1 e_2$, $g_1 e_2^*$; $\cdots$ bilden Paare eines involutorischen Ebenenbüschels, weil sie zu ihren Spuren in der Bildebene die Paare eines involutorischen Strahlenbüschels haben; je ein Paar derselben berührt die Fläche in dem nämlichen Punkte der Doppelgeraden. Denken wir aber

die Polare $s_2$ der Involution um $S_2$ im Kegelschnitt — sie ist nur in Fig. 197. verzeichnet, weil sie nur hier $K$ schneidet — und schneidet dieselbe $K$ in $K_0$, $K_n$, so sind $K_0$, $K_n$ die Doppelpunkte der Involution von Punkten $K_i$, $K_i^*$ im Kegelschnitt; die Geraden $S_2K_0$ und $S_2K_n$ bestimmen in der durch $S_1$ und $Q_1'Q_2'$ gezogenen Parallelen Punkte $B_0$, $B_n$, die mit

Fig. 197.



$Q_2'$ verbunden in $g_1'$ Punkte $A_0$, $A_n$ liefern von leicht erkennbarer Besonderheit (§ 104.): Die Geraden $A_0K_0$ und $A_nK_n$ repräsentieren jede ein Paar von unendlich nahen Erzeugenden $e_0e_0^*$, $e_ne_n^*$, die sich respective in $A_0$, $A_n$ schneiden; in den Punkten $A_0$, $A_n$ der Doppellinie hat die Regelfläche nur je e i n e Tangentialebene und dieselbe berührt sie längs der ganzen

Erzeugenden — oder in $A_0$, $A_n$ ist die Doppellinie für ein Element eine Rückkehrkante und in $e_0$, $e_n$ ist die windschiefe Regelfläche für ein Element developpabel.

Alle Erzeugenden der Regelfläche schneiden die Doppelgerade in dem einen der beiden von den Punkten $A_0$, $A_n$ auf ihr begrenzten Segmente; durch die Punkte des andern Segments gehen keine reellen Erzeugenden, die Doppellinie ist daselbst eine isolierte Gerade der Fläche.

Wenn die Polare $s_2$ den Kegelschnitt $K$ nicht in reellen Punkten schneidet, so existieren solche Grenzpunkte in der Doppelgeraden nicht, durch jeden Punkt derselben gehen vielmehr zwei reelle und verschiedene Erzeugende.

Das vorbetrachtete involutorische Ebenenbüschel schneidet ferner die Leitgerade $g_2$ in einer involutorischen Reihe von Punktepaaren $C_i$, $C_i^*$ — entsprechend den Erzeugenden $e_i$, $e_i^*$, die von dem Punkte $A_i$ ausgehen. Diese Involution entspricht der einfachen Reihe der $A_i$ projectivisch und man kann also die Regelfläche dritten Grades durch eine einfache und eine dazu projectivische involutorische Reihe von Punkten in sich kreuzenden Geraden definieren — als den Ort der Verbindungslinien entsprechender Punktepaare. Man drückt ganz dasselbe nur anders aus, nämlich im Sinne der Erzeugung durch Leitdeveloppabeln (§ 104.), indem man das einfache Ebenenbüschel aus $g_2$ durch die $A_i$ und das ihm projectivische involutorische Ebenenbüschel aus $g_2$ durch die $C_i$, $C_i^*$ die Fläche durch die Schnittlinien entsprechender Ebenenpaare erzeugen lässt.

Die Fluchtlinie $\mathbf{F}_3$ der Fläche, die man wie angegeben construiert, ist eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt $Q_1'$ im Fluchtpunkt der Doppellinie $g_1$, der nach dem Vorigen ein Doppelpunkt mit reellen Aesten (Fig. 196.) oder ein isolierter Punkt (Fig. 197.) sein wird, jenachdem er in dem einen oder andern der durch die besondern Punkte $A_0$, $A_n$ begrenzten Segmente der Doppelgeraden liegt — wie es die Figuren veranschaulichen. Das Nämliche gilt von allen ebenen Schnitten der Fläche. Wenn reelle Grenzpunkte existieren, so entsprechen den durch sie gehenden Schnittebenen Curven dritter Ordnung mit Rückkehrpunkt, die Schnittlinie mit der Tangentialebene im Grenzpunkt ist die Rückkehrtangente.

Jede durch eine Erzeugende $e$ gelegte Ebene berührt die Fläche und schneidet sie ausser in der Erzeugenden in einem Kegelschnitt (vergl. § 109.; 6., Fig. 195.), welcher mit der Erzeugenden den Berührungspunkt mit der Fläche und den Punkt der Ebene in der Doppelgeraden $g_3$ gemein hat; d. h. alle Kegelschnitte auf der Regelfläche dritten Grades schneiden die Doppelgerade derselben.

Die Fluchtlinie der betrachteten Schnittebene ist eine Secante der Fluchtcurve der Fläche aus dem Fluchtpunkt der betrachteten Erzeugenden und schneidet dieselbe daher noch überdiess in zwei reellen oder nicht reellen Punkten, den unendlich fernen Punkten des bezüglichen Kegelschnitts, der also im Falle der Realität eine Hyperbel, andernfalls eine Ellipse ist; derselbe wird zur Parabel, wenn sie zusammenfallen und diess wird für jede Erzeugende in zwei Lagen geschehen, weil die Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt die Classe vier hat (§ 62.; 3.) und folglich von jedem ihrer Punkte noch zwei weitere Tangenten an sie gehen. Die Schnittcurve kann zum Kreise werden für drei bestimmte Lagen des Fluchtpunkts der Erzeugenden $e$ und ebenso bestimmte Stellungen der durch sie gehenden Schnittebene.

Die Fläche giebt zu zahlreichen weitern constructiven Erörterungen den Anlass, die wir durch die vorhergehenden Untersuchungen über die windschiefen Regelflächen im Allgemeinen nahe genug gelegt haben.

1) Aus einem Punkte der Fläche geht an sie ein Berührungskegel zweiten Grades, welcher ihre Doppelgerade berührt.
2) Wenn ein einfaches Hyperboloid, welches die Doppelgerade zur Erzeugenden hat, die Regelfläche dritten Grades schneidet, so zählt diese Gerade in der Durchdringung doppelt und der Rest derselben muss eine Raumcurve vierter Ordnung sein. Da das Hyperboloid durch zwei projectivische Ebenenbüschel entsteht (§ 90.), so ist diese Raumcurve vierter Ordnung der Ort der Durchschnittspunkte der entsprechenden Ebenen von drei Büscheln, von denen das eine — die Doppelgerade der Fläche dritter Ordnung ist seine Scheitelkante — eine Involution von Ebenenpaaren ist;

diesen Paaren entsprechen die Ebenen eines zweiten durch die einfache Leitgerade der Fläche einzeln, während das dritte wiederum zu diesem und also auch zu dem Vorigen projectivisch ist.

Die Geraden der beiden Schaaren des Hyperboloids verhalten sich offenbar wesentlich verschieden zu dieser Curve; die Geraden derjenigen Schaar nämlich, zu welcher die Doppellinie der Regelfläche dritten Grades nicht gehört, schneiden die Curve je einmal, weil sie mit der Regelfläche nur drei Punkte gemein haben können und sie in der Doppellinie bereits zweimal schneiden; die Geraden von der Schaar der Doppellinie selbst schneiden sie dreimal — die Projection dieser Curve aus einem ihrer Punkte ist also stets eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt; sie ist also von der in den §§ 86., 100. studierten Art der Curven vierter Ordnung, in welchen sich unendlich viele Flächen zweiten Grades schneiden, wesentlich verschieden.

3) Vier feste Punkte der soeben gebildeten Raumcurve vierter Ordnung bestimmen mit jeder sie dreimal schneidenden Geraden (vergl. 2.) ein Ebenenbüschel von constantem d. i. von der Lage dieser Geraden nicht abhängigem Doppelverhältniss.

4) Unter den Erzeugenden des einfachen Hyperboloids, welches durch diese Curve vierter Ordnung geht, sind vier Tangenten derselben; sie bilden mit der Curve, die als Rückkehrkante in der developpabeln Fläche im Durchschnitt doppelt zählt, die vollständige Durchdringung des Hyperboloids mit der developpabeln Fläche der Curve, d. h. diese Durchdringung ist von der zwölften und somit die developpable Fläche von der sechsten Ordnung. Durch einen beliebigen Punkt gehen sechs Schmiegungsebenen der Curve. Dieselbe hat also die Charactere $m = 4$, $n = 6$, $r = 6$ und somit ferner $\alpha = 4$, $\beta = 0$; $g = 6$, $h = 3$; $x = 6$, $y = 4$; ganz so wie die Curve in § 83.; *11), a). Diese Zahlen entsprechen somit zwei wesentlich verschiedenen Curven. (§ 85.)

### D. Von den Rotationsflächen.

115. Wenn eine Curve C ohne ihre Gestalt zu ändern sich um eine feste geradlinige Axe $a$ dreht, bis sie in ihre ursprüngliche Lage zurück kommt, so erzeugt sie eine Rotationsfläche, als deren Axe wir jene Gerade bezeichnen; jeder Punkt der Curve beschreibt in der durch ihn gehenden Normalebene zur Axe und mit dem Mittelpunkt in dieser einen Kreis, einen Parallelkreis der Fläche. (Fig. 198., p. 449.)

Verfolgt man alle Punkte der bewegten Curve bei ihrer Bewegung bis zum Eintritt in eine bestimmte durch die Axe gelegte Ebene, — wobei jeder Punkt zwei Lagen in derselben erhält, die um 180° verschiedenen Drehungsgrössen entsprechen, — so erhält man dort als ihren Ort eine Curve M, die aus zwei zur Axe $a$ orthogonal symmetrischen Hälften besteht und daher durch eine derselben vollkommen bestimmt wird; sie heisst ein Meridian und die Ebene eine Meridian-Ebene der Fläche. Die Meridiane derselben Rotationsfläche sind congruent; jeder von ihnen erzeugt die Fläche durch die Umdrehung um die Axe $a$.

Durch jeden Punkt der Fläche geht ein Parallelkreis P und ein Meridian M derselben, deren Ebenen normal zu einander sind; man kann den Punkt als Schnitt von beiden, also durch ein Symbol wie (M, P) bezeichnen, wenn man M als eine bestimmte der beiden symmetrischen Hälften des Meridians denkt.

In zwei verschiedenen Meridianen $M_1$, $M_2$ bestimmen dann die verschiedenen Parallelkreise $P_1, P_2, P_3, \cdots$ die entsprechenden Punktepaare $M_1P_1, M_2P_1; M_1P_2, M_2P_2; \cdots; M_1P_n, M_2P_n$ und in zwei verschiedenen Parallelkreisen $P_1$, $P_2$ bestimmen die verschiedenen Meridiane $M_1, M_2, M_3, \cdots$ die Paare entsprechender Punkte $P_1M_1, P_2M_1; P_1M_2, P_2M_2; \cdots P_1M_n, P_2M_n$. Alle die geraden Verbindungslinien der Paare der ersten Art sind einander parallel, nämlich normal zu der

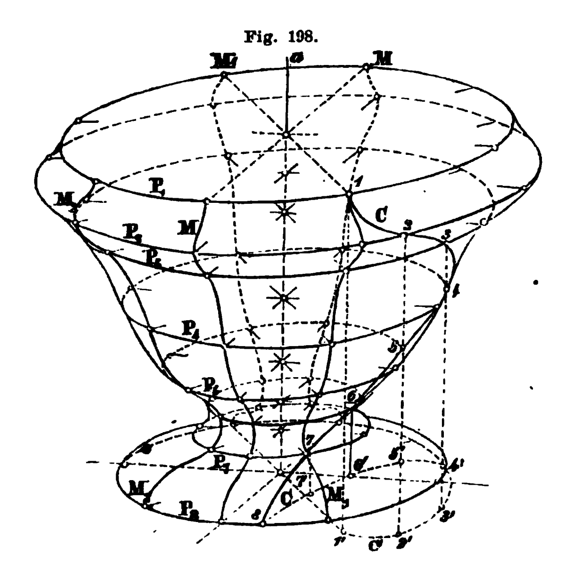
Ebene $\mathbf{M}_{12}$, welche sie und den Winkel der beiden Meridianebenen $\mathbf{M}_1$ und $\mathbf{M}_2$ halbiert; sie bilden also in ihrer Gesammtheit einen Cylinder, der die Meridiane $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ zu ebenen gegen seinen Normalschnitt in der Ebene $\mathbf{M}_{12}$ gleich geneigten Schnitten hat. Denken wir die Meridiane $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ einander unendlich nahe, also zusammenfallend mit $\mathbf{M}$ (Fig. 198.), so werden die Erzeugenden des betrachteten Cylinders zu den Tangenten der Parallelkreise $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \cdots \mathbf{P}_n$ in den Punkten des nämlichen Meridians $\mathbf{M}$ und der Cylinder selbst kann als der zugehörige Meridian-Berührungs-Cylinder der Fläche bezeichnet werden. Seine Tangentialebene in einem beliebigen Punkte $A$ des Meridians $\mathbf{M}$ ist auch die Tangentialebene der Rotationsfläche in demselben, da sie die Tangente des zugehörigen Parallelkreises in $A$ und ebenso die Tangente des Meridians $\mathbf{M}$ in $A$ enthält. Alle Meridian-Berührungs-Cylinder derselben Rotationsfläche sind congruent und können als die verschiedenen Lagen des nämlichen Cylinders bei der Drehung um die zu seinen Erzeugenden normale Axe $a$ bezeichnet werden.

Dagegen convergieren alle geraden Verbindungslinien der Paare der zweiten Art, also $\mathbf{P}_1\mathbf{M}_1$, $\mathbf{P}_2\mathbf{M}_1$; $\mathbf{P}_1\mathbf{M}_2$, $\mathbf{P}_2\mathbf{M}_2$; ,$\cdots$ $\mathbf{P}_1\mathbf{M}_n$, $\mathbf{P}_2\mathbf{M}_n$ in demselben Punkt $M$ der Axe $a$ und bilden einen Rotationskegel, der die Kreise $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ zu zwei parallelen zur Axe $a$ normalen Schnitten hat. Denken wir die Parallelkreise $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ einander unendlich nahe, so werden die Erzeugenden dieses Kegels zu den Tangenten der Meridiane $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \cdots \mathbf{M}_n$ in den Punkten des nämlichen Parallelkreises $\mathbf{P}_{12}$ und der Kegel selbst kann als der zugehörige Parallelkreis-Berührungskegel der Fläche bezeichnet werden; seine Tangentialebene in einem beliebigen Punkte $B$ des Parallelkreises $P_{12}$ ist auch die Tangentialebene der Rotationsfläche in demselben Punkte. Alle Parallelkreis-Berührungskegel derselben Rotationsfläche sind Rotationskegel von einerlei Axe und können als die verschiedenen Lagen eines mit seiner Axe in sich selbst verschobenen und dabei seine Form gesetzmässig ändernden Rotationskegels angesehen werden — als dessen Umhüllung die Rotationsfläche erscheint.

Denken wir sodann eine developpable Fläche

D ohne Veränderung ihrer Form um eine feste Axe *a* gedreht, bis sie in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, so entsteht auch dadurch eine Rotationsfläche; jede Schmiegungsebene derselben beschreibt um die Axe *a* und mit demjenigen ihrer Punkte als Spitze, der in *a* enthalten ist, einen Parallelkreis-Berührungskegel der Fläche. Verfolgt man alle Ebenen der bewegten Developpabeln bis zum Normalsein zu einer festen durch die Axe *a* gelegten Ebene, so erhält man als ihre Enveloppe eine Cylinderfläche, — den dieser Ebene entsprechenden Meridian-

Fig. 198.




Berührungscylinder. Man kommt von ihnen zu den Parallelkreisen und Meridianen durch Schlüsse, welche den vorher entwickelten dualistisch entsprechen.

1) Wenn ein Kreis mit gleichbleibender Stellung seiner Ebene sich so bewegt, dass sein Mittelpunkt eine feste Gerade durchläuft, die zu dieser Ebene normal ist, während er beständig einen Punkt mit einer festen Curve C gemein hat, so erzeugt er eine Rotationsfläche als Ort. Man erläutere die Beispiele für C als Gerade, als Kegelschnitt und als Schraubenlinie.

2) Welche Eigenschaften der erzeugten Fläche bleiben

bestehen, wenn die feste Gerade des Mittelpunktes schräg zur Ebene des Kreises oder wenn der Ort des Mittelpunktes als eine feste Curve gedacht wird? Wie entspricht dem eine Erzeugungsweise der Flächen zweiter Ordnung, das hyperbolische Paraboloid ausgenommen?

3) Man erörtere die erste Frage für den Fall, dass die Stellung der beweglichen Ebene des Kreises sich stetig ändert, während aber zugleich die Kreise je zweier auf einander folgender Ebenen ihre Schnittlinie in denselben Punkten schneiden, d. h. dieselbe zu ihrer Collineationsaxe haben. An die Stelle des Ortes der Mittelpunkte tritt dann der Ort der Pole dieser Schnittlinie.

4) Ebenso, wenn an Stelle der Kreise Kegelschnitte treten unter Fortdauer der vorigen Beschränkung.

5) Lassen sich die letzten Gebilde durch Collineation auf die ersten zurückführen?

6) Wenn ein Rotationskegel mit fester Axe sich so bewegt, dass er stets eine Tangentialebene mit einer festen developpabeln Fläche gemein hat, so erzeugt er eine Rotationsfläche als Enveloppe. Für die Frage, ob eine bestimmte Rotationsfläche gleichmässig durch Drehung einer aufgeschriebenen Curve, wie durch Drehung der developpabeln Fläche dieser Curve erzeugt werden kann, vergl. § 118.

116. Wenn wir die Axe $a$ und die erzeugende Curve $C$ einer Rotationsfläche in Projection gegeben denken, so kann der Parallelkreis, den ein Punkt der Curve $C$ erzeugt und in Folge dessen auch jeder beliebige Meridian der Fläche projiciert werden; denn jener liegt in der Normalebene der Axe $a$ vom gedachten Punkte aus und hat den Schnittpunkt derselben mit der Axe zum Mittelpunkt; dieser aber entsteht durch den Schnitt der Parallelkreise mit seiner Ebene d. i. als Ort der Endpunkte paralleler Radien derselben von einerlei Sinn.

Speciell erscheinen in Parallelprojectionen alle Parallelkreise derselben Rotationsfläche als ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen, deren Centra in der gleichnamigen Projection

der Axe $a$ liegen; die Meridiane als zu einander affin für die entsprechende Projection der Axe als Axe der Affinität und die Richtung der Normale ihrer Halbierungsebene als Richtung der Affinitätsstrahlen. (Vergl. § 54.; 21.)

In orthogonaler Parallelprojection und unter der fernern Voraussetzung, dass die Rotationsaxe $a$ zu einer Projectionsaxe z. B. zu $OZ$ parallel ist, erscheinen in der dazu normalen Projectionsebene alle Parallelkreise in wahrer Gestalt und Grösse und concentrisch, nämlich mit der gleichnamigen Projection der Axe als Mittelpunkt; die Meridiane erscheinen als ihre Radien. In den andern Projectionen aber erscheinen die Parallelkreise als zur gleichnamigen Axenprojection normale Gerade und die Meridiane in Affinität für eben diese Letztere als Axe und ihre Normalen als entsprechende Affinitätsstrahlen. Unter den Meridianen ist dann je einer $\mathbf{M}_{xz}$, $\mathbf{M}_{yz}$ der bezüglichen Projectionsebene parallel und erscheint in ihr in wahrer Gestalt und Grösse, in der ersten Projection aber als zur Axe $OX$, $OY$ respective parallele Gerade aus $a'$. Der zugehörige Meridian-Berührungscylinder ist zur entsprechenden Projectionsebene normal; ebenso sind unter den Parallelkreis-Berührungskegeln diejenigen, die ihre Spitze im unendlich fernen Punkt der Axe $a$ haben, normal zur ersten Projectionsebene. Die Verticalprojectionen von jenen und die Horizontalen von diesen sind die bezüglichen Umrisse der Fläche. (Vergl. § 122.)

Man darf diese specielle Lage der Rotationsfläche gegen das Axensystem der orthogonalen Parallelprojection stets voraussetzen, sobald man nur eine Rotationsfläche zu betrachten hat, — weil stets durch zwei Axendrehungen (§ 59.) die eine der Projectionsaxen zur Axe $a$ dieser Rotationsfläche parallel gemacht werden kann.

1) Man erörtere im Sinne des Textes die Darstellung einer Rotationsfläche, ihrer Parallelkreise und Meridiane in orthogonaler Parallelprojection für die Voraussetzung, dass die Rotationsaxe $a$ zur zweiten Projectionsebene parallel sei, jedoch nicht normal zur ersten.

2) Es ist die axonometrische Darstellung der Rotationsfläche, etc. anzugeben.

3) Man erläutere die centralprojectivische Darstellung der Parallelkreise und Meridiane einer Rotationsfläche
   a) bei schräg zur Bildebene liegender Axe,
   b) bei einer zur Bildebene normalen;
   c) bei einer zur Bildebene parallelen Axe.
4) Man vollziehe dieselbe insbesondere in dem Falle, wo die erzeugende Curve **C** der Fläche eine gerade Linie ist, die mit der Axe nicht in einer Ebene liegt.
5) Man verzeichne den zur zweiten Projectionsebene parallelen und einen schrägen Meridian für die Rotationsfläche, die durch Drehung einer Geraden um die zu $OZ$ parallele Axe besteht.
6) Man verzeichne in orthogonaler Parallelprojection bei zu $OZ$ paralleler Rotationsaxe $a$ schräge Meridiane der Rotationsfläche, für welche der zur zweiten Projectionsebene parallele Meridian als Kreis oder überhaupt als ein Kegelschnitt gegeben ist.

117. Wenn für orthogonale Parallelprojection die zu $OZ$ parallele Rotationsaxe $a$ in $a'$ und $a''$ und die erzeugende Curve **C** durch **C**$'$ und **C**$''$ projiciert ist, so ergiebt sich die Bestimmung der Projectionen aller Punkte $A_i$ und die Darstellung ihrer bezüglichen Tangentialebenen $\mathbf{T}_i$ besonders einfach.

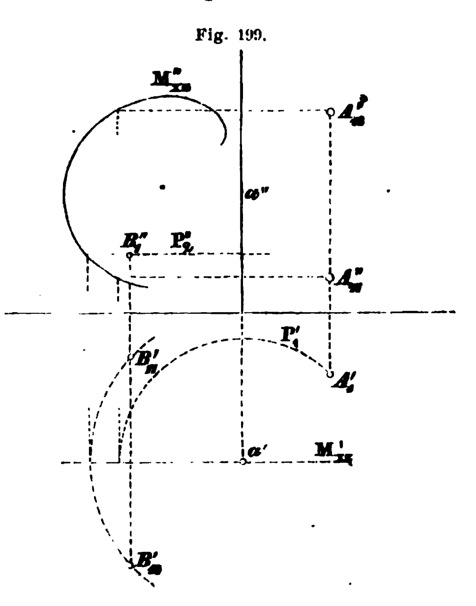
Ist zunächst in $A_1'$ die erste Projection eines Punktes der Fläche gegeben (Fig. 199.), so geht durch dieselbe die erste Projection $\mathbf{P}_1'$ des zugehörigen Parallelkreises, deren Schnittpunkte $\mathbf{C}_{11}'$, $\mathbf{C}_{12}'$, $\cdots$ mit **C**$'$ durch ihre zweiten Projectionen $\mathbf{C}_{11}''$, $\mathbf{C}_{12}''$, $\cdots$ in **C**$''$ die zweiten Projectionen der Parallelkreise $\mathbf{P}_{11}''$, $\mathbf{P}_{12}''$, $\cdots$ — als Parallelen zur Axe $OX$ —, welche in $\mathbf{P}_1'$ projiciert sind und auf denen die bezüglichen Punkte $A_{11}''$; $A_{12}''$, $\cdots$ liegen müssen.

Sucht man in dieser Weise die zweiten Projectionen zu allen den Punkten $A_1'$, $B_1'$, $\cdots$ in einer durch $a'$ gehenden Geraden $\mathbf{M}_1'$, so erhält man als ihren Ort die zweite Projection $\mathbf{M}_1''$ des bezüglichen Meridians der Fläche.

Wären die Projectionen eines Meridians $\mathbf{M}_1$ der Fläche gegeben, so bleibt die Construction unverändert mit Ersetzung von **C** durch $\mathbf{M}_1$. Schneidet der Kreis $\mathbf{P}_1'$ die erste Projection **C**$'$ der erzeugenden Curve oder den Radius $\mathbf{M}_1'$, soweit

er den Meridian $\mathbf{M}_1$ projiciert, nicht, so entspricht dem $A_1'$ kein Punkt der Fläche; es giebt im Allgemeinen einen grössten und einen kleinsten Parallelkreis auf derselben — man kann sie als Aequator und als Kehlkreis der Fläche bezeichnen — deren erste Projectionen einen Kreisring begrenzen, in welchem die ersten Projectionen aller Punkte der Fläche liegen, so dass man sagen darf, sie bilden den Umriss der Fläche in der ersten Projection.

Aus der zweiten Projection $B_1''$ eines Punktes der Fläche bestimmt sich sofort die der Axe $OX$ parallele zweite Projection des zugehörigen Parallelkreises $\mathbf{P}_2''$ und also auch die des Schnittpunktes des Letztern mit der erzeugenden Curve $\mathbf{C}$ oder der Meridianlinie $\mathbf{M}_1$, also auch die erste Projection desselben und somit die des Parallelkreises $\mathbf{P}_2$, in welcher dann in dem von $B_1''$ auf die Axe $OX$ gefällten Lothe die beiden ersten Projectionen $B_{11}'$, $B_{12}'$ sich finden, die dem $B_1''$ entsprechen.


Fig. 199.

Ist $\mathbf{M}_{xz}''$ die zweite Projection des zu $XOZ$ parallelen Meridians, so erkennt man, dass für einen Punkt $B_1''$ dann keine erste Projection und also auch kein Punkt der Rotationsfläche existiert, wenn $B_1''$ nicht in dem von den beiden Hälften des Meridians $\mathbf{M}_{xz}''$ mit den äussersten Parallelkreisen eingeschlossenen Flächenstücke und nicht in den Grenzen desselben liegt. Jener Meridian erscheint also als der Umriss der Fläche in der zweiten Projection; ebenso der Meridian $\mathbf{M}_{yz}'''$ für die dritte.

1) Man leite in orthogonaler Parallelprojection und für $a$ als parallel zu $OZ$ aus den Projectionen der erzeu-

genden Curve **C** den zur zweiten Projectionsebene parallelen Meridian ab und zwar sowohl seine Punkte als seine Tangenten; insbesondere, wenn die erzeugende Curve eine Schraubenlinie ist, deren Axe zur Rotationsaxe parallel ist.

Man erhält für einen Punkt $P$ der erzeugenden Curve mit der Tangente $t$ die Spitze $M$ des zugehörigen Parallelkreisberührungskegels als Schnitt der Axe $a$ mit einer durch $t$ gehenden Ebene, die die Gerade $PM$ zur Falllinie hat, d. h. deren erste Spur die vom ersten Durchstosspunkt von $t$ ausgehende Normale zu $P'a'$ ist.

2) Man construiere die Umriss-Hyperbel des einfachen Rotationshyperboloids durch Punkte und Tangenten aus der geraden Erzeugenden $g$ und der zu $OX$ parallelen Axe $a$.

3) In welchen Fällen hat eine Rotationsfläche keinen Umriss in der ersten Projection und in welchen Fällen ist nur ein Kehlkreis vorhanden?

4) Die Zahl der Punkte $A_{1i}$ der Fläche, welche einer gegebenen ersten Projection $A_1'$ entsprechen, hängt von der Gestalt des Meridians derselben ab.

5) Zu einer zweiten Projection $B_1''$ giebt es im Allgemeinen zwei Punkte $B_{11}$ und $B_{12}$ der Fläche. In welchen Fällen können vier oder mehrere solcher Punkte gefunden werden?

6) Man erläutere die Punkte der Umrisse als Ausnahmen von dieser Regel.

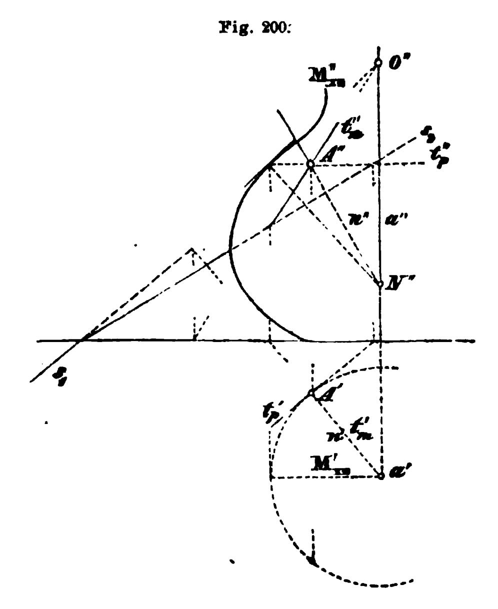
118. Die Darstellung der Tangentialebene **T** in einem Punkte $A$ der Rotationsfläche wird durch die Construction der Tangente $t_p$ des zugehörigen Parallelkreises **P** derselben und die der Tangente $t_m$ des zugehörigen Meridians **M** — als zweier in ihr liegender und sich rechtwinklig schneidender Geraden — geleistet (Fig. 200.). Für die zu $OZ$ parallele Lage der Axe $a$ und unter der Voraussetzung, dass der zur Ebene $XOZ$ parallele Meridian $\mathbf{M}_{xz}$ oder der zweite Umriss verzeichnet sei*), ergiebt sich $t_p$ in der ersten

*) Diese Voraussetzungen sollen im Folgenden überall gelten, wo nicht andere ausdrücklich erwähnt sind.

Projection als die Tangente von der des Parallelkreises in $A'$, d. h. als Normale zu $a'A'$ in $A'$ und $t_m'$ als Radius $a'A'$; dagegen erscheint $t_p$ in der zweiten Projection als die zu $OX$ parallele Gerade durch $A''$ und $t_m''$ wird erhalten, indem man $A''$ mit dem Punkte $O$ von $a''$ verbindet, wo diese geschnitten wird von derjenigen Tangente des Umrissmeridians $\mathbf{M}_{xz}''$, deren Berührungspunkt auf dem Parallelkreis von $A''$ liegt.

Man sieht daraus, dass die erste Spur der Tangentialebene im Punkte $A$ normal ist zur ersten Projection des Radius von $A$ in seinem Parallelkreis.

Fig. 200.



Errichtet man auf der Tangentialebene **T** im Berührungspunkt $A$ eine Normale $n$, so ist dieselbe die Normale der Fläche im Punkte $A$; von ihren Projectionen fällt somit die erste in den Radius $A'a'$, die zweite aber geht vom Punkte $A''$ nach demjenigen Punkte $N''$ der Axe $a''$, wo dieselbe von jener Normale des Meridians $\mathbf{M}_{xz}''$ getroffen wird, deren Fusspunkt im Parallelkreis von $A''$ liegt. Alle Normalen einer Rotationsfläche in Punkten des nämlichen Meridians liegen in der Ebene desselben; alle Normalen derselben in Punkten des nämlichen Parallelkreises bilden einen Rotationskegel von

der Axe $a$, der zugleich der Normalenkegel des zugehörigen Berührungskegels der Fläche über demselben Parallelkreis als Basis ist. (Vergl. § 97.; 4.)

Man sieht daraus, dass die Parallelkreise und Meridiane der Rotationsfläche aufgeschriebene Curven sind, von der speciellen Eigenschaft, dass die Normalen in den auf einander folgenden Punkten derselben sich schneiden, sodass die Gesammtheit dieser Normalen eine developpable Fläche bilden. Man nennt sie (vergl. § 103.; c.) die Krümmungslinien der Rotationsfläche.

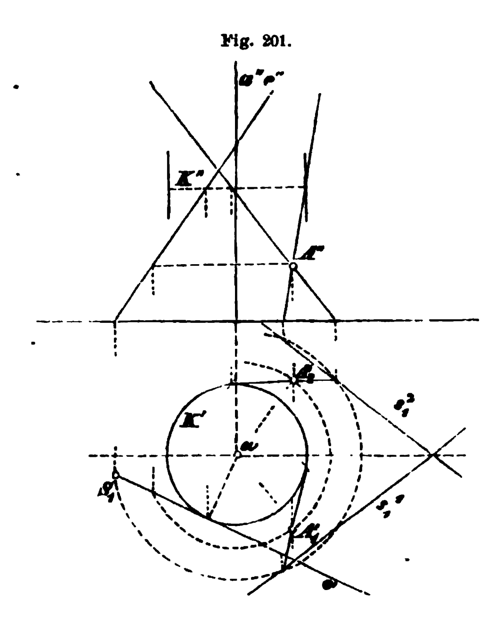
Wir wissen von den Curven der Haupttangenten der Fläche, — deren developpable Flächen der Fläche zugleich umschrieben sind, die also in sich die doppelte Erzeugungsweise der Fläche in § 115. liefern — dass die Richtungsdifferenzen ihrer Anfangselemente in irgend einem Punkte von denen der bezüglichen Krümmungslinien halbiert werden. (Vergl. § 103.; c.) Sie sind aber nur reell in den Regionen hyperbolischer Punkte, für eine Rotationsfläche also nur da, wo die Meridianlinie ihre Convexität der Axe zuwendet. Um sie zu construieren, würde man ein im betrachteten Punkte die Fläche osculierendes einfaches Hyperboloid verzeichnen müssen, und könnte vereinfachend (vergl. § 107.) seinen Mittelpunkt im Durchschnittspunkt der Axe mit der Normale der Fläche im betrachteten Punkt wählen, d. h. dasselbe als Rotationshyperboloid bestimmen, das den Berührungspunkt im Kehlkreis hat; die dem Punkte in ihm entsprechenden geraden Erzeugenden wären die gesuchten Haupttangenten.

1) Man construiere die Tangentialebenen und die Normalen einer Rotationsfläche in denjenigen Punkten derselben, die a) eine gegebene erste, b) eine gegebene zweite Projection haben.
2) Man bestimme die Tangentialebene in einem gegebenen Punkte der Rotationsfläche direct aus der Axe $a$ und der erzeugenden Curve C derselben; speciell für das durch eine Gerade $g$ erzeugte Rotationshyperboloid. Man erkläre die Construction in Fig. 201.
3) Man erörtere die Lage der Tangentialebenen der Fläche in den Punkten ihrer Umrisse als Specialfälle der allgemeinen.

4) Die Evolute des Meridians der Rotationsfläche darf als Rückkehrkante der developpabeln Fläche betrachtet werden, welche von den Normalen der Rotationsfläche in den auf einander folgenden Punkten des Meridians gebildet wird.

5) Die durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene gelegene Axe erzeugte Rotationsfläche — der Torus — ist zugleich die Enveloppe einer Kugelfläche von unveränderlichem Radius, deren Mittelpunkt einen Kreis beschreibt; derselbe werde näher bezeichnet.

Fig. 201.



6) Die Normalen einer Rotationsfläche in den Punkten desselben Parallelkreises bilden einen Rotationskegel um ihre Axe; die aus der Spitze desselben mit seiner Kantenlänge als Radius beschriebene Kugel berührt die Fläche nach dem Parallelkreis und dieselbe kann somit als die Enveloppe einer Kugel von stetig veränderlichem Radius betrachtet werden, deren Mittelpunkt die Axe durchläuft.

7) Die Linien der parabolischen Punkte der Rotationsflächen sind Parallellkreise.

8) Die Paare der Haupttangenten einer Rotationsfläche in den Punkten desselben Parallelkreises bilden ein einfaches Rotationshyperboloid, welches der Fläche nach diesem Parallel umschrieben ist.

9) Die Ebene des Parallelkreises ist zu den Tangentialebenen der Fläche und somit zu dieser selbst in allen Punkten desselben gleichgeneigt; ebenso die Ebene des Meridians und zwar diese speciell normal.

Allgemein: Wenn eine Ebene eine krumme Fläche überall unter gleichem Winkel schneidet, so ist ihre Schnittcurve mit dieser eine Krümmungslinie derselben. Denn die Fläche der Normalen ist developpabel, weil sie eine Fläche gleichen Falles gegen jene Ebene durch eine gegebene Curve ist. (Vergl. § 101.; 13.)

10) Die Meridiane der Rotationsflächen sind zugleich geodätische Linien derselben. Wenn eine Krümmungslinie einer Fläche zugleich eine geodätische Linie derselben ist, so muss sie eine ebene Curve sein.

119. Es ist für die darstellend geometrische Behandlung der Rotationsflächen wesentlich, dass ihre allgemeinen constructiven Eigenschaften aus der einfachen Natur der erzeugenden Bewegung, der Rotation um eine gerade Axe, hervorgehen, — während die aus der Natur der erzeugenden Curve entspringenden Eigenschaften nur dann zur Verwendung gelangen, wenn dieselbe nach ihrem geometrischen Gesetz bekannt ist, also z. B. im Falle der Rotationsflächen zweiten Grades.

Wir sehen hier von den Letzteren ab und nehmen an, die Fläche sei durch die zu $OZ$ parallele Axe $a$ und durch den zur zweiten Projectionsebene parallelen Meridian $\mathbf{M}_{xz}$ gegeben, welcher gezeichnet vorliegt.

In Folge dessen unterlassen wir die Erörterungen über Ordnung und Klasse der Fläche, ihre algebraische oder transcendente Natur, etc. Der Entwickelungsgang von solchen empirischen Elementen aus kann nicht mehr der streng theoretische sein; es ist am natürlichsten, die combinatorische Systematik der darstellend geometrischen Probleme hervortreten zu lassen und nach den Anforderungen derselben den Umfang mehr theoretischer Erörterungen zu bestimmen.

Ausgehend von a) der Darstellung der Fläche, ihrer Punkte und Tangentialebenen, damit auch der auf ihr gelegenen Curven und der ihr umschriebenen Developpabeln — wie solches durch die vorigen §§ begründet ist — wird man

b) zur Erörterung der Beziehungen der Fläche zu den geometrischen Grundgebilden, der Ebene, dem Punkt und der Geraden übergehen, d. h. zur Construction ihrer ebenen Schnitte oder ihrer Punktreihen in einer Ebene, ihrer Tangentenkegel oder ihrer Tangentialebenen aus einem Punkte und derjenigen Punkte und Ebenen der Fläche, welche sie mit einer Geraden gemein hat.

Als dritte Gruppe von Problemen wird sich anschliessen

c) die Erörterung der Beziehungen der Rotationsfläche zu gegebenen developpabeln Flächen und zu den Raumcurven, welche als Rückkehrkanten derselben auftreten; speciell zu Kegelflächen und zu ebenen Curven. (§§ 127., 128.)

Es werden folgen d) die Constructionen über die Beziehungen einer Rotationsfläche zu einer andern krummen Fläche, die nun eine Fläche zweiten Grades, eine windschiefe Regelfläche, eine andere Rotationsfläche, etc. sein kann; nämlich die Construction der Reihe ihrer gemeinschaftlichen Punkte oder ihrer Durchdringungscurve und die der Schaar ihrer gemeinschaftlichen Tangentialebenen oder ihrer gemeinsamen umschriebenen developpabeln Fläche. (§§ 129., 130.)

Endlich müssen e) die Beziehungen von drei krummen Flächen zu einander eine Erörterung finden (§ 130.).

Dabei ordnen sich der Gruppe b) die Bestimmung der Schattengrenzen und Schlagschattenräume an Rotationsflächen für Licht aus einer punktförmigen Quelle und die Bestimmung der Umrisse der Rotationsflächen in allgemeiner Lage gegen die Projectionsebenen ein. Zur Gruppe c) stellen wir die Construction umschriebener developpabeler Flächen von gegebenem Richtungskegel, die für den Fall, dass die Letztere ein Rotationskegel von bestimmter Axenrichtung ist, die Construction der Linien gleicher Helligkeit für Beleuchtung durch Licht aus einer unendlich entfernten punktförmigen Quelle

liefert, die man als Beleuchtungs-Constructionen bezeichnet hat.

Unter d) gehören endlich die Beziehungen der gemeinschaftlichen aufgeschriebenen Curve oder der gemeinsamen umschriebenen developpabeln Fläche zu den Elementarformen: Punkt, Ebene und gerade Linie.

Das Princip der Dualität scheidet alle diese Probleme wesentlich in zwei Gruppen; die Probleme der einen sind zu lösen mittelst der Punkte auf den Flächen und ihrer einfachsten Reihen oder der einfachsten aufgeschriebenen Curven, nämlich der Parallelkreise und Meridiane; die der andern mittelst der Tangentialebenen an die Fläche und ihrer einfachsten Schaaren oder der einfachsten umschriebenen Developpabeln, nämlich der Parallelkreis-Berührungskegel und der Meridian-Berührungscylinder — denn nur im Falle des einfachen Rotationshyperboloids giebt es noch einfachere aufgeschriebene Curven und umschriebene Developpabeln als diese, in den geraden Erzeugenden.

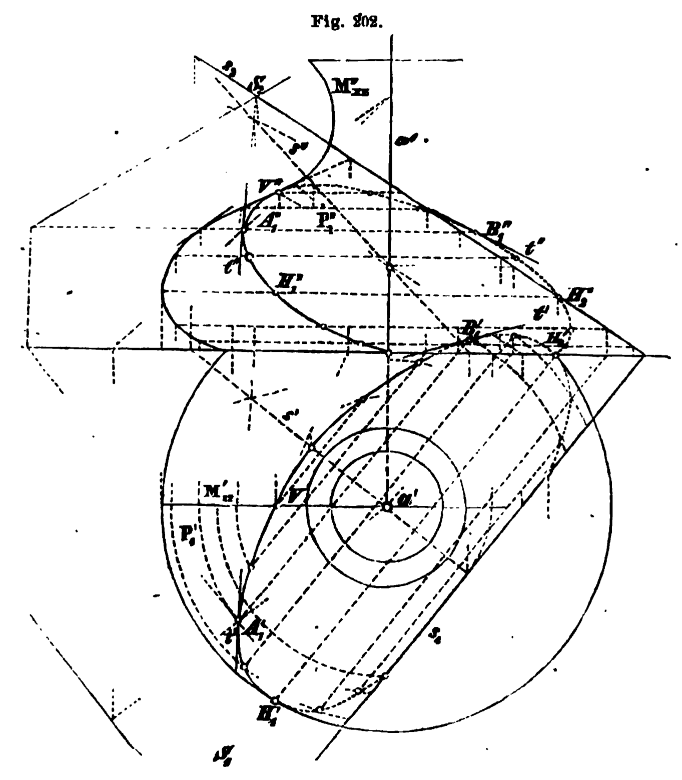
Es ist im Wesentlichen dieselbe Reihe der Probleme, auf die wir früher geführt sind und dasselbe dualistische Entsprechen besteht zwischen ihnen.

120. Der Querschnitt einer durch die Axe $a$ parallel $OZ$ und den Meridian $\mathbf{M}_{xz}$ gegebenen Rotationsfläche mit einer Ebene $\mathbf{E}$, die wir durch ihre Spuren $s_1$, $s_2$ bestimmt denken, kann mit Hilfe der Parallelkreise oder der Meridiane der Fläche gleich bequem construirt werden (Fig. 202). Denn die Ebene $\mathbf{E}$ wird von der Ebene des Parallelkreises $\mathbf{P}_i$ in einer durch ihren zweiten Durchstosspunkt und ihre Richtung parallel zur ersten Spur der Ebene bestimmten Geraden $p_i$ geschnitten, deren Durchschnittspunkte $A_i$, $B_i$ mit dem Kreise $\mathbf{P}_i$ sonach der Durchdringungscurve angehören.

Und die Ebene $\mathbf{E}$ wird von der Ebene des Meridians $\mathbf{M}_i$, den wir in beiden symmetrischen Hälften gezeichnet voraussetzen, in einer durch ihren ersten Durchstosspunkt und ihren Schnittpunkt mit der Axe $a$ bestimmten Geraden $m_i$ geschnitten, deren Durchschnittspunkte $C_i$, $D_i$ ... mit dem Meridian $\mathbf{M}_i$ auf derselben Curve liegen. Jene Punkte $A_i$, $B_i$ erhält man in der ersten Projection direct und daraus in der zweiten, die Punkte $C_i$, $D_i$ ... aber bestimmt man mit Hilfe des Meridians $\mathbf{M}_{xz}$

durch Drehung der Geraden $m_i$ in die Ebene desselben in $(m_i)$ und nachherige Zurückführung der gefundenen Schnittpunkte $(C_i)$, $(D_i)$ in die ursprüngliche Lage. Indem man den Parallelkreis $\mathbf{P}_t$ alle Lagen durchlaufen lässt, in denen er den Meridian $\mathbf{M}_{xz}$ schneidet, erhält man unzweifelhaft alle Punkte der Durchschnittscurve in Paaren; ebenso indem man den Meridian $\mathbf{M}_i$ um die Axe $a$ eine ganze Umdrehung machen lässt. Mit Hilfe der Parallelkreise wird man insbesondere die Punkte $H$

Fig. 202.



bestimmen, in welchen die erste Projection der Schnittcurve den ersten Umriss der Fläche trifft; mit Hilfe des Meridians $\mathbf{M}_{xz}$ aber die Punkte $V$, in welchen ihre zweite Projection dem zweiten Umriss begegnet.

Die Construction zeigt, dass die Durchschnittslinie $s$ der Schnittebene $\mathbf{E}$ mit der zu ihr normalen Meridianebene $\mathbf{M}_i$ eine Axe orthogonaler Symmetrie für

die Durchschnittscurve ist, und zwar insbesondere $s'$ eine Axe orthogonaler Symmetrie für die erste und $s''$ eine Axe schräger Symmetrie, nämlich für Parallelen zur Axe $OX$, für die zweite Projection derselben (Fig. 202). Diese Symmetrie hat zur Folge, dass auch die Tangenten in je zwei entsprechenden Punkten $A_i$, $B_i$ der Curve sich in der Axe $s$ durchschneiden, wie diess auch direct aus der Construction derselben hervorgeht. Denn die Tangente in einem Punkte $A_i$ der Schnittcurve ist die Durchschnittslinie der zugehörigen Tangentialebene der Rotationsfläche mit der Schnittebene; und da die Tangentialebenen der Rotationsfläche in zwei Punkten $A_i$, $B_i$ desselben Parallelkreises sich in einer Geraden der Meridianebene $\mathbf{M}_s$ schneiden, welche die Strecke $A_iB_i$ halbiert, so begegnen die entsprechenden Tangenten der Durchschnittscurve sich in einem Punkte von s; speciell also ihre ersten Projectionen in einem Punkte von $s'$ und die zweiten in der entsprechenden zweiten Projection dieses Punktes auf $s''$.

In Folge dieser Symmetrie haben diejenigen Punkte der Schnittcurve, welche in der Symmetrieaxe $s$ liegen, die besondere Eigenschaft, dass ihre Tangenten zur Symmetrieebene normal, d. h. zur ersten Projectionsebene und somit zur ersten Spur der Schnittebene parallel sind; speciell in der ersten Projection normal $s'$ oder parallel der besagten Spur, in der zweiten parallel $OX$. Da in Folge dessen ihre Coordinaten $z$ grösser, respective kleiner sind, als die aller andern insbesondere ihrer beiderseitigen Nachbarpunkte, so kann man sie unter Annahme der $XOY$ als einer horizontalen Ebene als die höchsten respective tiefsten Punkte der Schnittcurve bezeichnen. Sie werden offenbar mittelst des Symmetrie-Meridians $\mathbf{M}_s$ direct construiert.

1) Wie ersetzt man die nicht verzeichnete Hälfte des Umrissmeridians in der Construction?
2) Wenn dem grössten respective kleinsten Parallkreis der Fläche speciell ein Parallelkreis-Berührungscylinder entspricht, so sind die ersten Projectionen der Punkte $H$ der Schnittcurve in jenen Parallelkreisen speciell Berührungspunkte ihrer ersten Projection mit dem Umriss der Fläche in dieser.
3) Man erläutere die Symmetrie-Eigenschaften derjenigen

ebenen Schnitte einer Rotationsfläche, welche durch eine erste respective eine zweite projicierende Ebene gebildet werden.

4) Wie gestalten sich die Symmetrie-Verhältnisse der Durchschnittscurve einer Ebene mit einer Rotationsfläche in Parallelprojection bei schräger Lage ihrer Axe gegen die Projectionsebenen?

5) Die Centralprojection der Schnittcurve einer Rotationsfläche von allgemeiner Lage der Axe mit einer Ebene **E** zeigt die Eigenschaften der involutorischen Symmetrie, d. i. ihre beiden Theile entsprechen einander in einer involutorischen Collineation. Die Axe $s'$ derselben ist die Projection der Schnittlinie der Ebene **E** mit der zu ihr normalen Ebene durch die Axe $a$ und das entsprechende Centrum ist der Fluchtpunkt der Normalen zu dieser Ebene; also ein Punkt, der zugleich in der Fluchtlinie der Schnittebene liegt.

6) Ist es angemessen, von diesen Methoden für die Construction der ebenen Schnitte von Rotationskegeln und Rotationscylindern Gebrauch zu machen?

7) Die ersten Projectionen aller ebenen Schnitte des einfachen Rotationshyperboloides berühren den Umriss desselben in der ersten Projection.

8) Der ebene Schnitt der Rotationsfläche des Torus ist eine Curve vierter Ordnung, welche in den unendlich fernen nicht reellen Kreispunkten ihrer Ebene zwei Doppelpunkte hat. Wenn eine Ebene die Fläche in zwei Punkten berührt, so hat die Schnittcurve derselben mit der Fläche vier Doppelpunkte und zerfällt in zwei Kegelschnitte, welche Kreise sein müssen. Welches sind ihre Durchmesser?

9) Man construiere den Schnitt des einfachen Rotationshyperboloids von der Axe $a$ parallel $OZ$ und der geraden Erzeugenden $e$ — parallel zu $XOZ$ — mit der Ebene **E**.

10) Wie construiert man die in die Symmetrieaxe $s$ der Curve fallenden Scheitel desselben falls sie eine Ellipse ist und wie sodann die beiden andern Scheitel?

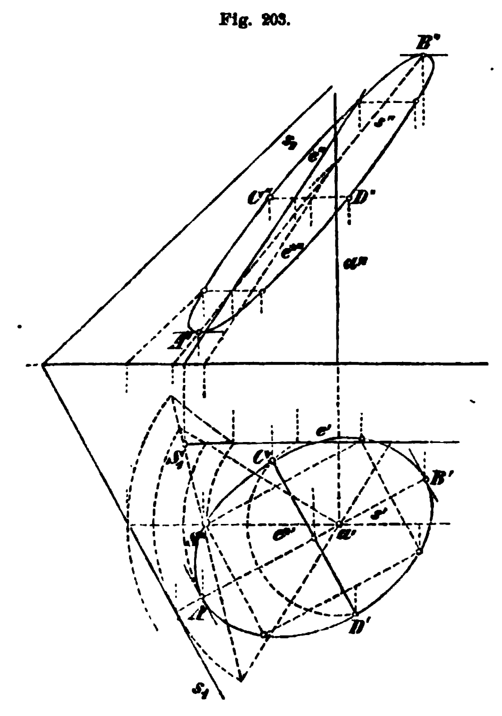
11) Wie erkennt man aus der Lage der Erzeugenden $e$

und der Schnittebene **E** die Art des Schnittes auf dem Rotationshyperboloid? (Vergl. § 92.)

12) Man construiere im Falle des hyperbolischen Schnittes direct die Asymptoten und die Scheitel der Schnittcurve.

Man kann offenbar für jeden Parallelkreis $P_i$ der Fläche, als einem bestimmten Punkte von $e$ entsprechend, die Construction des Textes anwenden; man kann aber auch ebenso für jeden beliebigen Meridian $\mathbf{M}_i$ der Fläche die Punkte des Schnittes $C_i$, $D_i$ be-

Fig. 203.




stimmen, indem man bemerkt, dass dieselben in der Geraden $s_i$ liegen müssen, welche diese Meridianebene mit der Schnittebene **E** gemein hat, und dass man ferner die Schnittpunkte von $s_i$ mit dem durch die Drehung von $e$ erzeugten Hyperboloid auf denselben Parallelkreisen finden muss, auf welchen die Schnittpunkte von $e$ mit dem durch die Drehung von $s_i$ erzeugten Kegel gelegen sind. Man bestimmt also

(Fig. 203.) nach § 64. die Letzteren und in $s_i$ selbst dann auf den besagten Parallelkreisen die Ersteren, $C_i$ und $D_i$. Die zugehörigen Tangenten der Schnittcurve bestimmt man mittelst der Bemerkung, dass die erste Spur der entsprechenden Tangentialebene der Rotationsfläche vom ersten Durchstosspunkt der durch $C_i$, respective $D_i$ gehenden Erzeugenden der Schaar $e$ normal zu $a'C_i'$, respective $a'D_i'$ sein muss. Nach den Symmetrieeigenschaften giebt die Benutzung eines einzigen Meridians zwei Paare von Punkten und durch Construction ihrer Tangenten ist die Schnittcurve als Kegelschnitt vollkommen bestimmt.

121. Der Berührungskegel einer Rotationsfläche aus einem gegebenen Punkte $L$ wird mit Hilfe der Parallelkreisberührungskegel oder der Meridianberührungscylinder der Fläche construiert, da jeder der erstern im Allgemeinen zwei und jeder der letztern eine von der Gestalt des Meridians abhängige Zahl von Tangentialebenen durch einen Punkt besitzt, die zu dem fraglichen Kegel gehören und deren Berührungspunkte mit der Fläche auf dem zugehörigen Parallel oder Meridian die zugehörigen Erzeugenden des Berührungskegels bestimmen.

Dem Parallelkreis $\mathbf{P}_i$ entspreche der Berührungskegel $\mathbf{P}_i^k$ von der Spitze $S_i$ und derselbe schneide die durch $L$ gehende zu $XOY$ parallele Ebene in dem Kreise $K_i$, so bestimmen die von $L$ an den letzteren gehenden Tangenten durch ihre Berührungspunkte die beiden Erzeugenden des Kegels $\mathbf{P}_i^k$, längs welcher derselbe von Ebenen aus $L$ berührt wird und ihre Schnittpunkte mit dem Parallelkreis $\mathbf{P}_i$ sind zwei Punkte $A_i$, $B_i$ der Berührungscurve des von $L$ ausgehenden umschriebenen Kegels mit der Fläche. Man erkennt, dass der über dem Durchmesser $a'L'$ beschriebene Kreis $K$ in der ersten Projection für alle Parallelkreisberührungskegel als Hilfskreis dient, weil er der Ort der Berührungspunkte aller der Tangentenpaare ist, die von $L'$ an die Kreise $K_i'$ gehen, in denen diese Kegel die zu $XOY$ parallele Ebene durch $L$ schneiden.

Andererseits entspricht dem Meridian $\mathbf{M}_i$ ein Berührungscylinder $\mathbf{M}_i^c$, der durch die Zurückführung mit seinem Meridian nach $\mathbf{M}_{xz}$ mit dem Berührungscylinder längs der Curve des

zweiten Umrisses zusammenfällt und an welchen daher die Tangentialebenen aus $L$ gelegt werden, indem man den Fusspunkt der von $L$ auf $\mathbf{M}_i$ gefällten Normale auch in jene Ebene $\mathbf{M}_{xz}$ überführt und von da die Tangentialebenen jenes Umrisscylinders bestimmt; die Zurückführung der Berührungspunkte im Umrissmeridian giebt die Punkte $C_i$, $D_i$, ... der Berührungscurve des Kegels aus $L$ auf dem Meridian $\mathbf{M}_i$; dabei erscheint derselbe Kreis $K$ in der ersten Projection als Hilfskreis als der Ort der Fusspunkte der Normalen von $L'$ auf die ersten Projectionen $\mathbf{M}_i'$ der fraglichen Meridiane.

Nach der Methode der Parallelkreisberührungskegel ist evident, dass die Berührungscurve und mit ihr der Berührungskegel orthogonal symmetrisch ist in Bezug auf die Ebene $La$, die Meridianebene nach dem gegebenen Scheitel; die Punkte jener Curve $A_i$, $B_i$ liegen in Paaren auf Normalen zu dieser Ebene und die zugehörigen Tangenten treffen je in einem Punkte derselben zusammen.

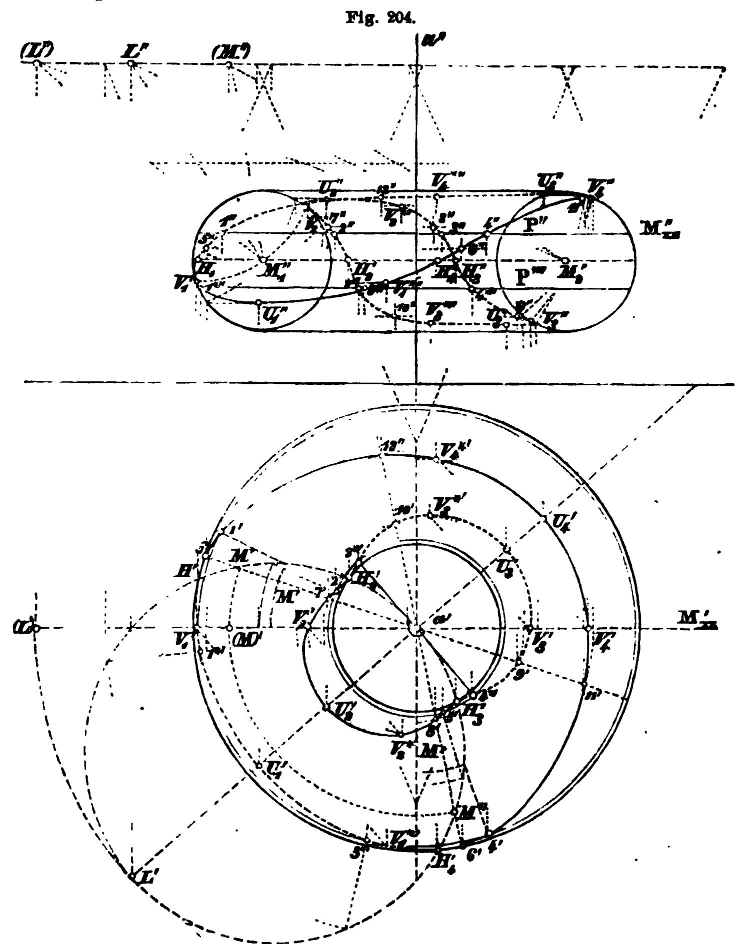
Mit Hilfe der Parallelkreis-Berührungskegel bestimmt man die Punkte $H$ der Berührungscurve, welche im ersten Umriss der Fläche liegen; mit Hilfe der Meridianberührungscylinder dagegen die Punkte $V$ im zweiten Umriss der Fläche, eben durch den zugehörigen Umrisscylinder, und die Punkte $U$ im Meridian $\mathbf{L}a$ als die höchsten oder tiefsten Punkte der Curve, d. i. als Punkte, deren Tangente normal $La$ oder parallel zur Ebene $XOY$ ist.

In Fig. 204. ist die Durchführung für den Torus vom Umrissmeridian $\mathbf{M}_{xz}$ für den Leuchtpunkt $L$ gegeben.

Mittelst des Kreises über $L'a'$ als Durchmesser sind die Punkte $H_1$, $H_2$, $H_3$, $H_4$ im ersten Umriss und mittelst des Punktes $L''$ und des zweiten Umrisses die Punkte $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ im zweiten Umriss bestimmt worden, dazu die symmetrisch entsprechenden $V_1^*$, ...; mittelst $(L)$ die höchsten und tiefsten Punkte $U_1$, $U_2$, $U_3$, $U_4$. Ferner hat man für die zur Mittelebene $M_1 M_2$ symmetrischen Parallelkreisebenen $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^*$ die Punkte 1, 2, 3, 4, 1*, 2*, 3*, 4* mittelst der entsprechenden Berührungskegel und für die zur Ebene $La$ symmetrischen Meridiane $\mathbf{M}$, $\mathbf{M}^*$ die Punkte 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 mittelst $M$ und $(M)$ bestimmt.

1) Man bestimme diejenigen Tangentenebenen einer Rotationsfläche, welche durch einen gegebenen Punkt gehen und unter vorgeschriebenem Winkel zur Axe derselben geneigt sind; speciell die einer gegebenen Geraden parallelen Tangentialebenen dieser Art.

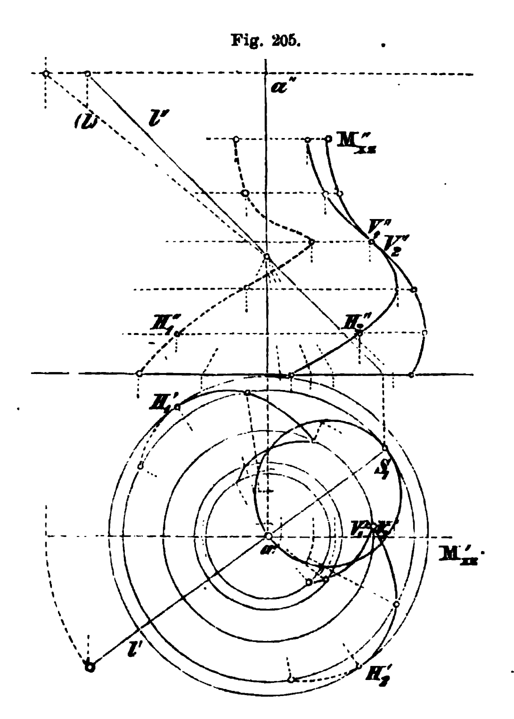
Fig. 204.



2) Mit Hilfe der Kugel bestimme man die Stellungen derjenigen Ebenen, welche mit den Projectionsebenen $XOY$ und $XOZ$ vorgeschriebene Winkel machen — indem man nach einander den zu $OZ$ und den zu $OY$ parallelen Durchmesser als ihre Axe betrachtet.

3) Diejenigen Tangentialebenen einer Rotationsfläche zu ermitteln, welche einen gegebenen Punkt enthalten und zu einer gegebenen, zur Axe normalen Geraden parallel sind.
4) Welches sind die Symmetrieverhältnisse der centralprojectivischen Darstellung des Berührungskegels einer Rotationsfläche mit schräger Axe und der Berührungscurve zwischen beiden? (Vergl. § 60.; 4.)
5) Welche Vereinfachungen entspringen aus dem Character als Rotationsfläche für die Construction des Berühr-

Fig. 205.



ungskegels von gegebenem Scheitel an ein Rotations-Ellipsoid, oder ein zweifaches Rotationshyperboloid?
6) Die Construction des Berührungscylinders parallel der Geraden $l$ in Fig. 205. ist zu erklären — warum zeigt die Berührungscurve keine höchsten und tiefsten Punkte?
7) Man verzeichne den Berührungscylinder a) einer Vasen-

form, b) eines Torus, d. h. der durch Rotation eines Kreises um eine in seiner Ebene gelegene und ihn nicht schneidende Axe entstehenden Fläche; bei gegebener Richtung der Erzeugenden.

8) Man erörtere die Uebertragung der speciellen Eigenschaften des Berührungscylinders und seiner Berührungscurve am Rotations-Ellipsoid auf die centrisch-collineare Transformation des Systems.

9) Man interpretiere die vorhergehenden Constructionen als Bestimmungen der Schattengrenzen an Rotationsflächen für Licht aus einer endlich oder unendlich entfernten punktförmigen Quelle und füge die Schlagschatten auf die Projectionsebenen hinzu.

10) Die Curve, in welcher der Berührungskegel einer Fläche dieselbe berührt, ist eine Raumcurve und die Spur des Kegels in einer beliebigen Ebene ist als das Bild der Raumcurve aus seinem Scheitel anzusehen.

Da die besagte Raumcurve im Allgemeinen keine stationären Punkte besitzt, so hat jene Spur Doppelpunkte nur in den Punkten, welche einer die Fläche zweifach berührenden Erzeugenden des Kegels angehören, und sie kann Rückkehrpunkte nur in denjenigen Erzeugenden haben, welche zugleich Tangenten der Raumcurve sind. Weil aber die Tangente der Berührungscurve und die nach ihrem Berührungspunkt gehende Erzeugende des Tangentenkegels conjugierte Tangenten der Fläche sind, so können sie nur in einer der Haupttangenten der Fläche zusammenfallen, d. h. Rückkehrpunkte der Spur des Berührungskegels entspringen aus denjenigen Punkten der Fläche, für welche eine Haupttangente durch den Scheitel des Kegels geht. (§ 82.) Diese Erzeugenden sind die dem Scheitel entsprechenden Erzeugenden desjenigen coaxialen Rotationshyperboloids, welches die Rotationsfläche in allen Punkten eines Parallelkreises osculiert. (§ 118.)

11) Man mache die Anwendung des Vorigen auf den Berührungs-Kegel oder Cylinder der Fläche des Torus in 7., b).

12) Der Berührungscylinder von gegebener Richtung für eine Rotationsfläche zweiten Grades steht zu den gleichgerichteten Berührungscylindern aller der Rotationsflächen von derselben Axe, deren Meridiane durch Parallelverschiebung des Meridians der Fläche zweiter Ordnung in seiner Ebene erhalten werden können, in einer sehr einfachen für die Construction der Berührungscurve der Letzteren benutzbaren Beziehung. Da die Berührungscurve der Rotationsfläche zweiten Grades und mit ihr der Berührungscylinder bei einer Parallelverschiebung derselben und unveränderter Richtung des Cylinders auch nur durch Parallelverschiebung geändert wird, so sind der Meridian-Berührungscylinder längs eines Halbmeridians für die Fläche zweiten Grades und die Transformierte congruent und die Punkte der Berührungscurve für die letztere liegen also auf denselben Parallelkreisen und in den nämlichen Radien derselben wie die der Berührungscurve für die erstere und um die Verschiebungsgrösse von ihnen entfernt. Die Berührungscurven solcher Rotationsflächen mit umschriebenen Cylindern entstehen also aus Curven zweiten Grades, indem man die zur Axe der Rotationsfläche normalen Radien derselben um die nämliche Grösse, nämlich den Abstand des Mittelpunkts des Meridiankegelschnitts von der Axe, vergrössert.

13) Man wende diess auf die Fläche des Torus an und erläutere insbesondere die Benutzung der Methode für die Construction der Spur des Berührungscylinders in einer Ebene.

122. Einen für die Darstellung wichtigen Specialfall bildet die Bestimmung der projicierenden Berührungscylinder und Kegel der Rotationsflächen bei allgemeiner Lage ihrer Axen; denn die Spuren derselben in den respectiven Bildebenen sind die Umrisse ihrer Bilder. In dem speciellen Fall orthogonaler Parallelprojection mit einer zur Rotationsaxe parallelen Axe $OZ$ erhält man die Spuren gewisser Parallelkreis- und Meridian-Berührungscylinder direct als Umrisse; im allgemeinen Fall schräger Lage der Axe $a$ in Parallelprojection und für Cen-

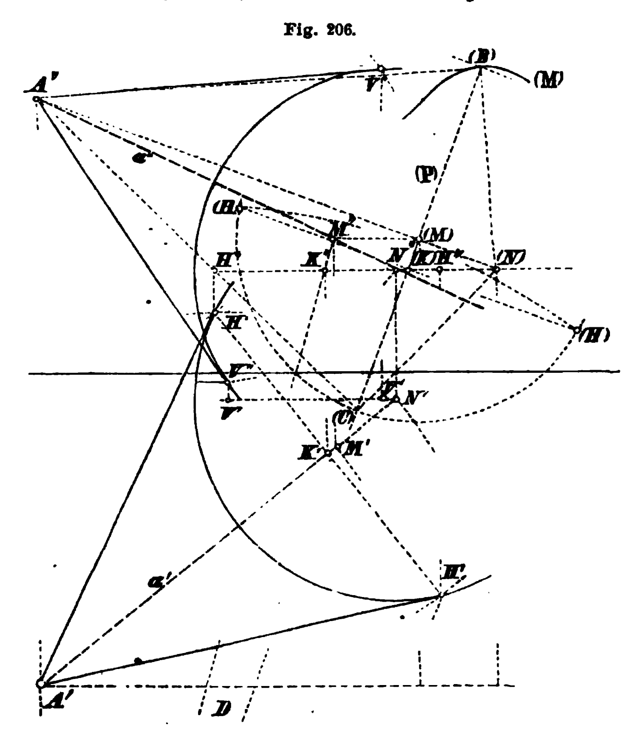
tralprojection dienen die Parallelkreisberührungskegel und Meridianberührungscylinder der Fläche zur Ermittelung ihrer Umrisse nach § 121., indem im Allgemeinen jeder der erstern zwei Punkte und jeder der letzteren eine von der Gestalt des Meridians abhängige Zahl von Punkten für jeden Umriss liefert. Die projicierende Linie, welche durch die Spitze des Kegels respective Cylinders geht, trifft die Ebene seiner Basis, d. h. des entsprechenden Parallelkreises oder Meridians in einem Punkte, durch welchen an diese Tangenten gehen, die sie in den entsprechenden Punkten des Umrisses berühren.

Der Umriss einer Rotationsfläche in Centralprojection für schrägliegende, also durch Flucht- und Durchstosspunkt $Q'S$ bestimmte Axe $a$ wird durch diese Mittel wie folgt bestimmt. (Vergl. Fig. 140.) Denken wir in jedem Parallelkreis den zur Bildebene parallelen Durchmesser, so bilden alle diese einen Meridian der Fläche, welcher der gemeinsamen Fluchtlinie $q'$ aller Parallelkreise d. h. der Fluchtlinie der Normalebenen von $a$, parallel ist; sei dieser Meridian dargestellt, so ergiebt sich für jeden Punkt desselben das Bild des zugehörigen Parallelkreisdurchmessers und das der Spitze des entsprechenden Parallelkreisberührungskegels. Bestimmen wir also den Schnittpunkt der projicierenden Linie der Letztern mit der Ebene des Parallelkreises und seine Umlegung in die den bezeichneten Durchmesser enthaltende Parallelebene zur Bildebene — immer mittelst des festen Collineationscentrums der Parallelkreisebenen — so liefern die von da an die Umlegung des Parallelkreises gehenden Tangenten in ihren Berührungspunkten durch deren Zurückführung in die Ebene die betreffenden Punkte des Umrisses und ihre Tangenten. Man kann auch entsprechend der Ausführung in § 121. die Schnitte aller dieser Parallelkreisberührungskegel mit der durch das Centrum gehenden Normalebene der Axe benutzen.

Für die Ausführung in Parallelprojection und beispielsweise für den ersten Umriss denken wir die erste projicierende Ebene der Axe $a$ als neue zweite Projectionsebene wie in Fig. 139. (§ 69.) oder wir machen sie parallel der zweiten Projectionsebene wie in Fig. 206. und verzeichnen den in ihr enthaltenen Meridian ${}_1\mathbf{M}_1''$ oder $\mathbf{M}$; ist dann ${}_1\mathbf{P}_1''$ oder $(\mathbf{P})$ mit

den Endpunkten ${}_1B''$, ${}_1C''$ oder $(B)$, $(C)$ ein Parallelkreis mit $A$ als Scheitel des entsprechenden Parallelkreisberührungskegels, so ist $D$ der Durchschnittspunkt der ersten projicierenden Linie von $A$ mit der Ebene des Parallelkreises und bei Drehung des Letztern um $BCD$ in die neue zweite Projectionsebene erhält man in $(H)$, $(H)$ mit $(K)$ als Mitte der entsprechenden Sehne die Berührungspunkte seiner von $D$ ausgehenden Tangenten; deren erste Projectionen in $A'H'$,

Fig. 206.



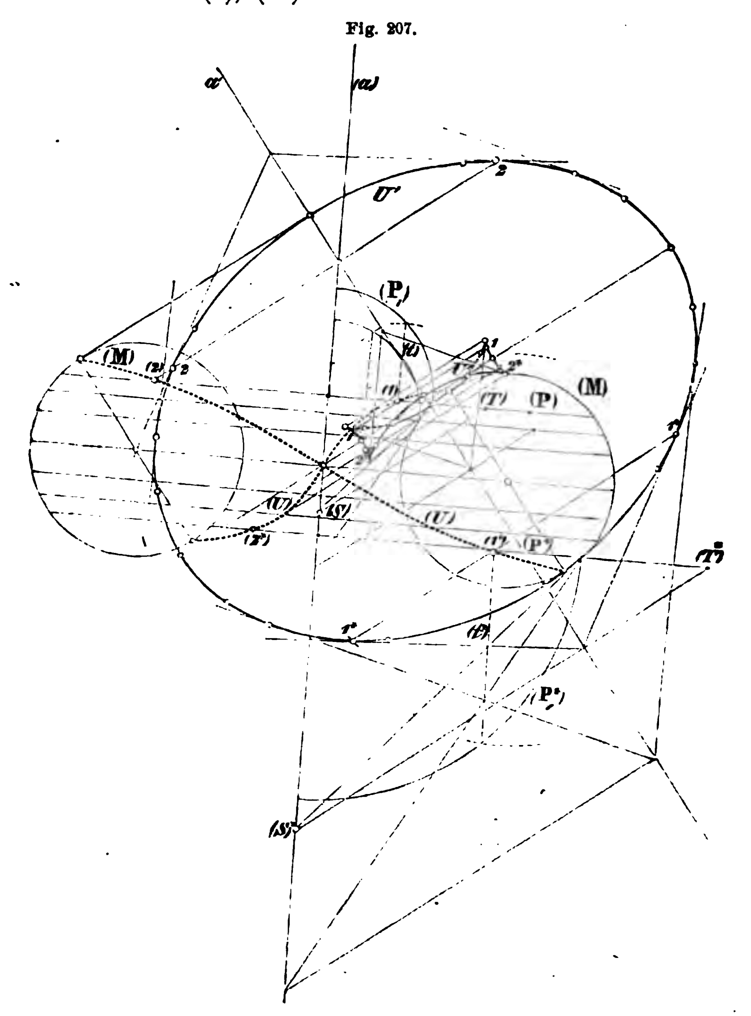

$A'H'$ die ersten Umrisse des Parallelkreisberührungskegels bilden, während die $H'$ selbst dem ersten Umriss der Rotationsfläche angehören. Bezeichnet man durch ${}_1N''$ oder $(N)$ die neue zweite Projection des Scheitels des Normalenkegels, sodass $N''$, $N'$ seine Originalprojectionen sind, so erhellt, dass $N''K''H''$ in derselben Parallelen zur Axe $OX$ und dass $N'H = {}_1N''\,{}_1B''$ und auf $A'H'$ respective rechtwinklig sein müssen. (Vergl. § 118.; 6.)

Die Umrisslinie ist für die projicierende Ebene der Axe rechtwinklig symmetrisch und erscheint daher in involutorischer Collineation mit sich selbst für den Normalenfluchtpunkt dieser Ebene als Centrum und für das Bild der Axe als Axe der Collineation.

1) Man verzeichne den ersten und zweiten Umriss einer gefässförmigen Rotationsfläche von schräger Axe *a*.
2) Welche Construction ergiebt die Benutzung der Meridianberührungscylinder der Rotationsfläche für die Bestimmung ihrer Umrisse?
3) Welche besonderen Punkte der Umrisse erhält man direct durch die Methode der Parallelkreisberührungskegel, welche erfordern die der Meridianberührungscylinder?
4) Man verzeichne den centralprojectivischen Umriss eines Torus bei schrägliegender Axe desselben.
5) Welche Vereinfachungen der Construction entspringen a) aus dem Parallelismus der Axe zur Bildebene, b) aus ihrem Normalsein zu derselben?
6) Man discutiere die Frage vom Umriss der Kugel in Centralprojection.
7) In welchem speciellen Falle der Lage der Axe *a* wird der Umriss einer Rotationsfläche in Centralprojection ein Kreis?
8) Man characterisiere in den parallelprojectivischen Umrissen des Torus die Rückkehr- und die Doppelpunkte. In der Fig. 207. ist $a'$ als erste Projection der Axe $a$ des Torus und $(a)$ als die Umlegung der Axe mit ihrer ersten projicierenden Ebene in die Ebene $XOY$, $(\mathbf{M})$ als die Umlegung des entsprechenden Meridians gedacht. Sind dann $(\mathbf{P})$, $(\mathbf{P}^*)$ zwei Parallelkreisebenen, die symmetrisch gegen den Aequator liegen, so erhält man als Spitzen der betreffenden Berührungskegel $(S)$ und $(S^*)$ und die symmetrisch gegen den Aequator gelegenen Punkte der Axen; in $(T)$, $(T^*)$ sodann die Fusspunkte der durch diese gelegten projicierenden Strahlen in den bezüglichen Basisebenen; ihre Polaren $(t)$, $(t^*)$ in Bezug auf diese Basen $\mathbf{P}_1$ und $\mathbf{P}_1{}^*$ sind eingetragen und liefern in (1) und (1*) auf $(\mathbf{P})$ re-

spective (P*) Punkte der Umrisslinie in der Hilfsprojection. Die beiden andern in denselben Ebenen gelegenen Parallelkreise geben in gleicher Weise die Punkte (2), (2*). Fällt man dann von diesen Punk-

Fig. 207.



ten die Normalen zu $a'$ und trägt man von ihren Fusspunkten aus auf diese die Längen von $(t)$ respective $(t^*)$ ab, so erhält man die Punkte 1, 1; 2, 2; 1*, 1*; 2*, 2* der Umrisslinie selbst. Die entpsre-

chenden Tangenten erhält man als die Spuren der betreffenden Tangentialebenen, z. B. die in 1* als nach dem Durchschnittspunkt von $a'$ mit $(S^*)$ $(T^*)$ gehend. (Fig. 207.)

Die Punkte des Umrisses in der Axe $a'$ erhält man durch die zu $a'$ normalen Tangenten des Meridians (**M**); dem Aequator der Fläche entsprechen die Punkte des Umrisses, deren Tangenten zu $a'$ parallel sind. Für die Bestimmung der Rückkehrpunkte und ihrer Tangenten, sowie für die der Doppelpunkte vergleiche man § 121.; 10. respective § 82.

123. Eine Gerade $g$ hat mit der Rotationsfläche Punkte respective Tangentialebenen gemein. Jede durch dieselbe gelegte Ebene schneidet die Fläche in einer Curve, welche mit der Geraden die fraglichen Punkte bestimmt, die Schnittcurve in einer derselben genügt somit zur Bestimmung der Punkte. Im Allgemeinen wird eine projicierende Ebene der Geraden am bequemsten zu benutzen sein. Schneidet die Gerade die Axe $a$ der Rotationsfläche, so benutzt man den durch sie gehenden Meridian; ist ihre Richtung in der Stellung der Normalebenen zur Axe $a$ enthalten, so ist der durch sie mögliche Parallelkreis am vortheilhaftesten. Denkt man die Gerade $g$ um die Axe $a$ gedreht, so erzeugt sie im Allgemeinen ein einfaches Rotationshyperboloid, welches die gegebene Rotationsfläche in einer Anzahl von Parallelkreisen schneidet, die man natürlich aus den gemeinsamen Punkten der in derselben Ebene gelegenen Meridiane der Flächen bestimmt. Die Schnittpunkte von $g$ mit der gegebenen Rotationsfläche sind die Punkte, welche $g$ mit diesen Parallelkreisen gemein hat.

Andererseits bestimmt jeder Punkt auf der Geraden $g$ mit der Rotationsfläche einen Berührungskegel, welcher mit $g$ die Tangentialebenen gemein hat, die der Aufgabe entsprechen. Der zu $g$ parallele Berührungscylinder kann zur Construction derselben dienen. Schneidet die Gerade $g$ die Axe $a$, so benutzt man den Parallelkreisberührungskegel, der den Schnittpunkt zur Spitze hat; liegt sie in einer zur Axe $a$ normalen Ebene, so dient der Meridian-Berührungscylinder ebenso zweckmässig, dessen Meridian zu ihr normal ist.

Denkt man wieder das Rotationshyperboloid, welches durch die Drehung von $g$ um die Axe $a$ entsteht, so hat dasselbe mit der gegebenen Rotationsfläche eine Anzahl von Parallelkreisberührungskegeln gemein und die gesuchten Ebenen sind diejenigen Tangentialebenen dieser Kegel, welche die Gerade $g$ enthalten.

1) Tangentialebenen einer Rotationsfläche von gegebener Stellung, d. h. parallel einer gegebenen Ebene construiert man, indem man bedenkt, dass ihr Neigungswinkel gegen die Rotationsaxe die Parallelkreisberührungskegel der Fläche bestimmt, zu denen dieselben gehören müssen. Mit welcher der Methoden des Textes fällt das daraus entspringende Verfahren zusammen?
2) Die vorige Aufgabe kann gefasst werden als die Construction der Normalen der Rotationsfläche von gegebener Richtung. Diese kann man aber direct bestimmen, da ihre Fusspunkte in dem zu dieser Richtung parallelen Meridian der Fläche liegen müssen und sie selbst die Normalen des Letztern von der vorgeschriebenen Richtung sind.
3) Man construiere die Normalen einer Rotationsfläche, welche von einem gegebenen Punkte ausgehen.
4) Die Normalen einer Rotationsfläche, welche einer gegebenen Ebene parallel sind, entsprechen Tangentialebenen, welche die Richtung der Normale dieser Ebene enthalten, d. h. Ebenen des Berührungscylinders der Fläche in der Richtung dieser Normale. Man kann sonach noch einen Ort ihrer Fusspunkte z. B. als gegebenen Parallelkreis, Meridian oder ebenen Schnitt derselben voraussetzen. Für Parallelkreise und Meridiane ergeben sich directe Methoden aus der Bemerkung, dass die Normalen eines der ersteren einen Rotationskegel mit der Axe $a$ bilden, während die eines der letzteren in seiner Ebene liegen.
5) Welche der vorigen Aufgaben lassen sich als Aufgaben über die Bestimmung der Beleuchtungsverhältnisse der Rotationsflächen interpretieren?
6) Alle Berührungscylinder derselben Fläche, deren Er-

zeugende einer Ebene parallel sind, haben eine Schaar gemeinschaftlicher Tangentialebenen parallel zu dieser. Alle parallelen ebenen Schnitte derselben Fläche sind anzusehen als durch die nämlichen unendlich entfernten Punkte gehend.

124. Die Construction der Fusspunkte der Normalen von bestimmter Richtung an eine Fläche ist als die der hellsten Punkte derselben für die Beleuchtung aus einer unendlich entfernten punktförmigen Quelle interpretiert worden; ein weit allgemeineres Problem, das analoger Interpretation fähig ist, giebt die Construction der Berührungspunkte solcher Tangentialebenen einer Fläche, welche gegen eine gegebene Gerade einen bestimmten constanten Winkel machen. Diese Tangentialebenen bilden in ihrer stetigen Aufeinanderfolge eine der Fläche umschriebene Developpable von bestimmtem Richtungskegel; derselbe ist ein Rotationskegel mit der gegebenen Geraden als Axe und dem bezeichneten constanten Winkel als halben Winkel an der Spitze.

Wenn die Fläche durch Licht aus einer unendlich fernen punktförmigen Quelle und nur durch das directe Licht derselben beleuchtet gedacht wird, wenn dasselbe wie im leeren Raume sich fortpflanzend von der Oberfläche als von einer mathematischen Fläche so aufgenommen wird, dass die entstehende Helligkeit dem cosinus oder sinus des Einfallswinkels gegen die Normale oder gegen die Tangentialebene proportional ist, dann ist die bezeichnete Developpable eine Fläche gleicher Licht-Intensität und die Curve, nach welcher sie die Fläche berührt, bezeichnet auf dieser den Ort von Punkten gleicher durch jene Function des Einfallswinkels gemessener Helligkeit.

Von den hellsten Punkten an, wo der einfallende Strahl mit der Normale zusammenfällt und sie umschliessend entsteht ein System von Linien gleicher abnehmender Intensität bis zu der Schattengrenze hin, in welcher der Einfallswinkel gegen die Normale zum rechten Winkel geworden ist. Die zugehörigen developpabeln Flächen gehen vom normal einfallenden Strahl oder der Ebene aus durch alle In-

tensitäten über zu dem berührenden Cylinder von der Intensität Null.

Und wenn ihre Berührungscurven die Beleuchtungsverhältnisse nur unter den vorbezeichneten, in Wirklichkeit nie erfüllbaren Voraussetzungen richtig angeben, so zeichnen sie jedenfalls sehr deutlich die Gestalt der Oberfläche, da sie uns die Lage ihrer Tangentialebene überall vergegenwärtigen. Diese letztere für die Darstellung der Fläche wichtigste Bedeutung behalten sie auch auf der nicht beleuchteten Seite der Fläche, jenseits der Schattengrenze, wo der einfallende Strahl in einen aus der Fläche austretenden verwandelt wird; diese Curven ziehen sich hier schliesslich wieder zu den Punkten zusammen, in welchen der austretende Strahl mit der Flächennormale identisch ist.

Das System dieser Curven bietet die mathematische Grundlage für die Darstellung der Beleuchtungsverhältnisse der Flächen. Wir denken die Linien der Licht-Intensitäten 0, 1; 0, 2; ⋯ 0, 9; 1, 0 oder der Dunkelheiten 0, 9; 0, 8; ⋯ 0, 1; 0, 0 construiert, die Linien also, in deren Punkten der sinus des Einfallswinkels gegen die Normale die bezeichnete Folge von Werthen hat; wir nehmen sodann einen Tuscheton von solcher Dunkelheit, dass sich der einfach aufgetragene von dem zweifach über einander getragenen deutlich unterscheidet, während andererseits die zehnfache Uebereinandertragung desselben noch nicht das volle Schwarz erzeugt, in welchem die constructiven Resultate verschwinden müssten, die etwa erhalten bleiben sollen, und tragen denselben von der Linie der Dunkelheit 0, 1 ab auf der den hellsten Punkten abgewendeten Seite einmal, sodann von der der Dunkelheit 0, 2 ab zweimal, etc., endlich von der Linie der Schattengrenze ab nach der unbeleuchteten Seite zum zehntenmale auf und haben damit die geometrische Beleuchtung der Oberfläche dargestellt, soweit es unter Bewahrung der zehn Stufen und der entsprechenden Linien gleicher Intensität geschehen kann. Wir können aber selbst die Linien gleicher Neigung der Tangentialebenen gegen den einfallenden Strahl auf der unbeleuchteten Seite der Fläche beibehalten und für die täuschendere Schattengebung benutzen, wenn wir über das von den

umgebenden Flächen in den Schattenraum hinein zerstreute und dort die Fläche erhellende Licht die Voraussetzung machen, dass die mittlere Richtung desselben die des einfallenden Strahls mit entgegengesetztem Sinne und dass seine Intensität ein bestimmter Bruchtheil z. B. die Hälfte von der des einfallenden Lichtes sei. Dann bezeichnen die auf einander folgenden Linien gleicher Neigung der Tangentialebene zum einfallenden Strahl im beschatteten Theil der Fläche die Orte der gleichen Abnahme der Dunkelheit um je eine halbe Stufe und der Fusspunkt eines austretenden Normalstrahls wird ein Punkt mit dem Maximum des Reflexlichts sein, d. h. ein Punkt, dessen Dunkelheit nur der Stufe fünf entspricht. Wenn man alle in einer parallel-projectivischen Darstellung erscheinenden Flächen für die gleiche Richtung des einfallenden Lichtstrahls so behandelt, so erhält man eine der Wahrheit der Erscheinung überraschend gut entsprechende Darstellung der Beleuchtungsverhältnisse.

1) Die Helligkeit einer Ebene ist überall dieselbe; man bestimme die Helligkeiten der Projectionsebenen, ebenso die der beleuchteten Flächen eines Polyeders.
2) Die Linien gleicher Intensität für die developpabeln Flächen sind ihre erzeugenden Geraden.
3) Die Linien gleicher Intensität für Rotationsflächen, deren Axen die Richtung des einfallenden Lichts haben, sind die Parallelkreise derselben; speciell für die Kugel also Kreise in zum Lichtstrahl normalen Ebenen.
4) Eine ebene Curve ist überall von gleicher Helligkeit; eine Raumcurve hat in jedem ihrer Punkte die Helligkeit der entsprechenden Schmiegungsebene.
5) Die so zu sagen objectiven Beleuchtungsverhältnisse, welche nach dem Vorigen für parallelprojectivische Darstellung gefunden werden, gestatten keine Modification nach Vorder-, Mittel- und Hintergrund, weil überhaupt kein betrachtendes Auge in endlicher Entfernung der Parallelprojection entspricht.
6) In der centralprojectivischen Darstellung erleiden die

construierten objectiven Beleuchtungsverhältnisse für das im Centrum gedachte Auge Modificationen, welche wir als nicht construierbar bezeichnen dürfen.

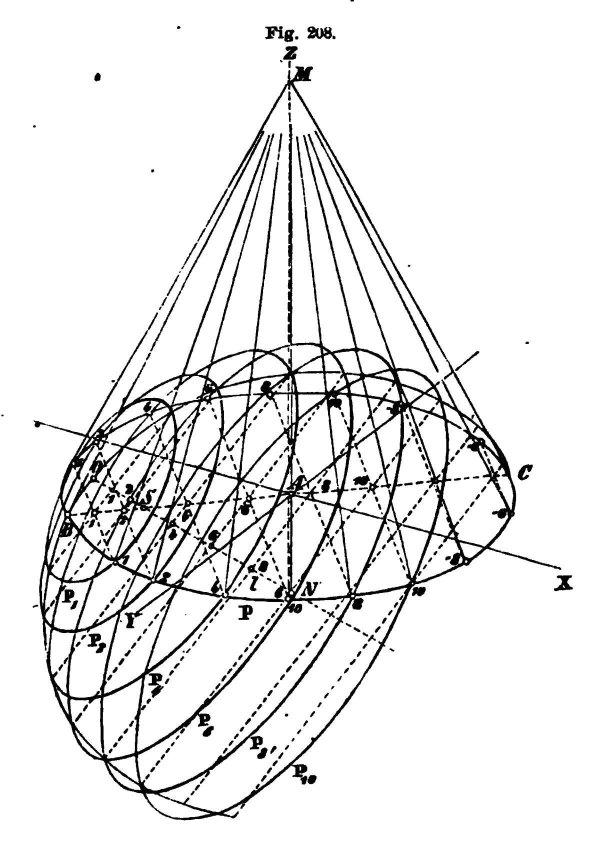
125. Die Erzeugenden, welche die Intensitätslinien einer developpabeln Fläche für die zehn Stufen der Beleuchtungsscala sind, wird man als die Parallelen zu den entsprechenden d. i. gleichbeleuchteten Erzeugenden ihres Richtungskegels erhalten können; die Beleuchtungsconstructionen developpabler Flächen kommen also auf die der Kegel insbesondere zurück. Für jenen Kegel ergiebt sich aber zunächst als das einfache Mittel ihrer Bestimmung die Darstellung seines Schnittes durch eine zum einfallenden Strahl normale Ebene und die Bestimmung der Berührungspunkte der gemeinschaftlichen Tangenten desselben mit den Kreisen, welche in derselben Normalebene die Spuren der mit dem gegebenen concentrischen um den Lichtstrahl durch die Spitze als Axe und mit den Einfallswinkeln gegen die Tangentialebene für die verschiedenen Stufen als halben Winkeln an der Spitze beschriebenen Rotationskegel sind.

Denkt man sodann einer krummen Fläche eine Schaar von Berührungskegeln umschrieben, so liefert jeder einzelne derselben auf seiner Berührungscurve mit der Fläche die Punkte der verschiedenen Intensitäten der Scala, und durch die Verbindung der Punkte von gleicher Intensität entständen die Intensitätslinien der Fläche. Unsere Betrachtung hat nun gezeigt, dass den Flächen zweiten Grades als einfachste umschriebene Developpable Rotationskegel angehören, aus den Punkten der die Fläche schneidenden Focalcurve (§ 101.; 20.); dass die einfachsten umschriebenen Developpablen der windschiefen Regelflächen die Ebenenbüschel durch ihre erzeugenden Geraden d. h. Rotationscylinder von unendlich kleinem Durchmesser sind; dass endlich den Rotationsflächen Rotationskegel längs der Parallelkreise und congruente Cylinder längs der Meridiane umschrieben sind. Wir schliessen somit, dass die Construction der Intensitätslinien von Rotationskegeln und von Cylindern mit gegebenem Normalschnitt und zwar bei zu einer Projectionsebene normaler Lage der Axe oder Erzeugenden, da jede andere durch Transformation auf diese zurückführbar ist,

zur Ermittelung der Beleuchtungsverhältnisse aller Flächen der genannten Hauptgattungen genügen würde.

Zu einer zweckmässigen Construction für diese gelangen wir aber durch folgende Betrachtung. Sei P mit dem Mittelpunkt $A$ (Fig. 208.) ein Parallelkreis des Rotationskegels

Fig. 208.




von der Spitze $M$, $N$ aber die Spitze des zugehörigen Normalenkegels, $l$ das Bild des durch die Letztere gehenden Lichtstrahls mit dem Fusspunkt $S$ in der Basisebene, so handelt es sich darum, die Erzeugenden des Kegels $N$, P zu construieren, welche zugleich auf Rotationskegeln von der Axe $l$ und dem Scheitel $N$ liegen, deren halber Winkel an der Spitze der Einfallswinkel $i_n$ gegen die Normale des Kegels

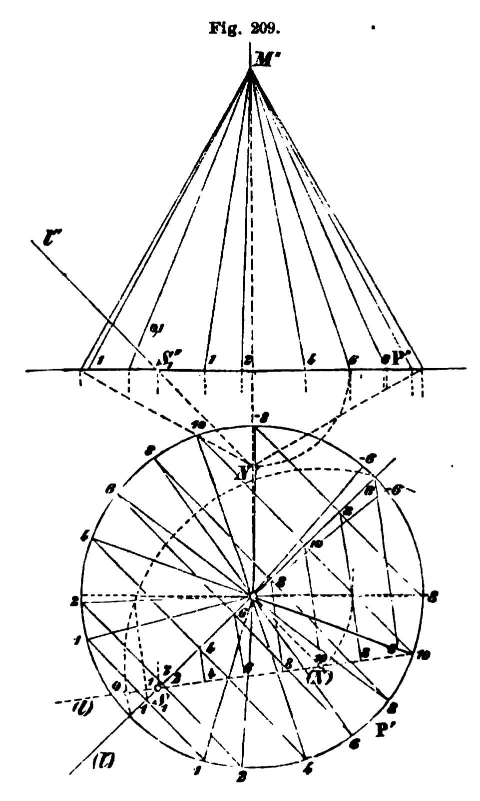
$M$, P als der beleuchteten Fläche ist; diese Erzeugenden geben in P die Punkte an, welche zu den Erzeugenden von der Beleuchtungsintensität $\cos i_n$ gehören.

Man wird diese letzteren Punkte direct erhalten, wenn man dem Rotationskegel aus $N$ um $l$ dieselbe Länge der Erzeugenden giebt, wie sie der Normalenkegel $N$, P besitzt, da dann die Basen beider Kegel P, $P_l$ als auf derselben Kugel liegend sich schneiden müssen, wenn die Kegel selbst gemeinsame Erzeugende haben. Ist also $BC$ der mit der Orthogonalprojection des Lichtstrahls auf die Basisebene $P$ zusammenfallende Durchmesser von P und trägt man $NB = NC$ auf $l$ in $NO$ ab, theilt sodann $ON$ in 10 gleiche Theile $O1$ oder $01 = 12 = 23 = \cdots 9N$, so sind die durch diese Theilpunkte gehenden Normalebenen zu $l$ die Basisebenen der den Beleuchtungs-Intensitäten der Stufen 9, 8, 7, ⋯ 1 entsprechenden Rotationskegel, indess die durch 0 und $N$ respective der Maximal-Intensität 10 und der Schattengrenze mit der Intensität 0 entsprechen; die Spuren dieser Normalebenen in der Ebene P sind zu $BC$ normal und äquidistant unter einander, man wird also nur den Anfangs- und Endpunkt der auf $BC$ durch sie erzeugten Gleichtheilung zu bestimmen brauchen, um sie zu erhalten und in ihren Schnittpunkten mit P die Punkte der Erzeugenden von den entsprechenden Helligkeiten oder den Schattenstufen 0, 1, 2, ⋯, 10 für den Kegel $M$, P zu finden; und man hat endlich nur jene Theilung in $BC$ über 10 hinaus gleichmässig fortzusetzen zu 9*, 8*, 7*, ⋯ und die entsprechenden Punkte von P zu bestimmen, um die Erzeugenden der nichtbeleuchteten Kegelfläche zu erhalten, in deren Punkten die Normalen mit dem Lichtstrahl dieselben Winkel machen, wie in den gleichnumerierten Erzeugenden der beleuchteten Seite. Die Ausführung dieser Operationen in Orthogonalprojection ist in Fig. 209. gegeben, eine Umlegung des Punktes $N$ mit der den Lichtstrahl $l$ auf die Basis projicierenden Ebene in die Ebene der Basis ist die einzige vermittelnde Operation.

1) Die Erzeugende von der grössten Helligkeit geht durch $B$ und ihre Schattenstufe ist durch die Zahl von Einheiten gegeben, welche die Lage des Punktes $B$ in der Zehntheilung auf $BC$ ausdrückt.

2) Wie bestimmt man die einer gegebenen Erzeugenden entsprechende Schattenstufe?
3) Wenn dem Punkte $C$ in der Zehntheilung auf $BC$ die Zahl $r^*$ entspricht, so ist mit Berücksichtigung des Reflexlichts nach § 124. die Schattenstufe von $MC$ ausgedrückt durch $5 + \frac{r^*}{2}$.

Fig. 209.



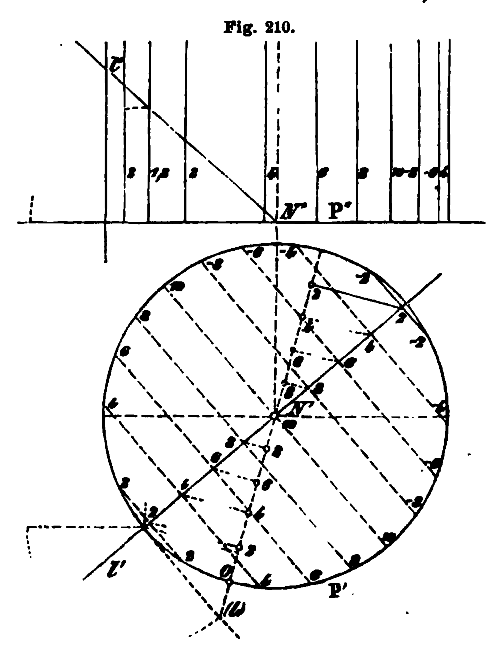
4) Wenn besitzt der Kegel $M$, **P** eine vollbeleuchtete Erzeugende, d. h. eine Erzeugende von der Schattenstufe 0?
5) Die Basiskreise $\mathbf{P}_i$ der Rotationskegel aus $N$ um $l$ sind die Intensitätslinien der Kugel aus dem Mittelpunkt $N$ mit dem Halbmesser $NB$ (Fig. 208.), d. h. der dem Kegel $M$, **P** nach dem Parallel **P** eingeschriebenen Kugel;

insofern also dieser Kegel der Parallelkreisberührungskegel einer Rotationsfläche nach dem Parallel **P** ist, sind sie die Intensitätslinien der nach diesem Parallel der Fläche eingeschriebenen Kugel.

6) Die nach § 64.; 7. bestimmten Schattengrenzen liefern den Endpunkt 10 der Gleichtheilung in $BC$.

7) Für den Rotationscylinder vom Normalschnitt **P** fällt $N$ mit dem Mittelpunkt $A$ der Basis zusammen; ist $l$ der durch ihn gehende Lichtstrahl und $N0 = NB = NC$ für $BC$ als den Durchmesser, der die Ortho-

Fig. 210.




gonalprojection des Lichtstrahls $l$ auf die Basis enthält, so giebt $0N$ den Anfangs- und Endpunkt der Zehntheilung in $l$, und die Normalebene durch 0 zu $l$ in $BC$ den Anfangspunkt der entsprechenden, während $N$ oder $A$ ihr Endpunkt ist. (Fig. 210.) Dieselbe Construction bleibt also auf den Cylinder anwendbar. Weil aber der Anfangspunkt der Theilung nur von der Neigung des Lichtstrahls gegen die Ebene von **P** abhängt, so giebt dieselbe Construction die Erzeu-

genden der gleichnamigen Schattenstufen für alle Cylinder, deren Normalschnitte mit P in derselben Ebene liegen; die Normalen der Letztern in den Fusspunkten der gleichbeleuchteten Erzeugenden und also auch die Tangenten derselben in ihnen sind parallel.

8) Man verzeichne die Erzeugenden der zehn Schattenstufen für einen Cylinder, dessen Normalschnitt in einer projicierenden Ebene liegt.

9) Man bestimme unter den Ebenen eines Büschels diejenigen, welchen die bestimmten Schattenstufen zukommen — indem man die Scheitelkante als einen unendlich dünnen Rotationscylinder betrachtet. (Vergl. § 59., 8.)

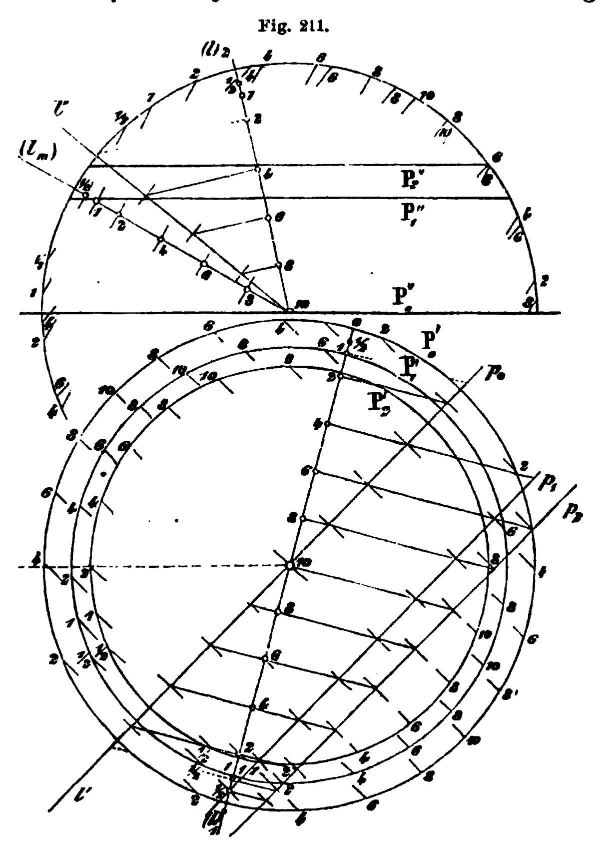
10) Man construiere die Erzeugenden der zehn Schattenstufen für einen Rotationskegel, dessen Axe einer Projectionsebene parallel ist.

11) Ebenso für einen Rotationscylinder von allgemeinster Lage der Axe.

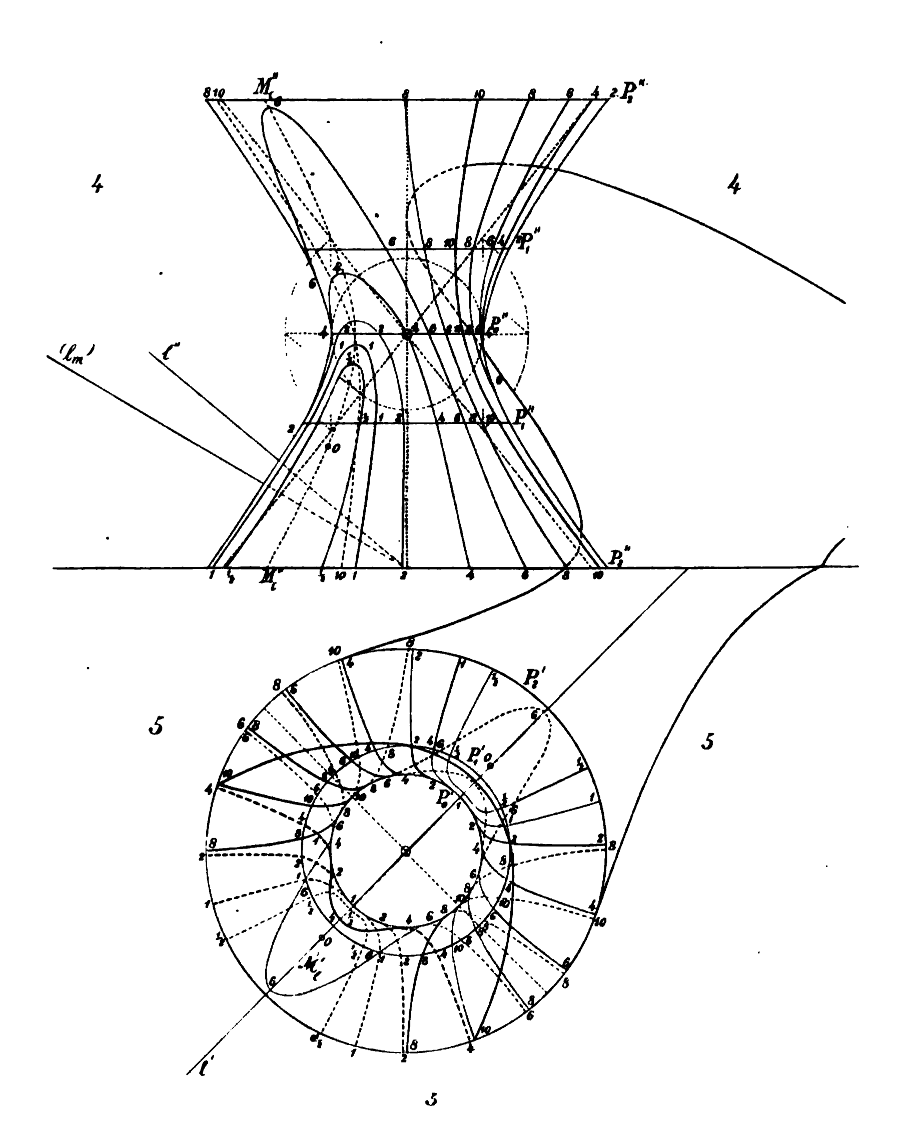
126. Mit den im vorigen § entwickelten einfachen Mitteln lässt sich die Construction der Linien gleicher Neigung der Fläche gegen den einfallenden Strahl oder der **Intensitätslinien aller Stufen** leicht für eine **Rotationsfläche** durchführen. Denken wir die Axe derselben parallel $OZ$, so findet man für jeden **Parallelkreis** durch die vorige Construction die Punkte der verschiedenen Intensitäten; eine Vereinfachung der Arbeit ist nur insofern möglich und erwünscht, als man die Länge $NO$ für alle Parallelkreiskegel constant nehmen und dadurch die Wiederholung der Theilungen vermeiden kann. Man verlegt die Scheitel der Normalenkegel sämmtlich an einen Punkt und denkt sie durch die nämliche aus diesem Punkte beschriebene Kugel geschnitten; indem man für die dadurch bestimmten Basen derselben die Construction ausführt, erhält man stets dieselbe Theilung auf dem Lichtstrahl $l$ und nur die auf seiner Projection $l'$ wird verändert, jedoch aus jener durch dieselben Parallelen in allen Fällen erhalten. Die Punkte der verschiedenen Schattenstufen in den auf dieser Kugel gelegenen Basiskreisen liefern aber die entsprechenden Punkte in den Parallelkreisen der Rotationsfläche als auf parallelen Radien liegend. Die

Fig. 211. und Tafel XII. zeigen die Durchführung dieses Verfahrens für ein einfaches Rotationshyperboloid. Die Punkte der Intensitäten 0, 5; 1, 2, 4, 6, 8, 10 und die der gleichen Neigung der Tangentialebenen im Schattenraume sind für den Kehlkreis $P_0$ und für die Paare der zu ihm symmetrisch gelegenen Parallelkreise $P_1$ und $P_2$ construiert und zwar in Fig. 211.

Fig. 211.



für die gleichbezeichneten entsprechenden Parallelkreise der Kugel vom Radius Eins und aus dieser durch Uebertragung mittelst paralleler Radien in Tafel XII. eingetragen. In Fig. 211. sind $p_0$ in $l'$, $p_1$, $p_2$ die Schnittlinien der Parallelkreise $P_0$, $P_1$, $P_2$ mit der Ebene des Lichtmeridians in ihrer Umlegung mit diesem in die als Grundriss-Ebene benutzte Ebene $P_0$; auf sie ist die Theilung in die zehn Stufen von der Um-




5

legung des Lichtstrahls $(l)_1$ aus durch Normalen übertragen, um von da aus die Punkte der besagten Intensitäten in den Parallelkreisen im Grundriss zu erhalten. Im Aufriss derselben Figur sind mittelst der Umlegung $(l_m)$ des Lichtstrahls im Meridian bis zum Parallelismus mit $XOZ$ die Lagen der hellsten Punkte 0 und der höchsten und tiefsten Punkte der Intensitätslinien 0, 5; 1, 2, 4, 6 ermittelt. Die betreffenden Punkte des Kreises im Aufriss von Fig. 211. geben durch ihre Tangenten die Parallelen derjenigen Tangenten der Umrisshyperbel im Aufriss von Tafel XII., deren Berührungspunkte durch Zurückführung in den Lichtmeridian $\mathbf{M}_1$ jene Punkte liefern; die Bestimmung der besagten Punkte der Umrisshyperbel ist mittelst der Brennpunkte und des Hauptkreises derselben nach den Sätzen in § 35.; 11 f. geschehen.

Endlich sind die Punkte der Intensitätslinien im verticalen Umriss selbst mit Benutzung derselben Eigenschaften ermittelt, nachdem die entsprechenden Tangentenlagen in Fig. 211. von der Umlegung $(l)_2$ des Lichtstrahls mit seiner zweiten projicierenden Ebene in die Ebene $XOZ$ aus auf dem Kreise daselbst bestimmt waren. Dabei ist in Tafel XII. der Grundsatz befolgt worden, in der Verticalprojection nur die Intensitätslinien der sichtbaren Hälfte einzutragen, während im Grundriss alle, die unsichtbaren als punktiert, erscheinen, um die Symmetrieverhältnisse ihrer Vertheilung anschaulich zu machen. Im Grundriss schliesst sich auch in den obern Punkten 10 auf $\mathbf{P}_2$ die Schlagschattencurve im Innern des Hyperboloids an, die mit Benutzung der Ergebnisse von § 99.; 9. am einfachsten bestimmt wird. Die Schlagschattengrenze für beide Projectionsebenen ist eingetragen; die Dunkelheiten derselben im beleuchteten Theil sind durch die eingetragenen Zahlen 5 und 4 respective bezeichnet.

Die Intensitätslinien des einfachen Hyperboloids und überhaupt die der Flächen zweiten Grades sind Raumcurven vierter Ordnung. (Vergl. § 100., Tafel XI.; § 102.)

Es ist offenbar, dass man bei der bezeichneten Construction zugleich die Beleuchtung der Hilfskugel construiert und man sieht, dass umgekehrt aus der einmal genau durchgeführten Construction der Intensitätslinien einer Kugelfläche

die Intensitätslinien jeder Rotationsfläche für dieselbe Beleuchtung abgeleitet werden können.

Ebenso einfach lassen sich aber die Punkte der Intensitätslinien in allen Meridianen der Rotationsfläche construieren; durch die Congruenz aller Meridianberührungscylinder kommen die Constructionen für sie alle überdiess auf Constructionen am Umrissmeridian zurück. Denken wir den Lichtstrahl $l$ durch einen Punkt $N$ der Axe $a$, und die bestimmte Länge $NO$ desselben auf einen Meridian $\mathbf{M}_1$ in $NO_1$ projiciert, so führen wir $NO_1$ mit $\mathbf{M}_1$ in die Lage $\mathbf{M}_{xz}$ über in $N(O_1)$ und construieren an $\mathbf{M}_{xz}$ für den durch $N(O_1)$ und $O_1O$ bestimmten Lichtstrahl die Punkte der verschiedenen Intensitätslinien, um dieselben dann in den Meridian $\mathbf{M}_1$ zurückzuführen.

Die Construction für zwei zum Meridian $a, l$ gleichgeneigte Meridiane führt hiernach offenbar zu denselben Punkten des Meridians $\mathbf{M}_{xz}$ und es ergiebt sich also aus beiden Constructionsmethoden die orthogonale Symmetrie der Intensitätslinien der Rotationsfläche zu dem dem Lichtstrahl parallelen Meridian; im Falle der Existenz einer zur Axe $a$ normalen Ebene rechtwinkliger Symmetrie der Fläche, also für die Rotationsflächen zweiten Grades, den Torus und alle durch Rotation eines Kegelschnitts um eine in seiner Ebene gelegenen Parallele einer Axe, etc. zeigen die Intensitätslinien überdiess eine centrische Symmetrie für den Mittelpunkt der Fläche.

Man wird jedenfalls wie oben für das Hyperboloid die höchsten und tiefsten Punkte der Intensitätslinien im Lichtmeridian $\mathbf{M}_1$ oder $l, a$ und ebenso die Punkte im Umrissmeridian $\mathbf{M}_{xz}$ nach der Methode der Meridianberührungscylinder bestimmen, im Uebrigen aber die Methode der Parallelkreisberührungskegel benutzen.

1) Man construiere die Intensitätslinien des Torus und seiner beiden durch den Cylinder begrenzten Hälften, der den Ort des Mittelpunktes seines Meridians zum Normalschnitt hat; man discutiere ihre Specialitäten.
2) Die Intensitätslinien des Torus können aus denen der Kugel durch eine Transformation derselben Art her-

geleitet werden, wie in § 121.; 12. die Schattengrenze des Torus.

3) Die Punkte maximaler Helligkeit auf einer Rotationsfläche und ebenso die der grössten Reflexwirkung werden nach § 123.; 2. bestimmt.

4) Die Constructionsmethoden des vorigen § übertragen sich auch auf andere Flächen, namentlich die Enveloppen einer beweglichen Kugel von constantem Halbmesser, oder die Enveloppen beweglicher Rotationskegel; sie wenden sich also z. B. auf Flächen zweiten Grades im Allgemeinen an. Man erörtere die Construction der Intensitätslinien für die Fläche, welche ein Kreis von unveränderlichem Halbmesser beschreibt, wenn sein Mittelpunkt eine cylindrische Schraubenlinie durchläuft, während seine Ebene stets normal zur bezüglichen Tangente derselben — also gleichgeneigt gegen die Schraubenaxe bleibt.

5) Wie können die Tangenten der Intensitätslinien des einfachen Rotationshyperboloids construiert werden?

6) Die Intensitätslinien des Torus — die Schattengrenze eingeschlossen — für seine Aussenfläche endigen als Linien reeller Beleuchtung in den Punkten, wo die Erzeugende der umschriebenen Developpabeln mit einer der Haupttangenten des betrachteten Flächenpunktes zusammen und also in die Tangente der Berührungscurve auf der Fläche hinein fällt.

127. Den vorhergehenden Problemen schliessen sich die über die Durchdringungen der Rotationsflächen mit Kegeln und Cylindern eng an.

Sei eine Rotationsfläche von der Axe $a$ parallel $OZ$ und dem Umrissmeridian $\mathbf{M}_{xz}$ und ein Kegel durch seine Spitze $M$ und seine Leitcurve oder insbesondere seine Spur $\mathbf{S}_1$ in der ersten Projectionsebene gegeben, so werden die Punkte der Durchdringung auf einem beliebigen Parallelkreis $\mathbf{P}_i$ der Fläche gefunden, indem man durch die Spitze $M$ und diesen Parallel einen Kegel denkt, und die Erzeugenden desselben bestimmt, welche zugleich dem gegebenen Kegel angehören; dazu verzeichnet man die kreisförmige Spur dieses Hilfskegels in der ersten Projectionsebene aus dem Mittelpunkt und

einem Punkte der Peripherie, etwa dem im Umrissmeridian gelegenen, und ihrer Durchschnittspunkte mit der Spur $s_1$; die Geraden von diesen Punkten nach $M$ schneiden den Parallelkreis $P_i$ in den Punkten der Durchdringungscurve. Die zugehörigen Tangenten der Durchdringungscurve sind die Durchschnittslinien der entsprechenden Tangentialebenen des Kegels und der Rotationsfläche; man bestimmt ihre ersten Durchstosspunkte als Schnitte der ersten Spuren dieser Tangentialebenen.

Die gefundene Durchdringungscurve kann als der von irgend einer Leitcurve des Kegels $M$, $s_1$ bei Beleuchtung aus dem Punkte $M$ auf die Fläche geworfene Schlagschatten angesehen werden.

Es ist offenbar, dass dieselbe Construction und gleichzeitig Interpretation auf die Durchdringungscurve einer Cylinderfläche mit der Rotationsfläche übergehen. Wenn der Kegel respective Cylinder der Berührungskegel oder Cylinder einer andern krummen Fläche ist, so dass seine Berührungscurve mit dieser als seine Leitcurve erscheint, so giebt dieselbe Durchdringung den Schlagschatten der erstern Fläche auf die letztere.

In der Regel wird der Berührungs-Kegel oder Cylinder einer krummen Fläche sie selbst weiterhin durchdringen — diess ist nur unmöglich bei den Flächen zweiten Grades — so dass sich das gegenwärtig betrachtete Problem mit dem des § 121. gewöhnlich verbindet. Im Sinne der Schattenconstruction liefert eine solche Durchdringung die Begrenzung des von der Fläche auf sich selbst geworfenen Schlagschattens.

In diesem Falle ist die Leitcurve des Kegels die Curve der Selbstschattengrenze auf oder vollständiger (vergl. § 126.; 6.) seine Berührungscurve mit der Fläche, und man sieht sofort, dass jene Punkte der Selbstschattengrenze, wo die Tangente derselben mit der einen Haupttangente der Fläche im bezüglichen Punkte zusammenfällt, bereits der fraglichen Schlagschattencurve angehören und dass beide Curven einander hier berühren müssen. Diess ist aber ferner nur ein Specialfall eines allgemeineren Gesetzes, welches eben die

Durchdringungscurve der Fläche mit einem Kegel von gegebenem Scheitel und die Berührungscurve des ihr aus demselben Scheitel umschriebenen Kegels betrifft. Wenn sich diese Curven in einem Punkte der Fläche schneiden, so ist die nach diesem Punkte gehende Erzeugende beiden Kegeln gemein und eine Tangente der Fläche, sie muss also die Durchdringungscurve des Schlagschattenkegels mit der Fläche in zwei zusammenfallenden Punkten treffen oder berühren; als Erzeugende des Berührungskegels ist aber dieselbe Linie die conjugierte Tangente zur Tangente der Selbstschattengrenze in diesem Punkte, d. h. wenn auf einer krummen Oberfläche die durch Licht von einem Punkte aus erzeugte Selbstschattengrenze in einem Punkte von einer derselben Beleuchtung entspringenden Schlagschattengrenze auf dieser Fläche geschnitten wird, so bilden die Tangenten beider in diesem Punkte mit den Haupttangenten der Fläche in ihm ein harmonisches Büschel; oder mit andern Worten, sie sind conjugierte Durchmesser der Indicatrix der Fläche in diesem Punkte. Man sieht, dass der vorige Satz ein specieller Fall von diesem ist und dass derselbe auch für den Schlagschatten gilt, den der Körper auf sich selbst wirft.

Offenbar ist durch diese Betrachtungen die Aufgabe mitgelöst, unter den Erzeugenden eines Kegels diejenigen zu bestimmen, die eine gegebene krumme Fläche, hier eine Rotationsfläche, berühren.

An dieselbe reiht sich aber endlich die andere von der Bestimmung der Tangentialebenen eines gegebenen Kegels, die zugleich die Fläche berühren; auch zu ihrer Lösung bildet man den Berührungskegel der Fläche aus dem Scheitel des gegebenen Kegels und erhält als die der Aufgabe genügenden Ebenen die gemeinsamen Tangentialebenen beider Kegel. Man wird ihre Spuren als gemeinschaftliche Tangenten der Spuren beider Kegel in einer Projectionsebene z. B. $XOY$ erhalten.

1) Man bestimme den Schlagschatten einer kreisförmigen Scheibe in einer ersten projicierenden Ebene und für paralleles Licht auf ein einfaches Rotationshyperboloid von verticaler Axe. Man wird für diesen Fall die

geraden Erzeugenden des Hyperboloids zweckmässig benutzen. (Vergl. § 113.; 4.) Ist $g$ eine solche mit dem Punkte $A$ im Kehlkreis und dem Punkt $S_1$ in der ersten Spur des Hyperboloids, so legen wir durch $A$ den Lichtstrahl und verzeichnen die durch ihn und $g$ bestimmte Ebene und ihre Schnittlinie mit der Ebene der Kreisscheibe, endlich die Schnittpunkte von dieser mit dem Kreise selbst; dann schneiden die durch diese Letzteren geführten Lichtstrahlen das Hyperboloid einmal in $g$, das andre mal in der zweiten Erzeugenden des Hyperboloids, welche die gedachte Ebene enthält. So erhält man vier Punkte, von denen zwei der Schlagschattencurve angehören. Die Betrachtung derjenigen Erzeugenden der andern Schaar des Hyperboloids, welche mit $g$ dieselbe erste Projection und somit denselben Punkt im Kehlkreis hat, liefert durch Combination mit demselben Lichtstrahl, etc. abermals vier Punkte. Die Construction der Tangenten der Schattencurve gestaltet sich auch sehr einfach. Man beschreibe sie.

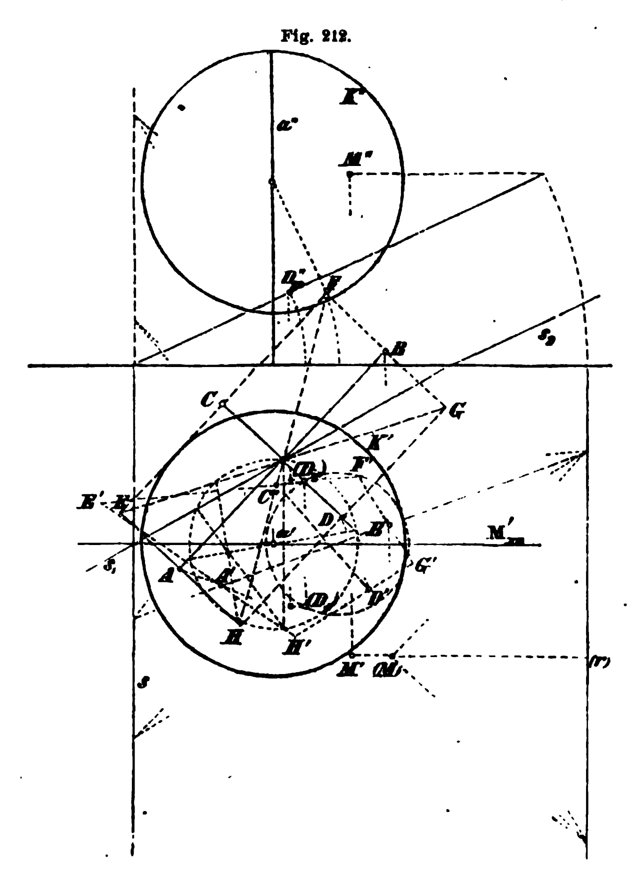
2) Wenn die die Spitze des Kegels enthaltende Meridianebene zugleich eine Ebene orthogonaler Symmetrie für den Kegel ist, so ist seine Durchdringungscurve mit dieser in Bezug auf dieselbe Ebene orthogonal symmetrisch. In welchem Falle wird ein projicierender Cylinder der Curve doppelt umschrieben?

3) Liegt die Spitze des Kegels in der Axe $a$ selbst, so dass jede Meridianebene die Spitze enthält, so kann die Durchschnittscurve mit Hilfe der Meridiane zweckmässig construiert werden.

4) Ist der Kegel vom zweiten Grade, so zeigt die zweite Projection der Durchschnittscurve im Allgemeinen einen Doppelpunkt; es ist offenbar, dass demselben zwei Erzeugende des Kegels von einerlei zweiter Projection entsprechen, die denselben Parallelkreis der Rotationsfläche schneiden, die also zur Ebene des Meridians $\mathbf{M}_{xz}$ symmetrisch liegen. Alle zur Axe $OY$ parallelen Sehnen der Kegelfläche werden aber von der zu $OY$ conjugierten Diametralebene des-

selben halbiert und die fraglichen Erzeugenden müssen also in der zweiten Projection mit der Geraden zusammenfallen, in welcher die Ebene $\mathbf{M}_{x z}$ von der besagten Diametralebene des Kegels geschnitten wird. Wenn die durch dieselbe gehende zweite projicierende Ebene beide Flächen in Curven schneidet, die zwei

Fig. 212.



Punkte gemein haben, so existiert der fragliche Doppelpunkt. In Fig. 212. ist derselbe für die Durchdringungscurve der Kugel $K$ und des Kegels zweiten Grades von der Spitze $M$ und der durch ihre Hauptaxen $AB$ und $CD$ bestimmten Horizontalspur direct construiert. Die zu den der Axe $OY$ parallelen Seh-

nen conjugierte Diametralebene des Kegels — Horizontalspur $s_1$ — und die Ebene $\mathbf{M}_{xz}$ der Rotationsfläche schneiden sich in der Geraden $g$, deren zweite projicierende Ebene mit der Kugel einen Kreis, mit dem Kegel eine Ellipse gemein hat; ihre Schnittpunkte geben den Doppelpunkt $D''$ der Verticalprojection und die entsprechenden Tangenten.

5) Wäre der Kegel nicht vom zweiten Grade, so würde der Ort der Mittelpunkte der zu $OY$ parallelen Sehnen eine Kegelfläche von derselben Spitze sein; derselbe giebt auch dann noch das Kriterium für die etwaigen Doppelpunkte der zweiten Projection.

6) Was folgt daraus für die Durchdringungen der Kugel mit Kegelflächen, deren Spitzen im Meridian $\mathbf{M}_{xz}$ liegen?

7) Man übertrage die vorigen Erörterungen auf den Fall der Centralprojection.

8) Der ebene Schnitt einer krummen Fläche begegnet den Berührungscurven aller zu seiner Ebene parallelen berührenden Cylinder und aller von ihren Punkten ausgehenden berührenden Kegel so, dass ihre Tangenten im Schnittpunkt zu den entsprechenden Haupttangenten der Fläche harmonisch sind.

9) Man verzeichne den Schlagschatten des Torus auf sich selbst für parallele Lichtstrahlen.

10) Ebenso die Schlagschatten einer Rotationsfläche in Gefässform.

11) Welche Eigenschaft entspringt aus dem Hauptsatze des Textes für die Punkte, in welchen die Selbstschattengrenze des einfachen Hyperboloids und der Schlagschatten seines obern Parallelkreises in das Innere (Tafel XII.) sich schneiden?

128. Aus den Betrachtungen des vorigen § überträgt sich das Wesentlichste auf die Beziehungen der krummen Flächen, insbesondere der Rotationsflächen, zu developpablen Flächen mit Rückkehrkante. Diese Beziehungen liefern vier Aufgaben, die wir nur im Allgemeinen zu erörtern haben und von denen nur eine im Vorigen nicht hervorgetreten ist; man kann

a) die Durchdringungscurve der developpablen

Fläche mit der krummen, d. i. den Ort der Schnittspunkte der Erzeugenden der developpablen mit der krummen Fläche F,

b) die Durchschnittspunkte der Rückkehrkante der developpablen Fläche mit der krummen bestimmen; sie werden die Punkte sein, welche die Durchdringungscurve bei a) mit der Rückkehrkante der Developpabeln gemein hat. Soll man aber nur diese Punkte b) selbst bestimmen, so thut jede die Rückkehrkante enthaltende Developpable, also z. B. auch ein projicierender Cylinder derselben den nämlichen Dienst; wählt man im Falle der Rotationsfläche mit zu $OZ$ paralleler Axe den zu dieser Axe $a$ derselben parallelen, so bestimmt man die Durchdringungscurve leicht mit Hilfe der Parallelkreisebenen der Fläche. Ist die Developpable in a) die Begrenzung des durch eine gegebene Fläche $F_1$ bei Beleuchtung durch eine leuchtende Fläche erzeugten Schattenraumes (vergl. § 101.), so ist die Durchdringung die Schagschattencurve jener Fläche $F_1$ auf die Fläche F. Wäre die Grenzlinie des Selbstschattens der Fläche F für dieselbe Beleuchtung bekannt, so gilt aus den im vorigen § entwickelten Gründen für einen Durchschnittspunkt beider Curven auf F, dass ihre Tangenten in demselben zu den Haupttangenten derselben in ihm conjugiert harmonisch sind. Diese Schnittpunkte selbst aber sind die Punkte, in welchen eine Erzeugende der Developpabeln des Schattenraumes die Fläche berührt und entsprechen also der Aufgabe

c) diejenigen Erzeugenden einer Developpabeln zu bestimmen, welche die gegebene krumme Fläche berühren. Man sieht, die Lösung dieser Aufgabe erfordert, für irgend einen ebenen Schnitt der gegebenen Developpabeln die durch ihn gehende der krummen Fläche umschriebene Developpable und die gemeinsamen Erzeugenden beider aus den gemeinsamen Punkten ihrer Spuren in einer beliebigen Ebene zu bestimmen. Man kann dazu speciell den unendlich fernen ebenen Schnitt wählen, d. h. die umschriebene Developpable für den gleichen Richtungskegel mit der gegebenen erzeugen (§ 75.). Endlich ist die Aufgabe

d) möglich, diejenigen Tangentialebenen einer developpablen Fläche zu finden, welche eine krumme Fläche berühren; bilden wir wieder die der krummen Fläche

umschriebene Developpable von demselben Richtungskegel mit der gegebenen, so sind die Spuren der gesuchten Ebenen in einer festen Ebene unter den gemeinschaftlichen Tangenten der bezüglichen Spuren beider Developpabeln.

Der Aufgabe a) entspricht dualistisch das Problem e), die Enveloppe aller der Tangentialebenen der krummen Fläche zu bestimmen, welche durch die aufeinanderfolgenden Erzeugenden einer developpabeln Fläche gehen.

1) Man erörtere näher die Beziehung der Rückkehrkante einer Developpabeln im Schnittpunkte mit einer krummen Fläche zur Durchdringungscurve der Developpabeln mit der krummen Fläche — etwa an dem Beispiel der Schnittpunkte einer Schraubenlinie mit einer Rotationsfläche zweiten Grades.

2) Man discutiere die Construction derjenigen Tangentialebenen einer krummen Fläche, welche zugleich Schmiegungsebenen einer gegebenen cylindrischen Schraubenlinie sind. In welcher Beziehung steht dieselbe zu dem Problem der Beleuchtungsconstructionen?

3) Welche Folgerungen erlauben die Betrachtungen dieses und des vorigen § für die Selbstschattengrenze (Halbschatten und Vollschatten) und die Grenze des Schlagschattens auf sich selbst an einer krummen Fläche und für Licht aus einer endlich ausgedehnten Quelle?

129. Wir wenden uns zu den Beziehungen von zwei krummen Flächen zu einander, wobei wir insbesondere die eine oder beide als Rotationsflächen denken werden. Zwei krumme Flächen besitzen

a) im Allgemeinen eine gemeinsam aufgeschriebene Curve und

b) eine gemeinsam umschriebene Developpable; man kann insbesondere nach ihren gemeinschaftlichen Punkten auf einer Ebene oder einer developpabeln oder krummen Fläche, nach ihren gemeinschaftlichen Tangentialebenen durch einen Punkt oder mit einer Fläche, nach ihren gemeinschaftlichen Tangenten durch einen Punkt, in einer Ebene oder durch eine Gerade fragen, sieht aber sofort, dass die letzteren Aufgaben theils auf frühere, theils auf die ersteren zurückkommen. Nur mit diesen wollen wir uns noch beschäftigen.

Die gemeinsame Curve oder Durchdringungscurve von zwei Flächen $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ wird durch Hilfsflächen $\mathbf{H}_i$ wie folgt bestimmt: Man construiert eine Hilfsfläche $\mathbf{H}_i$, verzeichnet ihre Schnittlinie $\mathbf{C}_{1i}$ mit der Fläche $\mathbf{F}_1$ und ebenso ihre Schnittlinie $\mathbf{C}_{2i}$ mit der Fläche $\mathbf{F}_2$ und bestimmt die gemeinsamen Punkte $P_{ni}$ dieser Curven; sie sind Punkte der gemeinsamen Curve $\mathfrak{C}_{12}$. Es kommt hiernach nur darauf an, ein System solcher Hilfsflächen $\mathbf{H}_i$ zu ermitteln, dessen Schnitte mit den Flächen $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ bequem und sicher zu construieren sind.

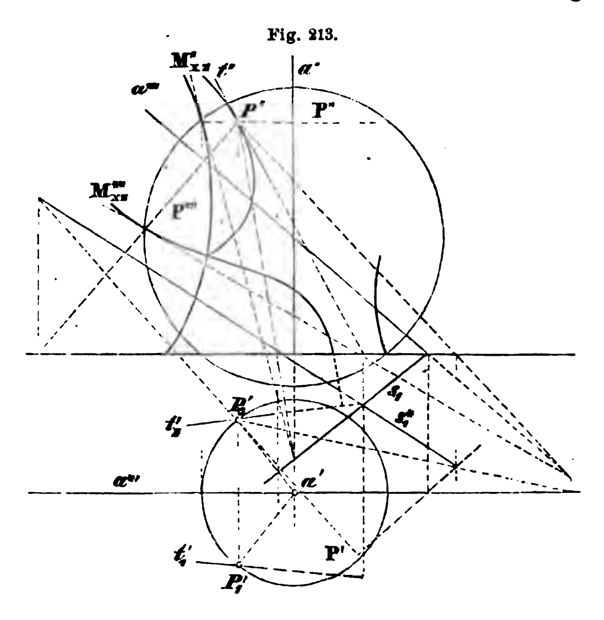
Ebenso wird die gemeinsam umschriebene Developpable von zwei Flächen $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ durch Hilfsflächen $\mathbf{H}_i$ construiert, indem man die gemeinschaftlichen Developpabeln $\mathbf{D}_{1i}$, $\mathbf{D}_{2i}$ derselben mit $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, respective ermittelt und die gemeinschaftlichen Tangentialebenen derselben bestimmt; diese sind Ebenen der gemeinsamen Developpabeln $\mathfrak{D}_{12}$. Die Aufsuchung eines Systems solcher Hilfsflächen $\mathbf{H}_i$, deren gemeinsame Developpabeln mit $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ bequem und sicher genug zu verzeichnen sind, ist das Wesentliche. Es ist dasselbe Princip, welches schon bei der Construction ebener Schnitte und Berührungskegel und allererst schon beim Durchschnitt zweier Ebenen zur Anwendung gekommen ist. Im Allgemeinen können für das Problem a) als Hilfsflächen Ebenen und für das Problem b) Punkte verwendet werden und man wird die vollständige Lösung der Probleme erlangen, wenn man alle Ebenen $\mathbf{H}_i$ eines Büschels, respective alle Punkte $H_i$ einer Reihe nach einander benutzt; insbesondere darf die Scheitelkante dieses Büschels oder die Gerade dieser Reihe als unendlich ferne Gerade oder als Stellung einer Ebene gewählt werden. Sei sie z. B. die Stellung der ersten Projectionsebene. Dann schneidet eine Parallelebene $\mathbf{H}_i$ derselben beide Flächen $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ in Curven, deren erste Projectionen $\mathbf{C}_{1i}'$, $\mathbf{C}_{2i}'$ zu verzeichnen sind; ihre Durchschnittspunkte sind die ersten Projectionen der bezüglichen Punkte von $\mathfrak{C}_{12}$ und die zweiten Projectionen derselben liegen in der gleichnamigen Spur der Hilfsebene. Die zugehörigen Tangenten der Durchdringungscurve sind die Schnittlinien der entsprechenden Tangentialebenen beider Flächen.

Andererseits bestimmt eine in der ersten Projectionsebene enthaltene Richtung mit beiden Flächen Berührungscylinder, deren Spuren in der zweiten Projectionsebene wir uns be-

stimmt denken; die gemeinsamen Tangenten dieser Spuren sind die zweiten Spuren gemeinsamer Tangentialebenen, deren erste Spuren jene Richtung haben. Die zugehörigen Erzeugenden der gemeinsamen Developpabeln sind die Verbindungslinien der entsprechenden Berührungspunkte auf beiden Flächen.

Wenn man im ersten Falle die Hilfsebene parallel sich selbst stetig durch alle die Lagen führt, in denen sie zugleich beide Flächen $F_1$, $F_2$ schneidet, so hat man die Durchdringungscurve, d. h. alle ihre Punkte und Tangenten vollständig erhalten. Und wenn im zweiten Falle die Richtung in der

Fig. 213.



festen Ebene stetig durch alle die Lagen bewegt wird, in denen sie mit beiden Flächen Berührungscylinder bestimmt, so hat man alle Ebenen und Erzeugenden der gemeinsamen Developpabeln gefunden. Die aufeinanderfolgenden Lagen der Ebene und des Punktes geben dabei aufeinanderfolgende Gruppen von Punkten und Tangenten der Curve, respective Gruppen von Ebenen und Erzeugenden.

Die vorigen Erörterungen geben die ganz allgemeinen Lösungen für die in Rede stehenden Probleme. In besondern Fällen gestattet die gewonnene Methode zweckmässige Modifi-

cationen und es kann geschehen, dass andere Hilfsflächen besser als die Ebene und der Punkt zum Ziele führen. Wenn die eine der Flächen eine Rotationsfläche ist, so geben die Normalebenen zu ihrer Axe oder die durch die Axe gehenden Ebenen das bequeme System der Hilfsebenen und die Punkte der Axe selbst oder der zu ihr normalen Stellung das der Hilfspunkte; denn jene führen auf Parallelkreise und Meridiane als Schnitte, diese auf Parallelkreisberührungskegel und Meridianberührungscylinder als Developpable.

Wir besprechen den Fall von zwei Rotationsflächen etwas näher und unterscheiden die beiden Fälle, wo ihre Axen $a$, $a^*$ in einer Ebene liegen und den, wo sie sich kreuzen. Durch Transformation des Projectionssystems kann in beiden Fällen bewirkt werden, dass die Axe $a$ der Axe $OZ$ parallel und zugleich die Axe $a^*$ der zweiten Projectionsebene parallel ist.

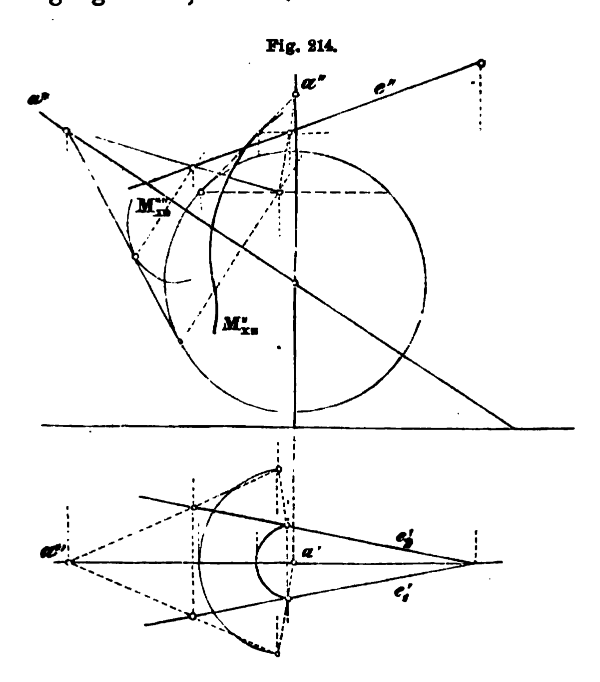
Liegen die Axen $a$, $a^*$ in einer Ebene, so können sie zuerst insbesondere parallel zu einander, also beide zu $OZ$ parallel sein; dann sind für die Bestimmung der Durchdringung die zu ihnen normalen Hilfsebenen, welche beide Flächen in Parallelkreisen schneiden, zu wählen; jede derselben liefert im Allgemeinen zwei zur Ebene $aa^*$ symmetrisch gelegene Punkte der Curve und man bestimmt leicht die zugehörigen Tangenten.

Für die gemeinsame Developpable sind die Berührungscylinder für parallele Meridiane zu benutzen; jedes Paar derselben liefert eine Gruppe gemeinschaftlicher Tangentialebenen und zugehöriger Erzeugenden der Developpabeln. Es erhellt, dass die Ebene $aa^*$ die Ebene einer Doppelcurve der Developpabeln ist, entsprechend dem zu dieser Ebene normalen doppelt berührenden Cylinder der Durchdringungscurve.

Wenn die Axen $a$, $a^*$ sich schneiden, so würden die zu $a$ normalen Ebenen nur die eine Fläche in Parallelkreisen schneiden und die zu $a$ normalen Richtungen würden nur mit dieser Fläche Meridianberührungscylinder bestimmen; die Schnitte respective Berührungscylinder der andern wären mühsam zu construieren. Dagegen bietet ein System concentrischer Kugeln aus dem Schnittpunkt $a$, $a^*$ der Axen als Mittelpunkt alle Vortheile eines Hilfsflächensystems dar (Fig. 213.). Eine solche Kugel, welche beide Flächen, d. i. deren

Umriss die Umrisse $\mathbf{M}_{xz}$, $\mathbf{M}_{xz}^*$ beider Rotationsflächen schneidet, hat mit jeder der Flächen ein System von Parallelkreisen gemein; sind $\mathbf{P}$, $\mathbf{P}^*$ ein Paar solcher durch dieselbe Kugel des Systems erhaltener Parallelkreise beider Flächen, so schneiden sich dieselben im Allgemeinen in zwei Punkten $P_1$, $P_2$, welche der Durchdringungscurve angehören. Nach wie vor ist der zur Ebene $aa^*$ normale Cylinder durch die Curve ein doppeltprojicierender oder doppeltberührender. Die Fig. 213. enthält auch die Construction der Tangente $t$ im Punkte $P$ an die Durchdringungscurve; man wird sie leicht erklären.

Fig. 214.




Jede Kugel des Systems hat auch (Fig. 214.) mit jeder der beiden Flächen ein System von Parallelkreisberührungskegeln zur gemeinsam umschriebenen Developpabeln; ein solcher Kegel der einen und einer der andern Fläche haben mit einander zwei Tangentialebenen gemein, welche zur gemeinschaftlichen Developpabeln der Rotationsflächen gehören und die Verbindungslinien $e$ der zugehörigen Paare der Berührungspunkte entsprechen ihnen als Erzeugende. Die gemeinschaft-

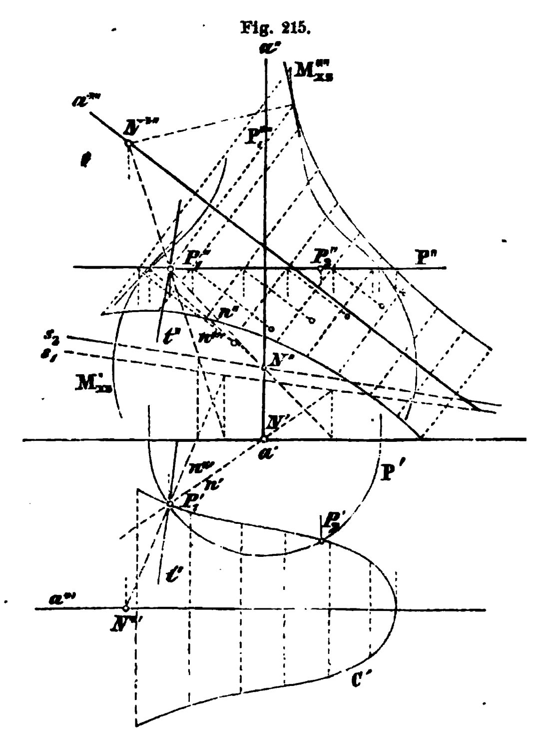
liche Meridianebene ist eine Ebene orthogonaler Symmetrie für die developpable Fläche.

1) Die Durchdringung einer Rotationsfläche mit einem geraden Conoid, dessen Richtungsebene zur Axe derselben normal ist, wird mittelst Hilfsebenen von der Stellung dieser Richtungsebene construiert; als Beispiel dient die Durchdringung des Torus mit der Wölbfläche des Eingangs in den runden Thurm.
2) Wenn die Axe einer Rotationsfläche zugleich Leitlinie einer Regelfläche ist, so ist das Büschel der Meridianebenen der ersteren vorzüglich geeignet für die Construction der Durchdringungscurve.
3) Die gemeinschaftlich umschriebene Developpable einer Rotationsfläche und einer windschiefen Regelfläche kann ermittelt werden, indem man die Ebenen durch die Erzeugenden der Letzteren bestimmt, welche die ersteren berühren und die Berührungspunkte verbindet. Wie gestaltet sich diess in den vorhergehenden Fällen?
4) Man verzeichne die Schnittcurve eines Rotationsellipsoids mit der Fläche einer scharfgängigen oder einer flachgängigen Schraube.
5) Construiere die Durchdringung eines hyperbolischen Paraboloids und einer Kugel.
6) Zwei Rotationsflächen von einerlei Axe haben ein System von Parallelkreisen zur gemeinsamen Curve und ein System von Parallelkreisberührungskegeln zur gemeinsam umschriebenen Developpabeln. Man wende diess auf das System von zwei Kugeln an.
7) Für die gemeinsame Curve und Developpable von zwei Rotationsflächen, unter denen eine Kugel ist, können die zur Axe der andern normalen Ebenen und Richtungen als Hilfs-Ebenen und Punkte verwendet werden.
8) Die Tangente der Durchdringungscurve von zwei krummen Flächen ist die Normale zu der Ebene, welche von den Normalen der beiden Flächen im Berührungspunkte bestimmt wird. Dieser Satz gestattet bei den Rotationsflächen besonders bequeme Benutzung.

130. Wenn die Axen $a$, $a^*$ der Rotationsflächen nicht in der nämlichen Ebene liegen, während jedoch

$a$ parallel $OZ$ und $a^*$ parallel $XOZ$ ist, so benutzt man zur Construction der gemeinsamen Curve zur Axe $a$ normale Hilfsebenen; jede derselben schneidet die erste Rotationsfläche in einem Parallelkreis $\mathbf{P}$ und die zweite in einer Curve $\mathbf{C}$, deren erste Projection mit Hilfe der Parallelkreise $\mathbf{P}_i^*$ der Fläche construiert wird und deren Durchschnittpunkte $P_1$, $P_2$ mit $\mathbf{P}$ der Durchdringungscurve angehören. (Fig. 215.) Die Ebene des Parallels $\mathbf{P}$ schneidet die Ebene eines Parallel-

Fig. 215.




kreises $\mathbf{P}_i^*$ in einer zu $OY$ parallelen Geraden und diese den Kreis $\mathbf{P}_i^*$ in zwei Punkten jener Curve $\mathbf{C}$. Die Tangente $t$ der Durchdringungscurve wird am bequemsten als Normale der Ebene bestimmt, welche die Normalen der Flächen im Berührungspunkt enthält. In der Figur ist sie für den Punkt $P_1$ construiert; $n$ und $n^*$ sind die Normalen der Flächen in diesem Punkte, $s_1$, $s_2$ die Spuren der durch sie bestimmten Ebene, als deren Normale aus $P_1$ sich $t$ ergiebt.

Auch das Büschel der Meridianebenen der Fläche von der Axe $a$ liesse sich mit Vortheil zur Construction verwenden.

Zur Bestimmung der gemeinschaftlichen Developpabeln zweier solchen Flächen bedarf es gleichfalls keiner neuen Mittel. Alle zur Axe $a$ normalen Richtungen bestimmen mit der zu dieser gehörigen Fläche Meridianberührungscylinder, mit der von der Axe $a^*$ Berührungscylinder, welche man ohne Schwierigkeit mittelst des Systems der Parallelkreisberührungskegel der Fläche um $a^*$ construiert; die gemeinschaftlichen Tangentenebenen gehören der Developpabeln an und die Verbindungslinien der Paare der Berührungspunkte sind die entsprechenden Erzeugenden.

Andrerseits liefern die Punkte der Axe $a$ mit der zugehörigen Fläche Parallelkreisberührungskegel, mit der von $a^*$ Berührungskegel, die man mit Hilfe der Schaar der Parallelkreisberührungskegel dieser Fläche construiert; die gemeinsamen Tangentialebenen solcher concentrischen Kegel gehören zur Developpabeln.

Sind die betrachteten Flächen Flächen zweiten Grades, so lässt sich eine noch bequemere Construction gewinnen. Wir denken die Axen $a$, $a^*$ als parallel zur zweiten Projectionsebene durch ihre zweiten Projectionen und ihren kürzesten Abstand bestimmt, dazu die Umrissmeridiane $\mathbf{M}_{xz}$ und $\mathbf{M}_{xz}^*$ der Flächen gegeben, beispielsweise als Ellipsen mit den Mittelpunkten $C$, $C^*$ und den in $a$, $a^*$ respective fallenden Axen $AB$, $A^*B^*$ und den dazu normalen $DE$, $D^*E^*$. Denken wir nun aus $C$ ein zu $a^*$, $C^*$, $\cdots$ ähnliches und ähnlich gelegenes Rotations-Ellipsoid construiert, das mit dem gegebenen $a$, $C$, $\cdots$ einerlei Aequatorhalbmesser hat, so berührt diess dritte Ellipsoid jenes erste $a$, $C$, $\cdots$ in zwei Punkten des Aequators auf dem zur zweiten Projectionsebene normalen Durchmesser und schneidet es folglich in zwei Ellipsen, deren Ebenen zweite projicierende Ebenen sind. Jede Ebene, welche zur Ebene einer dieser Ellipsen parallel ist, schneidet die beiden gegebenen Ellipsoide in ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen, deren eine Axe zur zweiten Projectionsebene normal und die andere zu ihr parallel ist. Wählt man also zur ersten Projectionsebene eine Ebene, in welcher diese Ellipse als Kreis projiciert wird, so erhält man die Durch-

dringungscurve beider Ellipsoide durch ein System von Hilfskreisen in diesem Projectionssystem construiert. (§ 99.; 3.) Offenbar genügen vier verschiedene Stellungen der ersten Projectionsebene den Bedingungen der Construction.

Die Beziehungen von drei krummen Flächen zu einander können nur in speciellen Fällen zu besonderen Erörterungen Anlass geben. Im Allgemeinen besitzen sie eine Gruppe gemeinsamer Punkte und eine Gruppe gemeinsamer Tangentialebenen; jene sind die gemeinschaftlichen Punkte der Curven, welche eine von ihnen mit den beiden andern gemein hat; diese die gemeinschaftlichen Tangentialebenen der Developpabeln, welche einer von ihnen mit den beiden andern gemeinschaftlich umschrieben sind.

Sind zwei der drei Flächen Rotationsflächen von einerlei Axe, so dass ihre Schnittcurven Parallel-Kreise und ihre gemeinsam umschriebenen Developpabeln Parallelkreisberührungskegel sind, so hat man nur die gemeinsamen Punkte dieser Kreise respective die gemeinsamen Tangentialebenen dieser Kegel mit der dritten Fläche zu bestimmen.

1) Man construiere die Durchdringungscurve eines einfachen Rotationshyperboloids mit einem Rotationsellipsoid bei sich kreuzenden Axen.
2) Wenn ist die Methode der Hilfskreise auf die Construction der Durchdringungscurve zweier Rotationsflächen zweiten Grades nicht anwendbar?
3) Lässt sich eine analoge Methode zur Construction der gemeinsam umschriebenen Developpabeln von zwei Rotationsflächen zweiten Grades anwenden?
4) Die gemeinsam umschriebene Developpable von zwei Flächen begrenzt den Halb- und Kernschattenraum der einen, wenn die andere leuchtend gedacht wird.
5) Man bestimme die gemeinsamen Punkte und Tangentialebenen von drei Kugeln.
6) Wenn von drei betrachteten Flächen zwei Kugeln sind und eine derselben als leuchtend angesehen wird, welche Bedeutung haben die Berührungspunkte der dritten Fläche mit den allen drei Flächen gemeinsamen Tangentialebenen im Sinne der Schattenconstruction?

### E. Von den projectivischen Coordinaten.

131. In den frühern Entwickelungen ist zwar nirgend von der analytischen oder Coordinaten-Geometrie direct Gebrauch gemacht, aber es sind doch Begriffe und Vorstellungen mit Erfolg zu Hilfe genommen worden, die in letzter Instanz analytischem Boden entspringen. (Vergl. § 87.) Die Berechtigung hierzu liegt nur in dem Umstande, dass aus den geometrischen Bestimmungsmethoden, welche hier zur Grundlage des Ganzen gemacht wurden, die analytischen Bestimmungsmethoden der Raum-Elemente sich vollständig und allgemein ergeben, sobald man die algebraische Zahl als Bestimmungsmittel einführt. Den Nachweis hiervon geben wir hier statt die dargelegten Methoden noch am Studium und der Behandlung von andern Flächenfamilien zu exemplificieren, deren Auswahl immer eine gewisse Willkürlichkeit enthält und doch nicht erschöpfend gemacht werden kann.

Die geometrischen Gebilde erschienen in dem Früheren stufenweis geordnet: geradlinige Punktreihen, Strahlenbüschel in einer Ebene und Ebenenbüschel bildeten die erste Stufe (§ 23.); die Doppelverhältnissgleichheit entsprechender Gruppen von vier Elementen war die Bedingung ihrer Projectivität (§ 16.) und zu drei gegebenen Paaren entsprechender Elemente konnten darum alle übrigen entsprechenden Paare von solchen linear construiert werden. (§ 17.) Wir gelangen zur Coordinatenbestimmung und zur analytischen Geometrie dieser Stufe, indem wir das Doppelverhältniss selbst, welches von jedem vierten Element mit drei festen Elementen des Gebildes bestimmt wird, als eine algebraische Zahl zum Bestimmungsmittel für dieses vierte Element machen.

Die zweite Stufe bilden die ebenen Systeme von Punkten und Strahlen und die ihnen entsprechenden projicierenden Bündel, die Systeme aller Strahlen und Ebenen durch einen Punkt oder die Strahlen- und Ebenen-Bündel (§ 23.); die

Projectivität der entsprechenden Grundgebilde erster Stufe war die Bedingung der Projectivität dieser Systeme und wenn vier von einander unabhängige Elemente des einen Gebildes und die vier entsprechenden des andern gegeben waren, so liessen sich zu allen andern Elementen des ersten die des zweiten linear construieren (§ 22.), durch zweimalige Anwendung der Construction für projectivische Gebilde erster Stufe. Eine ganz entsprechende Zusammensetzung führt von den Coordinaten für die Gebilde erster Stufe zu den Coordinaten und zur analytischen Geometrie für die der zweiten. Dieselbe ist ebenso wesentlich gleichartig für die vier verschiedenen Formen derselben wie die geometrische Bestimmung und Construction.

Die Gesammtheit der Punkte und anderseits die der Ebenen des Raumes sind die beiden Gebilde dritter Stufe; ihre Projectivität wird durch die Projectivität der in ihnen enthaltenen Gebilde erster Stufe bedingt und daher durch fünf Paare entsprechender Elemente festgesetzt, die in jedem System unabhängig sind von einander (§44.); die dreifache Zusammensetzung aus Gebilden erster Stufe führt zu ihrer constructiven und analytischen Behandlung.

Endlich kann der Raum als Gesammtheit der in ihm enthaltenen geraden Linien angesehen werden und erscheint als solche als ein Gebilde vierter Stufe; die doppelte Betrachtungsweise der Geraden als Ort von Punkten und als Enveloppe von Ebenen, wonach sie durch zwei Punkte respective durch zwei Ebenen bestimmt ist, führt auch zu einer zweifachen analytischen Ausdrucksweise derselben.

Die Entwickelung der Coordinatenbestimmungen innerhalb dieser verschiedenen Stufen nach den angedeuteten Grundsätzen begründet die Einsicht, dass zwischen den geometrischen Untersuchungsmitteln, auf welche die darstellende Geometrie führt und den analytischen Methoden kein trennender Unterschied besteht. Der Uebergang zur analytischen Methode eröffnet den Weg zur allgemeinen Untersuchung der geometrischen Formen $n^{ten}$ Grades; dass er gerade so gemacht wird, sichert, dass die

in den ersten Stadien — beim 2. Grad, etc. — bewährte Untersuchungsweise auch weiterhin im Wesentlichen erhalten bleibt. Ihre Anwendung sodann aber zur wirklichen Untersuchung, zuerst der Gleichungen zweiten Grades innerhalb der verschiedenen Gebilde und dann der der höhern Grade bleibt der systematischen Entwicklung der analytischen Geometrie zu überlassen.

132. In einer geradlinigen Punktreihe ist jeder vierte Punkt $P$ durch das Doppelverhältniss bestimmt, welches er mit drei festen Punkten derselben $A_1$, $A_2$, $E$ bildet; ist (Fig. 216.)

$$(A_1 A_2 E P) = \frac{A_1 E}{A_2 E} : \frac{A_1 P}{A_2 P} = \frac{e_2}{e_1} : \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1 : e_1}{p_2 : e_2} = \frac{x_1}{x_2},$$

so sind $x_1$, $x_2$ zwei algebraische Zahlen, welche die Lage des Punktes $P$ innerhalb der Geraden bestimmen, also die Coordinaten dieses Punktes; man kann sagen, dass sie mit den Abständen des Punktes $E$ von den Fundamentalpunkten $A_2$, $A_1$ als Einheiten gemessene Längenzahlen der Abstände des Punktes $P$ von denselben Fundamentalpunkten sind.

Fig. 216.

Für $P$ in $E$ hat man $p_1 = e_1$, $p_2 = e_2$, also $x_1 = x_2 = 1$ und $E$ kann somit als Einheitpunkt des Coordinatensystems der Reihe bezeichnet werden. Für $P$ in $A_1$ ist $x_2 = 0$ und $x_1 = 0$ für $P$ in $A_2$, so dass diesen Punkten die Grenzwerthe 0 und $\infty$ als Werthe des Doppelverhältnisses entsprechen.

Durch $x_1 = k x_2$ ist ein Punkt $P$ der Reihe bestimmt, der durch $(A_1 A_2 E P) = k$ aus $A_1$, $A_2$, $E$ construiert wird.

Im ebenen Strahlenbüschel ist jeder Strahl $p$ durch das Doppelverhältniss bestimmt, welches er mit drei festen Strahlen desselben $a_1$, $a_2$, $e$ (Fig. 217.) bildet; ist

$$(a_1 a_2 e p) = \frac{\sin(a_1, e)}{\sin(a_2, e)} : \frac{\sin(a_1, p)}{\sin(a_2, p)} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} : \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_2 : \varepsilon_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2},$$

Fig. 217.

so sind $\xi_1$, $\xi_2$ zwei Zahlen, die die Lage des Strahls $p$ im Büschel bestimmen, d. h. Coordinaten dieses Strahls; man kann sagen, dass sie die

mit den Abständen zweier festen Punkte in $a_2$, $a_1$ respective von $e$ gemessenen Längenzahlen der Abstände dieser Punkte von $p$ sind.

Im Ebenenbüschel bestimmt man in gleicher Weise die Ebene $\Pi$ durch die festen Ebenen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{E}$ mittelst des Doppelverhältnisses

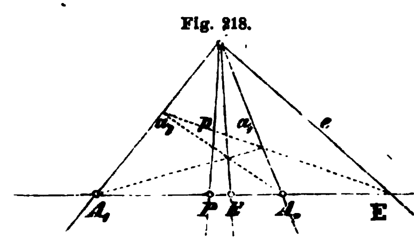
$$(\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{E} \Pi) = \frac{\sin(\mathbf{A}_1, \mathbf{E})}{\sin(\mathbf{A}_2, \mathbf{E})} : \frac{\sin(\mathbf{A}_1, \Pi)}{\sin(\mathbf{A}_2, \Pi)} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} : \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_2 : \varepsilon_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

Für $p$ in $e$ oder $\Pi$ in $\mathbf{E}$ hat man $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 1$ und kann also den Strahl $e$, respective die Ebene $\mathbf{E}$ als Einheitstrahl und als Einheitebene für das Coordinatensystem des Büschels bezeichnen. Für $p$ in $a_1$ und respective in $a_2$ oder $\Pi$ in $\mathbf{A}_1$ respective $\mathbf{A}_2$ hat man $\xi_2 = 0$; $\xi_1 = 0$. Durch die Gleichung $\xi_1 = \varkappa \xi_2$ ist ein Strahl $p$ oder eine Ebene $\Pi$ des Büschels bestimmt, welche aus $a_1$, $a_2$, $e$ oder $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{E}$ construiert wird durch

$$(a_1 a_2 e p) = \varkappa, \qquad (\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \mathbf{E} \Pi) = \varkappa.$$

Denken wir die Fundamentalstrahlen $a_1$, $a_2$ des Büschels durch die Fundamentalpunkte $A_2$, $A_1$ der Reihe respective gelegt und den Einheitpunkt $E$ von dem Einheitstrahl $e$ durch diese und durch jene harmonisch getrennt, also $e$ nach dem vierten harmonischen zu $E$ conjugierten Punkte $\mathbf{E}$ der Reihe $A_1 A_2 E$ gehend (Fig. 218.), so gelten unter der ferneren Voraussetzung, dass der Strahl $p$ des Büschels durch den Punkt $P$ der Reihe geht, die Relationen

Fig. 218.




$$(A_1 A_2 E P) = \frac{x_1}{x_2}, \; (a_1 a_2 e p) = \frac{\xi_1}{\xi_2} = (A_2 A_1 \mathbf{E} P), \; (A_1 A_2 \mathbf{E} E) = -1.$$

Das Product der beiden Letzteren ist

$$(A_1 A_2 \mathbf{E} E)\,(A_2 A_1 \mathbf{E} P) = (A_1 A_2 P E) = -\frac{\xi_1}{\xi_2}$$

und durch Multiplication desselben mit der ersteren folgt

$$(A_1 A_2 E P)\,(A_1 A_2 P E) = 1 = -\frac{\xi_1 x_1}{\xi_2 x_2} \text{ oder } \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0$$

als die Relation, welche zwischen den Coordinaten $\xi_i$ eines Strahles (einer Ebene) im Büschel und denen eines Punktes in der Reihe unter den gemachten Voraussetzungen immer dann und nur dann stattfindet, wenn der Strahl respective die Ebene durch den Punkt geht.

1) Sind $\xi_1$, $\xi_2$ Constanten $a_1$, $a_2$, so dass sie einen bestimmten festen Strahl bezeichnen, so genügen die Coordinaten jedes seiner Punkte der Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,$$

welche man die Gleichung des Strahls nennen wird; die Coefficienten dieser Gleichung sind die Coordinaten des Strahls im Büschel.

2) Geht der Strahl insbesondere durch den Punkt $y_1$, $y_2$, so gelten gleichzeitig

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0, \quad \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 = 0$$

und man erhält durch Multiplication dieser Gleichungen mit $y_2$, $-x_2$ respective und Addition der Producte

$$\xi_1 (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0 \text{ oder } x_1 y_2 - x_2 y_1 = \begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

3) Sind dagegen $x_1$, $x_2$ Constanten $\alpha_1$, $\alpha_2$, so dass sie einen bestimmten festen Punkt bezeichnen, so genügen die Coordinaten jedes durch ihn gehenden Strahls der Gleichung

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 = 0,$$

die man die Gleichung des Punktes nennt und welche seine Coordinaten zu ihren Coefficienten hat.

4) Liegt derselbe im Strahl $\eta_1$, $\eta_2$, so gelten gleichzeitig

$$x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 = 0, \quad x_1 \eta_1 + x_2 \eta_2 = 0,$$

und $$\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1 = 0 \text{ oder } \begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2 \\ \eta_1, & \eta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

5) Die erhaltenen Determinanten geben auch

$$l x_1 + m y_1 = 0, \quad l x_2 + m y_2 = 0,$$

respective $$\lambda \xi_1 + \mu \eta_1 = 0, \quad \lambda \xi_2 + \mu \eta_2 = 0,$$

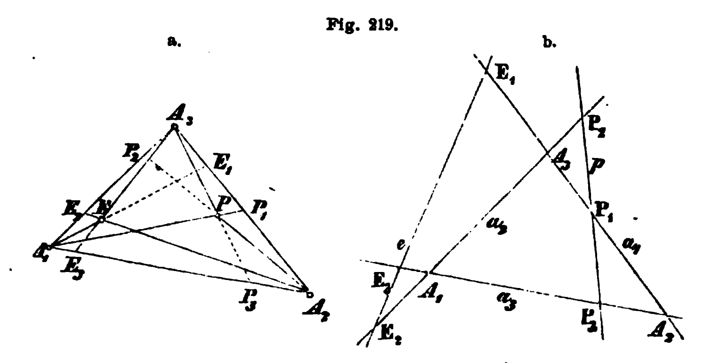
und $$x_i = -\frac{m}{l} y_i \text{ und } \xi_i = -\frac{\mu}{\lambda} \eta_i.$$

6) Die gewonnenen Coordinatenbestimmungen werden durch Projection (§ 16.) und durch Uebergang zum Relief (§ 38.) nicht gestört und dienen zur Untersuchung der projectivischen Eigenschaften.

133. Wenn vier Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$, $E$ in einer Ebene gegeben sind, von denen keine drei in einer Geraden liegen, so bestimmt jeder fünfte Punkt $P$ dieser Ebene an $A_1$, $A_2$, $A_3$ als Scheiteln den vierten Strahl eines Büschels, der durch das Doppelverhältniss desselben aus den drei andern bestimmt wird. (Fig. 219ᵃ.)

Wenn vier Gerade $a_1$, $a_2$, $a_3$, $e$ in einer Ebene gegeben sind, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, so bestimmt jede fünfte Gerade $p$ dieser Ebene in $a_1$, $a_2$, $a_3$ als Trägern den vierten Punkt einer Reihe, der durch das Doppelverhältniss derselben aus den drei andern bestimmt wird. (Fig. 219ᵇ.)

Fig. 219.




Ganz analog in den Bündeln von Strahlen und Ebenen, wo ein fünfter Strahl in Bezug auf vier andere, die nicht zu drei in einer Ebene liegen, respective eine fünfte Ebene in Bezug auf vier andere, die nicht zu drei durch einen Strahl gehen, durch die Doppelverhältnisse der Ebenenbüschel, respective Strahlenbüschel bestimmt wird, die mit je einem von den gegebenen Elementen von den jedesmal übrigen erzeugt werden. Nach dem Vorigen bedarf das Letztere keiner besondern Entwickelung, die Betrachtung der ebenen Systeme genügt.

Man hat in Fig. 219ᵃ. im Dreieck $A_1$, $A_2$, $A_3$ für $P$ und Fig. 219ᵇ. im Dreiseit $a_1 a_2 a_3$ für $p$ respective

$(A_1 \cdot A_2 A_3 EP) = (A_2 A_3 E_1 P_1),$
$(A_2 \cdot A_3 A_1 EP) = (A_3 A_1 E_2 P_2),$
$(A_3 \cdot A_1 A_2 EP) = (A_1 A_2 E_3 P_3).$

Sind dann $e_1, e_2, e_3$ die Abstände des Punktes $E$ und eben so $p_1, p_2, p_3$ die des Punktes $P$ von den Geraden $A_2 A_3, A_3 A_1, A_1 A_2$ respective oder sind allgemeiner $e_1, p_1; e_2, p_2; e_3, p_3$ die in gleichen Richtungen gemessenen Längen von $E$ und $P$ aus bis zu jenen Geraden, so haben die vorstehenden Doppelverhältnisse die folgenden Werthe

$$\frac{e_3}{e_2} : \frac{p_3}{p_2} = \frac{p_2 : e_2}{p_3 : e_3} = \frac{x_2}{x_3},$$
$$\frac{e_1}{e_3} : \frac{p_1}{p_3} = \frac{p_3 : e_3}{p_1 : e_1} = \frac{x_3}{x_1},$$
$$\frac{e_2}{e_1} : \frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1 : e_1}{p_2 : e_2} = \frac{x_1}{x_2}.$$

$(a_1 \cdot a_2 a_3 ep) = (A_3 A_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{P}_1),$
$(a_2 \cdot a_3 a_1 ep) = (A_1 A_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{P}_2),$
$(a_3 \cdot a_1 a_2 ep) = (A_2 A_1 \mathbf{E}_3 \mathbf{P}_3).$

Sind dann $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ die Abstände des Strahls $e$ und ebenso $\pi_1, \pi_2, \pi_3$ die des Strahls $p$ von den Punkten $a_2 a_3, a_3 a_1, a_1 a_2$ oder $A_1, A_2, A_3$ respective oder sind allgemeiner $\varepsilon_1, \pi_1; \varepsilon_2, \pi_2; \varepsilon_3, \pi_3$ die in zwei bestimmten Richtungen gemessenen Längen von diesen Punkten bis zu $e$ und $p$, so haben die vorstehenden Doppelverhältnisse die Werthe

$$\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} : \frac{\pi_3}{\pi_2} = \frac{\pi_2 : \varepsilon_2}{\pi_3 : \varepsilon_3} = \frac{\xi_2}{\xi_3},$$
$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} : \frac{\pi_1}{\pi_3} = \frac{\pi_3 : \varepsilon_3}{\pi_1 : \varepsilon_1} = \frac{\xi_3}{\xi_1},$$
$$\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} : \frac{\pi_2}{\pi_1} = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_2 : \varepsilon_2} = \frac{\xi_1}{\xi_2}.$$

Dass das Product derselben und somit der vorigen Gruppen von Doppelverhältnissen die Einheit ist, giebt Sätze über die Beziehung des Dreiecks der $A_i$ oder $a_i$ zu einem Punkte, respective einer Geraden, wenn man $E$ oder $e$ geeignet wählt (vergl. 1., 2.).

Nun sind $x_1, x_2, x_3$, respective $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ drei algebraische Zahlen, welche die Lage von $P$ in seiner Ebene durch $A_1, A_2, A_3, E$ und die Lage der Geraden $p$ durch $a_1, a_2, a_3$ und $e$ bestimmen, d. h. die Coordinaten des Punktes $P$ respective der geraden Linie $p$ der Ebene — und insofern sie durch drei Einheiten $e_1, e_2, e_3$, respective $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ausgedrückt werden, die trimetrischen Coordinaten eines Punktes und einer Geraden der Ebene.

Ist $P$ in $E$, so ergeben sich aus $p_1 = e_1$, etc.

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

Ist $p$ in $e$, so ergeben sich aus $\pi_1 = \varepsilon_1$, etc.

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1$$

und $E$ kann somit als der **Einheitpunkt** des Coordinatensystems bezeichnet werden.

Für $P$ in $A_2 A_3$ ist $p_1 = 0$ und also $x_1 = 0$,

$$\frac{x_3}{x_1} = \infty, \quad \frac{x_1}{x_2} = 0,$$
$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{p_2 : e_2}{p_3 : e_3} = k_1.$$

Ebenso für $P$ in $A_3 A_1$

$$x_2 = 0, \quad \frac{x_3}{x_1} = \frac{p_3 : e_3}{p_1 : e_1} = k_2$$

und für $P$ in $A_1 A_2$

$$x_3 = 0, \quad \frac{x_1}{x_2} = \frac{p_1 : e_1}{p_2 : e_2} = k_3.$$

Für $P$ in $A_1$ folgt

$$x_2 = 0, \; x_3 = 0, \; x_1 = \frac{h_1}{e_1}; \text{ etc.}$$

und $e$ kann als die **Einheitgerade** des Coordinatensystems bezeichnet werden.

Für $p$ durch $a_2 a_3$ oder $A_1$ ist $\pi_1 = 0$ und daher $\xi_1 = 0$,

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = \infty, \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = 0,$$
$$\frac{\xi_2}{\xi_3} = \frac{\pi_2 : \varepsilon_2}{\pi_3 : \varepsilon_3} = \varkappa_1.$$

Ebenso für $p$ durch $A_2$

$$\xi_2 = 0, \quad \frac{\xi_3}{\xi_1} = \frac{\pi_3 : \varepsilon_3}{\pi_1 : \varepsilon_1} = \varkappa_2$$

und für $p$ durch $A_3$

$$\xi_3 = 0, \quad \frac{\xi_1}{\xi_2} = \frac{\pi_1 : \varepsilon_1}{\pi_2 : \varepsilon_2} = \varkappa_3.$$

Für $p$ in $a_1$ folgt

$$\xi_2 = 0, \; \xi_3 = 0, \; \xi_1 = \frac{h_1}{\varepsilon_1}; \text{ etc.}$$

wenn z. B. $h_1$ die der Ecke $A_1$ oder der Seite $a_1$ des Fundamentaldreiecks $A_1 A_2 A_3$ oder $a_1 a_2 a_3$ entsprechende Höhe desselben und $e_1$, $\varepsilon_1$ respective die entsprechenden Höhen des Dreiecks $A_2 A_3 E$ und Dreiseits $a_2 a_3 e$ sind. Die Coordinaten $x_i$, $\xi_i$ bleiben für die Bestimmung im Strahlen- und Ebenen-Bündel unverändert brauchbar, wenn dieselben auf Fundamental-Elemente bezogen werden, welche die projicierenden der Fundamental-Elemente des ebenen Systems sind.

1) Ist $E$ der Schnittpunkt der Geraden von den Ecken nach den Mittelpunkten der Gegenseiten des Dreiecks (Schwerpunkt), so ist

$$(A_1 \cdot A_2 A_3 E P) = \frac{\sin A_2 A_1 E}{\sin A_3 A_1 E} : \frac{\sin A_2 A_1 P}{\sin A_3 A_1 P} = - \frac{\sin A_3 A_1 P}{\sin A_2 A_1 P} \cdot \frac{A_1 A_2}{A_1 A_3}$$

und mit Rücksicht auf die Werthe der beiden andern Doppelverhältnisse liefert das Product derselben die Relation

$$\frac{\sin A_3 A_1 P \cdot \sin A_1 A_2 P \cdot \sin A_2 A_3 P}{\sin A_2 A_1 P \cdot \sin A_3 A_2 P \cdot \sin A_1 A_3 P} = -1 = \frac{A_3 P_1 \cdot A_1 P_2 \cdot A_2 P_3}{A_2 P_1 \cdot A_3 P_2 \cdot A_1 P_3}.$$

2) Ist $e$ die unendlich ferne Gerade der Ebene, so wird

$$(A_3 A_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{P}_1) = \frac{A_2 \mathbf{P}_1}{A_3 \mathbf{P}_1}$$

und mit Rücksicht auf die Werthe der beiden andern Doppelverhältnisse giebt ihr Product

$$\frac{A_2 \mathbf{P}_1 \cdot A_3 \mathbf{P}_2 \cdot A_1 \mathbf{P}_3}{A_3 \mathbf{P}_1 \cdot A_1 \mathbf{P}_2 \cdot A_2 \mathbf{P}_3} = 1.$$

Diess sind die Hauptsätze der Theorie der Transversalen.

3) Denkt man zu den Punkten $\mathbf{P}_i$ der Geraden in den Seiten des Dreiecks die conjugiert harmonischen $P_i$ in Bezug auf die jedesmaligen Ecken, so folgt wegen

$$\frac{A_2 \mathbf{P}_1}{A_3 \mathbf{P}_1} = -\frac{A_2 P_1}{A_3 P_1}, \text{ etc.}$$

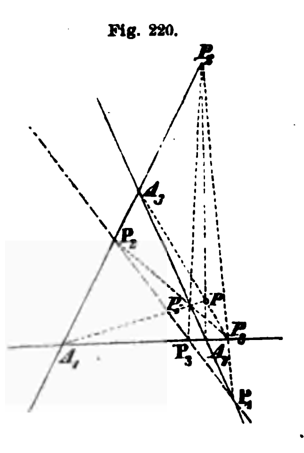
durch Substitution in die letzte Relation unter 2)

$$\frac{A_2 P_1 \cdot A_3 P_2 \cdot A_1 P_3}{A_3 P_1 \cdot A_1 P_2 \cdot A_2 P_3} = -1,$$

die Relation unter 1); d. h. die Geraden $A_1 P_1$, $A_2 P_2$, $A_3 P_3$ schneiden sich in einem Punkte $P$. Man sagt, dieser Punkt $P$ und die angenommene Gerade $p$ seien an allen Ecken und auf allen Seiten des Dreiecks der $A_i$ oder $a_i$ von einander harmonisch getrennt. (§ 22.)

4) Man construiert zu einem Punkte in Bezug auf ein Dreieck die harmonische Gerade oder zu einer Geraden den harmonischen Punkt, nach der Methode der Construction harmonischer Gruppen; aus $P$ die harmonische Gerade in Bezug auf $A_1 A_2 A_3$ am einfachsten so: Ziehe $A_1 P$, $A_2 P$, $A_3 P$ bis zu den Gegenseiten in $P_1$, $P_2$, $P_3$; schneide $P_1 P_2$ mit $A_1 A_2$ in $\mathbf{P}_3$, $P_2 P_3$ mit $A_2 A_3$ in $\mathbf{P}_1$, so ist $\mathbf{P}_3 \mathbf{P}_1$ die harmonische Gerade. (Fig. 220.)

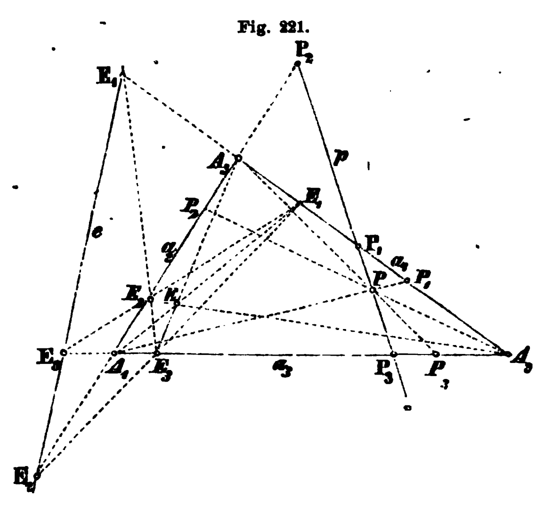
Fig. 220.



134. Denken wir ferner in Erweiterung der Annahmen des § 132. das Dreiek $A_1 A_2 A_3$ mit dem Dreiseit $a_1 a_2 a_3$ in der Art identisch, dass die Ecke $A_i$ des ersten der Schnittpunkt der Seiten $a_j$, $a_k$ des Letzten ist und dass zugleich die Einheitgerade $e$ auf allen Seiten und an allen Ecken desselben vom Einheitpunkte $E$ harmonisch getrennt sei (§ 133.; 3.), so ist (Fig. 221.)

$$\frac{\xi_2}{\xi_3} = (A_3 A_2 \mathbf{E}_1 \mathbf{P}_1),\ \frac{\xi_3}{\xi_1} = (A_1 A_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{P}_2),\ \frac{\xi_1}{\xi_2} = (A_2 A_1 \mathbf{E}_3 \mathbf{P}_3);$$
$$-1 = (A_2 A_3 \mathbf{E}_1 E_1) \quad = (A_3 A_1 \mathbf{E}_2 E_2) \quad = (A_1 A_2 \mathbf{E}_3 E_3).$$

Fig. 221.



Man erhält durch Multiplication der entsprechenden Paare

$$-\frac{\xi_2}{\xi_3} = (A_3 A_2 E_1 \mathbf{P}_1),\ -\frac{\xi_3}{\xi_1} = (A_1 A_3 E_2 \mathbf{P}_2),\ -\frac{\xi_1}{\xi_2} = (A_2 A_1 E_3 \mathbf{P}_3).$$

Verbindet man damit

$$\frac{x_2}{x_3} = (A_2 A_3 E_1 P_1),\ \frac{x_3}{x_1} = (A_3 A_1 E_2 P_2),\ \frac{x_1}{x_2} = (A_1 A_2 E_3 P_3),$$

so erhält man durch Multiplication der entsprechenden Paare

$$-\frac{\xi_2 x_2}{\xi_3 x_3} = (A_2 A_3 \mathbf{P}_1 P_1),\ -\frac{\xi_3 x_3}{\xi_1 x_1} = (A_3 A_1 \mathbf{P}_2 P_2),\ -\frac{\xi_1 x_1}{\xi_2 x_2} = (A_1 A_2 \mathbf{P}_3 P_3),$$

und bildet daraus drei Gruppen wie

$$-\frac{\xi_2 x_2}{\xi_3 x_3} = (A_2 A_3 \mathbf{P}_1 P_1),\ -\frac{\xi_1 x_1}{\xi_3 x_3} = (A_3 A_1 P_2 \mathbf{P}_2).$$

Sobald der Punkt $P$ in der Geraden $p$ liegt, oder $p$ durch $P$ geht, liefert jede dieser Gruppen durch Addition die Einheit als Summe; man hat z. B. nach der perspectivischen Lage der Reihen für das Centrum $P$

$$(A_3 A_1 P_2 \mathbf{P}_2) = (A_3 P_1 A_2 \mathbf{P}_1) = (A_2 \mathbf{P}_1 A_3 P_1)$$

und die Summe zweier Doppelverhältnisse derselben Gruppe von vier Elementen, die sich wie $(A_2 A_3 \mathbf{P}_1 P_1)$ und $(A_2 \mathbf{P}_1 A_3 P_1)$ nur durch Vertauschung der mittlern Elemente unterscheiden, ist stets Eins. Wir beweisen diess, indem wir die Reihe $A_2 A_3 P_1 \mathbf{P}_1$ so projicieren, dass das Bild von $P_1$ unendlich fern liegt, d. h. von einem beliebigen Centrum $\mathfrak{C}$ auf eine zu $\mathfrak{C} P_1$ parallele Gerade; die Summe

$$(A_2 A_3 \mathbf{P}_1 P_1) + (A_2 \mathbf{P}_1 A_3 P_1)$$

wird dann

$$(A_2' A_3' \mathbf{P}_1' \infty) + (A_2' \mathbf{P}_1' A_3' \infty) = \frac{A_2' \mathbf{P}_1'}{A_3' \mathbf{P}_1'} + \frac{A_2' A_3'}{\mathbf{P}_1' A_3'}$$

$$= \frac{A_2' \mathbf{P}_1' + A_3' A_2'}{A_3' \mathbf{P}_1'} = \frac{A_3' \mathbf{P}_1'}{A_3' \mathbf{P}_1'} = 1.$$

Unter den für unsere trimetrischen Coordinaten gemachten Voraussetzungen ist also immer für einen Punkt $P(x_1, x_2, x_3)$ und eine Gerade $p(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, wenn jener in dieser liegt und nur dann

$$-\frac{\xi_2 x_2 + \xi_1 x_1}{\xi_3 x_3} = 1 \text{ oder } \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0.$$

1) Sind die $\xi_i$ constante Grössen $a_1, a_2, a_3$, so gilt für die Coordinaten $x_i$ aller Punkte der durch sie nach § 133. bestimmten Geraden die Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

die man als die Gleichung der Geraden $(a_1, a_2, a_3)$ in trimetrischen Punkt-Coordinaten zu bezeichnen hat. Ihre Coefficienten sind die trimetrischen Linien-Coordinaten der Geraden.

2) Sind die $x_i$ constante Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, so gilt für die Coordinaten $\xi_i$ aller Strahlen, welche den durch sie nach § 133. bestimmten Punkt enthalten, die Gleichung

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 = 0,$$

die Gleichung des Punktes in trimetrischen Linien-Coordinaten; ihre Coefficienten sind seine trimetrischen Punkt-Coordinaten.

3) Einheitlinie $e$ und Einheitpunkt $E$ haben die Gleichungen

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0.$$

4) Jede Gerade durch den Fundamentalpunkt $A_1$ etc. hat eine Gleichung von der Form

$$a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0.$$

5) Die Strahlen $a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ und $a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0$ sind conjugiert harmonisch zu den durch $A_1$ gehenden Fundamentallinien.

6) Die Gleichung des Fundamentalpunktes $A_1$ ist $\xi_1 = 0$.

135. Wenn wir eine Seite $A_2 A_3$ oder $a_1$ des Fundamentaldreiecks $A_1 A_2 A_3$ als die unendlich ferne Gerade der Ebene voraussetzen (Fig. 222.), so ergiebt sich

für die Punktcoordinaten

$$x_1 = p_1 : e_1 = 1;$$

$$\frac{x_2}{x_1} = (\infty A_1 E_3 P_3) = \frac{A_1 P_3}{A_1 E_3} = x_2$$

$$\frac{x_3}{x_1} = (\infty A_1 E_2 P_2) = \frac{A_1 P_2}{A_1 E_2} = x_3.$$

Die Geraden $PP_2$, $EE_2$; $PP_3$, $EE_3$ sind respective parallel zu $A_1 A_2$, $A_1 A_3$ und die Zahlen $x_2$, $x_3$ sind die Längenzahlen der mit den Einheiten $A_1 E_3$, $A_1 E_2$ respective gemessenen Abschnitte $A_1 P_3$ und $A_1 P_2$.

Denkt man endlich

$$A_1 E_3 = A_1 E_2$$

als die Einheit des Längenmaasses, sodass $E$ in der Halbierungslinie des Winkels der beiden Fundamentallinien oder Axen liegt, so hat man als Specialfall der trimetrischen

für die Liniencoordinaten

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = (A_1 \infty \mathbf{E}_3 \mathbf{P}_3) = \frac{A_1 \mathbf{E}_3}{A_1 \mathbf{P}_3},$$

$$\frac{\xi_3}{\xi_1} = (A_1 \infty \mathbf{E}_2 \mathbf{P}_2) = \frac{A_1 \mathbf{E}_2}{A_1 \mathbf{P}_2}.$$

und da wegen

$$(\infty A_1 \mathbf{E}_2 E_2) = (A_1 \infty \mathbf{E}_3 E_3) = -1$$

$$A_1 \mathbf{E}_2 = -A_1 E_2, \quad A_1 \mathbf{E}_3 = -A_1 E_3$$

ist, so hat man

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = -\frac{1}{\frac{A_1 \mathbf{P}_3}{A_1 E_3}}, \quad \frac{\xi_3}{\xi_1} = -\frac{1}{\frac{A_1 \mathbf{P}_2}{A_1 E_2}},$$

d. h. die Zahlen $\frac{\xi_2}{\xi_1}$, $\frac{\xi_3}{\xi_1}$ sind die negativen Reciproken der Längenzahlen der Abschnitte $A_1 \mathbf{P}_3$, $A_1 \mathbf{P}_2$ der Geraden in den Fundamentallinien $A_1 A_2$, $A_1 A_3$, gemessen mit den Einheiten $A_1 E_3$ und $A_1 E_2$ respective.

die gewöhnlichen Cartesischen Parallelcoordinaten des Punktes — schiefwinklig oder rechtwinklig je nach dem Winkel der Axen $A_1A_2$, $A_1A_3$. Man nenne $A_1P_2 = x$ die Abscisse und $A_1P_3 = y$ die Ordinate des Punktes $P$. Die Gleichung der Geraden in solchen Punktcoordinaten ist

$$a_1 + a_2 y + a_3 x = 0$$

oder $Ax + By + C = 0$.

Die Grössen $A : C$ und $B : C$ sind die Plücker'schen Coordinaten der Geraden.

Mit $A_1E_3 = A_1E_2$ als Längeneinheit erhält man als Specialfall der trimetrischen die gewöhnlichen Plücker'schen Liniencoordinaten. Setzen wir

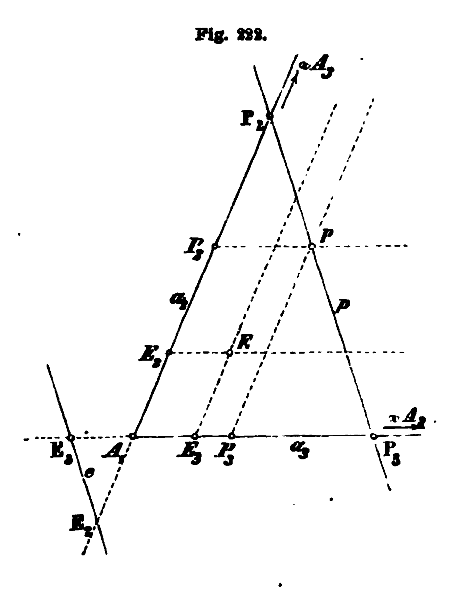
$$-\frac{1}{A_1\mathrm{P}_2} = \xi, \quad -\frac{1}{A_1\mathrm{P}_3} = \eta$$

so wird die Gleichung des Punktes in solchen Linien-Coordinaten

$$x\xi + y\eta + 1 = 0;$$

die Grössen $x$ und $y$ sind die Cartesischen Coordinaten dieses Punktes.

Fig. 222.



1) Die elementaren Coordinatensysteme von Cartesius und Plücker gehen aus denen der allgemeinen projectivischen Coordinaten durch eine und dieselbe Centralprojection hervor, nämlich auf eine Ebene, die der pro-

jicierenden Ebene einer Fundamentallinie parallel ist. Wie ist dieselbe weiter zu bestimmen?

2) In den elementaren Coordinatensystemen vertritt die Wahl der Längeneinheit und die Festsetzung des positiven Sinnes in den Axen die Bestimmung des Einheitpunktes $E$ und der Einheitlinie $e$.
3) Wenn man die Auffassung 2) voraussetzt, so gelangt man durch eine beliebige Centralprojection der elementaren Coordinaten zu den trimetrischen Coordinaten.
4) Der Uebergang von der Coordinatenbestimmung in der Ebene zu der Coordinatenbestimmung im Strahlen- und Ebenen-Bündel erfordert die Einführung der dritten Seite des Fundamentaldreiecks, ob auch als unendlich ferne Gerade ihrer Ebene.
5) Eine durch den Anfangspunkt $A_1$ der Coordinaten gehende Gerade hat eine Gleichung von der Form
$$Ax + By = 0;$$
die Axen sind dargestellt durch $x = 0$, respective $y = 0$.
6) Ein unendlich ferner Punkt der Ebene hat eine Gleichung von der Form $\alpha\xi + \beta\eta = 0$; die unendlich fernen Punkte der Axen sind
$$\xi = 0, \text{ respective } \eta = 0.$$

136. Damit die Gerade
$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$
den Punkt $Q(y_1, y_2, y_3)$ und den Punkt $R(z_1, z_2, z_3)$ enthalte, hat ihre Gleichung die Bedingungen zu erfüllen
$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 = 0, \quad \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 = 0$$
und man erhält die Gleichung der Verbindungslinie $QR$, indem man zwischen den drei geschriebenen Gleichungen $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ eliminiert. Diess geschieht, indem man dieselben mit solchen von den $\xi_i$ unabhängigen Factoren multipliciert, dass in der Summe der Producte die Coefficienten von zweien der Grössen $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ gleichzeitig verschwinden, da dann die dritte durch Division wegfällt und ein nur von den $x, y, z$ gebildeter Ausdruck gleich Null bleibt.

Man erhält solche Factoren wie folgt. Aus je zwei Gleichungen des Systems

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 y_1 + \xi_3 z_1 = 0,$$
$$\xi_1 x_2 + \xi_2 y_2 + \xi_3 z_2 = 0,$$
$$\xi_1 x_3 + \xi_2 y_3 + \xi_3 z_3 = 0,$$

z. B. den ersten, kann man die Verhältnisse von $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ bestimmen, indem man nacheinander $\xi_2$, $\xi_3$ zwischen denselben eliminiert, durch Multiplication mit $y_2$ und $-y_1$, mit $z_2$ und $-z_1$ respective und nachherige Addition. Man erhält so

$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ z_1, & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1, & z_2 \\ x_1, & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix}$$

und daher durch Substitution in die benutzten Gleichungen die Identitäten

$$x_1 \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ z_1, & z_2 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} z_1, & z_2 \\ x_1, & x_2 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix} = 0,$$
$$x_2 \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ z_1, & z_2 \end{vmatrix} + y_2 \begin{vmatrix} z_1, & z_2 \\ x_1, & x_2 \end{vmatrix} + z_2 \begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliciert man also die Gleichungen

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$
$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 = 0,$$
$$\xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 = 0$$

mit den Factoren

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ z_1, & z_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_1, & z_2 \\ x_1, & x_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix}$$

so verschwinden in der Summe der Producte die Coefficienten von $\xi_1$ und $\xi_2$ und man erhält für dieselbe

$$\xi_3 \left\{ x_3 \begin{vmatrix} y_1, & y_2 \\ z_1, & z_2 \end{vmatrix} + y_3 \begin{vmatrix} z_1, & z_2 \\ x_1, & x_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{vmatrix} \right\} = 0.$$

Ebenso bildet man die äquivalenten Formen

$$x_1 \begin{vmatrix} y_2, & y_3 \\ z_2, & z_3 \end{vmatrix} + y_1 \begin{vmatrix} z_2, & z_3 \\ x_2, & x_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2, & x_3 \\ y_2, & y_3 \end{vmatrix} = 0,$$
$$x_2 \begin{vmatrix} y_3, & y_1 \\ z_3, & z_1 \end{vmatrix} + y_2 \begin{vmatrix} z_3, & z_1 \\ x_3, & x_1 \end{vmatrix} + z_2 \begin{vmatrix} x_3, & x_1 \\ y_3, & y_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Sie sind äquivalent mit

$$x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 + y_1 z_2 x_3 - y_1 z_3 x_2 + z_1 x_2 y_3 - z_1 x_3 y_2 = 0$$

und man schreibt sie in Form der Determinanten

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix} = 0;$$

ihre Entwickelung bildet man nach dem Schema

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 & x_2 \\ \diagdown & \times & \times & \diagup & \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 & y_2 \\ \diagup & \times & \times & \diagdown & \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_1 & z_2 \end{array}$$

wobei die drei von oben links nach unten rechts gehenden Diagonalen drei positive, die andern negative Glieder geben.

Die Elimination der $\xi_i$ zwischen

$$x_1\xi_1+y_1\xi_2+z_1\xi_3=0,\ x_2\xi_1+y_2\xi_2+z_2\xi_3=0,\ x_3\xi_1+y_3\xi_2+z_3\xi_3=0$$

giebt offenbar durch Multiplication mit den entsprechenden Factoren die Summe

$$\xi_3 \left\{ x_3 \begin{vmatrix} y_1, & z_1 \\ y_2, & z_2 \end{vmatrix} + y_3 \begin{vmatrix} z_1, & x_1 \\ z_2, & x_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix} \right\} = 0,$$

welches nach derselben Schreibart nichts anderes ist als

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ebenso liefert die Elimination der $x$ zwischen den Gleichungen

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 = 0,\ x_1\eta_1 + x_2\eta_2 + x_3\eta_3 = 0,$$
$$x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2 + x_3\zeta_3 = 0$$

die Gleichung des Schnittpunktes der Geraden $q(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ und $r(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ in den analogen Formen

$$\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1 \\ \xi_2, & \eta_2, & \zeta_2 \\ \xi_3, & \eta_3, & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0.\text{*)}$$

*) Nach der angegebenen Entstehung wird der Nullwerth einer solchen Determinante nicht geändert, wenn man alle Elemente einer Reihe oder Zeile mit demselben Factor multipliciert. Die entwickelte Form zeigt, dass man durch die angegebene Operation die Determinante selbst mit diesem Factor multipliciert hat. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die Determinanten in § 141. und allgemein.

Ebenso ergiebt sich: Die Determinante ist Null, wenn die entspre-

Unter denselben Bedingungen liegen drei Punkte $x, y, z$ in einer Geraden, respective gehen drei Gerade $\xi, \eta, \zeta$ durch einen Punkt.

1) Die Entwickelungen des Textes geben für die Auflösung von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2$$

die Formeln

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} c_1, & a_{12} \\ c_2, & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11}, & c_1 \\ a_{21}, & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Man erhält damit für den Schnittpunkt der Geraden

$$5x_1 - 2x_2 - 10x_3 = 0, \; -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$

die Coordinaten

$$\frac{x_2}{x_1} = (A_2 A_1 E_3 P_3) = \frac{\begin{vmatrix} -5, & -10 \\ 1, & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2, & -10 \\ 2, & 4 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{6},$$

$$\frac{x_3}{x_1} = (A_3 A_1 E_2 P_2) = \frac{\begin{vmatrix} -2, & -5 \\ 2, & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -2, & -10 \\ 2, & 4 \end{vmatrix}} = \frac{2}{3}$$

und construiert den Punkt nach § 133. als Schnittpunkt der Geraden $A_3P_3$, $A_2P_2$.

Man übertrage diess in Cartesische Coordinaten.

2) Ebenso für die Verbindungslinie der Punkte

$$3\xi_1 - \xi_2 + 6\xi_3 = 0, \; \xi_1 + 5\xi_2 + 4\xi_3 = 0,$$

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = (A_1 A_2 \mathbf{E}_3 \mathbf{P}_3) = \frac{3}{17}, \; \frac{\xi_3}{\xi_1} = (A_1 A_3 \mathbf{E}_2 \mathbf{P}_2) = -\frac{8}{17}.$$

3) Die Verbindungslinie der Punkte $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$ ist

---

chenden Elemente zweier Reihen oder Zeilen übereinstimmen; die Determinante ändert ihren Werth nicht, wenn zu den Elementen einer Reihe oder Zeile gleiche Vielfache der entsprechenden Elemente einer andern Reihe oder Zeile addiert werden.

$$\begin{vmatrix} x, & y, & 1 \\ x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder}$$

$$x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0;$$

ebenso der Schnittpunkt der Geraden $(\xi_1, \eta_1)$, $(\xi_2, \eta_2)$

$$\begin{vmatrix} \xi, & \eta, & 1 \\ \xi_1, & \eta_1, & 1 \\ \xi_2, & \eta_2, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4) Die Determinanten des Textes in der zweiten Schreibart, bei welcher die Zeilen der ersten als Reihen erscheinen und umgekehrt, erscheinen als Resultate der Elimination der $l, m, n$ respective der $\lambda, \mu, \nu$ zwischen

$$l x_1 + m y_1 + n z_1 = 0, \; l x_2 + m y_2 + n z_2 = 0,$$
$$l x_3 + m y_3 + n z_3 = 0;$$
$$\lambda \xi_1 + \mu \eta_1 + \nu \zeta_1 = 0, \; \lambda \xi_2 + \mu \eta_2 + \nu \zeta_2 = 0,$$
$$\lambda \xi_3 + \mu \eta_3 + \nu \zeta_3 = 0.$$

Man erhält aus der ersten Gruppe für die Coordinaten eines beliebigen Punktes der geraden Linie vom Punkte $y$ nach dem Punkte $z$ die Werthe

$$x_i = -\frac{m y_i + n z_i}{l};$$

aus der zweiten für die Coordinaten eines Strahls aus dem Schnittpunkt der Geraden $\eta$ und $\zeta$ die analogen

$$\xi_i = -\frac{\mu \eta_i + \nu \zeta_i}{\lambda}.$$

Für die Substitution in Gleichungen, welche in den $x$, respective den $\xi$ homogen sind, darf der Factor $-1 : l$, $-1 : \lambda$ respective unterdrückt werden.

5) Wenn drei Punkte $x, y, z$ in einer geraden Linie liegen, respective wenn drei Gerade $\xi, \eta, \zeta$ durch einen Punkt gehen, so bilden die mit Constanten $c_i$ multiplicierten Gleichungen derselben die Summe Null. Der ausgesprochene Satz ist nur ein andrer Ausdruck des vorigen. Denn es ist

$$c_1(x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + x_3 \xi_3) + c_2(y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + y_3 \xi_3)$$
$$+ c_3(z_1 \xi_1 + z_2 \xi_2 + z_3 \xi_3) = 0,$$

nur, wenn gleichzeitig

$$c_1 x_1 + c_2 y_1 + c_3 z_1 = 0,$$
$$c_1 x_2 + c_2 y_2 + c_3 z_2 = 0,$$
$$c_1 x_3 + c_2 y_3 + c_3 z_3 = 0$$

sind, d. h. wenn

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

6) Die Elimination von $l$ zwischen zweien Gleichungen der ersten Gruppe in 4) giebt z. B. für die ersten

$$m(x_2 y_1 - x_1 y_2) + n(x_2 z_1 - x_1 z_2) = 0,$$

also
$$\frac{m}{n} = -\frac{x_2 z_1 - x_1 z_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2}$$

und analoge Werthe aus den übrigen Paaren.

Der gewonnene Ausdruck führt zur geometrischen Interpretation. Es ist

$$\frac{m}{n} = -\frac{x_2 z_1 \left(1 - \frac{x_1}{x_2} : \frac{z_1}{z_2}\right)}{x_2 y_1 \left(1 - \frac{x_1}{x_2} : \frac{y_1}{y_2}\right)},$$

$$= -\frac{z_1}{y_1} \cdot \frac{1 - (A_3 \cdot A_1 A_2 E P) : (A_3 \cdot A_1 A_2 E R)}{1 - (A_3 \cdot A_1 A_2 E P) : (A_3 \cdot A_1 A_2 E Q)}$$

$$= -\frac{z_1}{y_2} \cdot \frac{1 - (A_3 \cdot A_1 A_2 R P)}{1 - (A_3 \cdot A_1 A_2 Q P)} = -\frac{z_1}{y_2} \cdot \frac{(A_3 \cdot A_1 R A_2 P)}{(A_3 \cdot A_1 Q A_2 P)}$$

d. h.

$$\frac{m}{n} = -\frac{z_1}{y_1} \cdot (A_3 \cdot A_2 P Q R) = (\mathbf{P}_1 P Q R). \text{ (Fig. 223}^{a}.)$$

Für Cartesische Coordinaten werden die Strahlen von $A_3$ nach $P$, $Q$, $R$ Parallelen zu einer Coordinatenaxe (Fig. 223[b].) und $A_3 A_2$ die unendlich ferne Gerade, $z_1 = y_1 = 1$, also

$$\frac{m}{n} = -(\infty P Q R) = -\frac{PR}{PQ}$$

das negative Theilverhältniss des Punktes $P$ in der Strecke der gegebenen Punkte — wie leicht direct aus der Figur folgt.

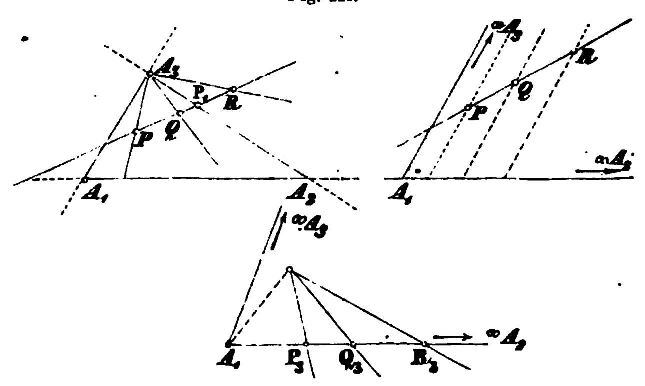
7) Aus den beiden ersten Gleichungen der zweiten Gruppe in 4) folgt

$$\frac{\mu}{\nu}=\frac{\xi_2\zeta_1-\xi_1\zeta_2}{\xi_2\eta_1-\xi_1\eta_2}=-\frac{\zeta_1}{\eta_1}\cdot\frac{1-\frac{\xi_1}{\xi_2}:\frac{\zeta_1}{\zeta_2}}{1-\frac{\xi_1}{\xi_2}:\frac{\eta_1}{\eta_2}}$$

$$=-\frac{\zeta_1}{\eta_1}\cdot\frac{1-(A_2A_1\mathbf{E}_3\mathbf{P}_3):(A_2A_1\mathbf{E}_3\mathbf{R}_3)}{1-(A_2A_1\mathbf{E}_3\mathbf{P}_3):(A_2A_1\mathbf{E}_3\mathbf{Q}_3)}$$

$$=-\frac{\zeta_1}{\eta_1}\cdot\frac{(A_2\mathbf{R}_3A_1\mathbf{P}_3)}{(A_2\mathbf{Q}_3A_1\mathbf{P}_3)}=-\frac{\zeta_1}{\eta_1}\cdot(A_1\mathbf{P}_3\mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3).$$

Fig. 223.




Für Plücker'sche Coordinaten beweist man leicht direct

$$\frac{\mu}{\nu}=-(A_1\mathbf{P}_3\mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3);\ (\text{Fig. } 223^c.)$$

denn man erhält

$$\frac{\mu}{\nu}=\frac{\xi_2-\xi}{\xi-\xi_1}=\frac{\eta_2-\eta}{\eta-\eta_1}$$

und wegen

$$\eta=-\frac{1}{A_1\mathbf{P}_3},\ \eta_1=-\frac{1}{A_1\mathbf{Q}_3},\ \eta_2=-\frac{1}{A_1\mathbf{R}_3}$$

$$\frac{\mu}{\nu}=\frac{-\frac{1}{A_1\mathbf{R}_3}+\frac{1}{A_1\mathbf{P}_3}}{-\frac{1}{A_1\mathbf{P}_3}+\frac{1}{A_1\mathbf{Q}_3}}=\frac{A_1\mathbf{Q}_3(A_1\mathbf{R}_3+\mathbf{P}_3A_1)}{A_1\mathbf{R}_3(A_1\mathbf{Q}_3+\mathbf{P}_3A_1)}$$

$$=-\frac{A_1\mathbf{Q}_3}{A_1\mathbf{R}_3}:\frac{\mathbf{P}_3\mathbf{Q}_3}{\mathbf{P}_3\mathbf{R}_3}=-(A_1\mathbf{P}_3\mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3).$$

137. Wir fragen ehe wir weiter gehen nach der geometrischen Bedeutung von homogenen Gleichungen $n^{\text{ten}}$ Grades zwischen den Variabeln $x$, $\xi$ respective, also nach derjenigen von homogenen Gleichungen $n^{\text{ten}}$ Grades zwischen zwei Variabeln $x_1$, $x_2$ oder $\xi_1$, $\xi_2$ und solcher zwischen drei Variabeln $x_1$, $x_2$, $x_3$ oder $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$. Bei zwei Variabeln genügen der Gleichung $n$ reelle oder nicht reelle (complexe) Werthe des Verhältnisses $x_1 : x_2$ oder $\xi_1 : \xi_2$, welches als Unbekannte der Gleichung anzusehen ist; jeder derselben bestimmt ein Element des Gebildes, auf das sich die Variabeln beziehen. Eine homogene Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades zwischen zwei Variabeln stellt also geometrisch eine Gruppe von $n$ Elementen in einem Grundgebilde erster Stufe dar — wenn wir sowohl den reellen als den complexen Wurzeln solche Elemente entsprechend denken. Die algebraischen Eigenschaften der Gleichung geben geometrische Eigenschaften dieser Gruppe.

Betrachten wir die homogene Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades zwischen drei Variabeln an dem Beispiel der ebenen Systeme, zunächst in Punkt-Coordinaten. Sie ist die analytische Darstellung einer Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung.

Denken wir um einen der Fundamentalpunkte z. B. $A_1$ eine Gerade sich drehend, bis sie in sich zurückkehrt, so hat in jeder ihrer Lagen das Verhältniss $x_2 : x_3$ für ihre Punkte einen bestimmten constanten Werth und man erhält $x_3$ als ein gewisses Vielfaches von $x_2$; substituiert man diess für $x_3$ in die gedachte Gleichung, so erhält man eine homogene Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades zwischen $x_1$ und $x_2$ zur Bestimmung derjenigen Werthe des Verhältnisses $x_1 : x_2$, welche beiden Gleichungen, der gegebenen und der des Strahls aus $A_1$ genügen; dieselben bestimmen Strahlen aus $A_3$ und somit eine Gruppe von $n$ Punkten in dem Strahle aus $A_1$.

Das geometrische Gebilde, welches der homogenen Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades zwischen drei Variabeln $x_i$ entspricht, ist also eine stetige Folge von Punkten, die mit jedem Strahl aus einem der Fundamentalpunkte $n$ reelle oder nicht reelle Punkte gemein hat; und dasselbe gilt für jeden Strahl aus einem beliebigen andern Punkte oder jede Gerade der Ebene aus denselben Gründen. Diess geometrische Gebilde ist also eine ebene Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung. (§ 62.)

Ebenso repräsentiert die allgemeine homogene Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades zwischen drei Variabeln $\xi_i$ eine Curve $n^{\text{ter}}$ Classe in der Ebene, nämlich eine Curve als Enveloppe gerader Linien; die genau analogen Betrachtungen zeigen, dass von einem beliebigen Punkte der Ebene des Gebildes $n$ gerade Linien ausgehen, welche dem Gebilde angehören, weil die betreffenden Verhältnisse der $\xi_i$ sowohl der Gleichung des Punktes als der gegebenen Gleichung genügen. (§ 62.)

Man sieht auch, dass eine Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades zwischen zweien der Variabeln des ebenen Systems d. i. der $x_i$ oder $\xi_i$ der Ausdruck der Gruppe von $n$ Punkten oder der Gruppe von $n$ Strahlen ist, welche eine Gerade oder ein Punkt der Ebene mit einer Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung respective $n^{\text{ter}}$ Classe gemein hat.

Ganz analog in den Bündeln. Eine homogene Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades zwischen $x_1$, $x_2$, $x_3$ als Coordinaten im Strahlenbündel repräsentiert eine Kegelfläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung, eine solche Gleichung zwischen zweien dieser Variabeln die Gruppe von Strahlen dieser Kegelfläche, welche in einer bestimmten Ebene des Bündels liegen. Und eine homogene Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades zwischen $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ als Coordinaten im Bündel stellt eine Kegelfläche $n^{\text{ter}}$ Classe dar, eine solche Gleichung zwischen zweien dieser Variabeln die Gruppe von Ebenen, welche diese Kegelfläche mit einem bestimmten Strahl des Bündels gemein hat. (§ 65.)

Daraus folgt dann weiter, dass zwei Gleichungen zwischen den (auf das nämliche Fundamentalsystem bezogenen) $x_i$, respective den $\xi_i$ stets eine der Zahl ihrer gemeinsamen Auflösungen für zwei der Verhältnisse der $x_i$ respective der $\xi_i$ entsprechende Zahl von Elementen der ebenen Systeme oder der Bündel repräsentieren; nämlich für die ebenen Systeme und die $x_i$ die Gruppe der gemeinsamen Punkte der beiden Curven, welche die betrachteten Gleichungen einzeln repräsentieren; für die $\xi_i$ ebenso die Gruppe der bezüglichen gemeinsamen Tangenten. Ferner im Bündel für die $x_i$ die Gruppe der gemeinsamen Strahlen von zwei Kegelflächen in demselben, für die $\xi_i$ die der gemeinsamen Tangentialebenen von zwei solchen Kegelflächen.

Gleichungen zweiten Grades zwischen $x_1$, $x_2$, $x_3$ oder

$\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ stellen daher Curven zweiter Ordnung respective Classe im ebenen Systeme und Kegel zweiter Ordnung oder Classe im Bündel dar; dass Curven und Kegel zweiter Ordnung auch zweiter Classe sind — man nennt sie darum eben mit ausschliesslichem Bezug auf den Grad ihrer Gleichungen Curven und Kegel zweiten Grades — wird analytisch leicht bewiesen (8), sowie es im Verlauf unserer Entwickelungen geometrisch bewiesen worden ist. Zwei Curven zweiten Grades in derselben Ebene haben vier Punkte und vier Tangenten gemein — entsprechend den vier reellen oder complexen gemeinsamen Werthgruppen, die ihre Gleichungen liefern.

1) Da die allgemeine homogene Gleichung zweiten Grades zwischen drei Variabeln als von der Form

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{13}x_1x_3 = 0$$

sechs Coefficienten $a_{ik}$ enthält, deren Verhältnisse sie bestimmen, so ist eine Curve zweiten Grades durch fünf Punkte oder Tangenten und ein Kegel zweiten Grades durch fünf Erzeugende oder Tangentialebenen bestimmt. (§ 25.)

2) Die Gleichung der Curve zweiter Ordnung durch die fünf Punkte $u$, $v$, $w$, $y$, $z$ entsteht durch Elimination der $a_{ik}$ aus der Gruppe von Gleichungen, welche diesen Bedingungen entsprechen,

$$a_{11}x_1^2 + \cdots + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots = 0,$$
$$a_{11}u_1^2 + \cdots + 2a_{12}u_1u_2 + \cdots = 0, \text{ etc.}$$

in der Form

$$\begin{vmatrix} x_1^2, & x_2^2, & x_3^2, & 2x_1x_2, & 2x_2x_3, & 2x_1x_3 \\ u_1^2, & u_2^2, & u_3^2, & 2u_1u_2, & 2u_2u_3, & 2u_1u_3 \\ v_1^2, & v_2^2, & v_3^3, & 2v_1v_2, & 2v_2v_3, & 2v_1v_3 \\ w_1^2, & w_2^2, & w_3^2, & 2w_1w_2, & 2w_2w_3, & 2w_1w_3 \\ y_1^2, & y_2^2, & y_3^2, & 2y_1y_2, & 2y_2y_3, & 2y_1y_3 \\ z_1^2, & z_2^2, & z_3^2, & 2z_1z_2, & 2z_2z_3, & 2z_1z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Mit Vertauschung der Reihen und Zeilen ist diese Determinante die Bedingung der Verträglichkeit der Gleichungen

$$\begin{aligned}
c_1 x_1^2 + c_2 u_1^2 + c_3 v_1^2 + c_4 w_1^2 + c_5 y_1^2 + c_6 z_1^2 &= 0,\\
c_1 x_2^2 + c_2 u_2^2 + c_3 v_2^2 + c_4 w_2^2 + c_5 y_2^2 + c_6 z_2^2 &= 0,\\
c_1 x_3^2 + c_2 u_3^2 + c_3 v_3^2 + c_3 w_3^2 + c_5 y_3^2 + c_6 z_3^2 &= 0,\\
2(c_1 x_1 x_2 + c_2 u_1 u_2 + c_3 v_1 v_2 + c_4 w_1 w_2 + c_5 y_1 y_2 + c_6 z_1 z_2) &= 0,\\
2(c_1 x_2 x_3 + c_2 u_2 u_3 + c_3 v_2 v_3 + c_4 w_2 w_3 + c_5 y_2 y_3 + c_6 z_2 z_3) &= 0,\\
2(c_1 x_1 x_3 + c_2 u_1 u_3 + c_3 v_1 v_3 + c_4 w_1 w_3 + c_5 y_1 y_3 + c_6 z_1 z_3) &= 0.
\end{aligned}$$

Diese aber sind erforderlich, damit sich sechs Constanten $c_i$ so bestimmen lassen, dass die Summe der mit ihnen multiplicierten Quadrate der Gleichungen der sechs Punkte $x$, $u$, $v$, $w$, $y$, $z$ identisch Null sei:

$$c_1(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3)^2 + c_2(u_1\xi_1 + \cdot\cdot)^2 + \cdots \\ + c_6(z_1\xi_1 + \cdot\cdot)^2 = 0.$$

Also: Sechs Punkte liegen auf derselben Curve zweiter Ordnung, wenn die Summe ihrer mit geeigneten Constanten multiplicierten Gleichungen Null ist.

Und: Sechs Gerade berühren dieselbe Curve zweiter Ordnung, wenn die Summe ihrer mit gewissen Constanten multiplicierten Gleichungen Null ist. (Vergl. § 136.; 5., für drei Punkte in einer Geraden und drei Gerade durch einen Punkt.)

3) Sind dann für eine Curve zweiten Grades von sechs Punkten in ihr drei als Fundamentalpunkte und die übrigen als Punkte $z$, $y$, $x$ gewählt, so muss die Gleichung in 1) für das gleichzeitige Null werden von irgend zweien ihrer Variabeln erfüllt d. h. von der Form sein

$$A_1 x_2 x_3 + A_2 x_3 x_1 + A_3 x_1 x_2 = 0$$

oder

$$\frac{A_1}{x_1} + \frac{A_2}{x_2} + \frac{A_3}{x_3} = 0.$$

Die Punkte $z$, $y$ und $x$ geben dann die Bedingungen a) und die Verträglichkeit derselben fordert die Relation b)

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} \frac{A_1}{z_1} + \frac{A_2}{z_2} + \frac{A_3}{z_3} &= 0,\\ \frac{A_1}{y_1} + \frac{A_2}{y_2} + \frac{A_3}{y_3} &= 0,\\ \frac{A_1}{x_1} + \frac{A_2}{x_2} + \frac{A_3}{x_3} &= 0, \end{aligned} \qquad \text{b)}\quad \begin{vmatrix} \frac{1}{z_1} & \frac{1}{z_2} & \frac{1}{z_3} \\ \frac{1}{y_1} & \frac{1}{y_2} & \frac{1}{y_3} \\ \frac{1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & \frac{1}{x_3} \end{vmatrix} = 0.$$

4) Dieselbe Bedingung macht, dass $A_1 X A_2 Y A_3 Z$ ein Pascal'sches Sechseck ist, d. h. drückt aus, dass die Schnittpunkte der Paare von Geraden $A_1 X$, $Y A_3$; $X A_2$, $A_3 Z$; $A_2 Y$, $Z A_1$ in einer Geraden liegen. Bildet man nach § 136. die Gleichungen dieser Geraden, so findet man für den Schnittpunkt des ersten, zweiten, dritten Paares die Verhältnisse $X_1 : X_2 : X_3$ der bezüglichen Coordinaten respective gleich den a) und diese liegen in einer Geraden (§ 136.) für b)

$$\text{a)}\ \begin{array}{l} x_2 y_1 : x_2 y_2 : x_3 y_2; \\ y_1 z_3 : y_3 z_2 : y_3 z_3; \\ z_1 x_1 : z_2 x_1 : z_1 x_3; \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} x_2 y_1, & x_2 y_2, & x_3 y_2 \\ y_1 z_3, & y_3 z_2, & y_3 z_3 \\ z_1 x_1, & z_2 x_1, & z_1 x_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die letzte Determinante wird aber durch die Division der Elemente ihrer Zeilen mit $x_2 y_2$, $y_3 z_3$, $z_1 x_1$ respective und der Elemente ihrer Reihen mit $y_1$, $z_2$, $x_3$ respective mit der obigen identisch. (Vergl. § 136., Anmerk.) Ersetzt man überall die Punktcoordinaten durch die Liniencoordinaten, so giebt dieselbe Entwickelung den Satz von Brianchon für sechs Tangenten eines Kegelschnitts und interpretiert man dieselben Formeln in Coordinaten des Strahlen- oder Ebenen-Bündels, so hat man die entsprechenden Sätze für sechs Kanten respective sechs Tangentialebenen des Kegels zweiten Grades. (§§ 27., 28., 68.)

5) Die Tangente einer Curve im Punkte $x$ ist die gerade Verbindungslinie dieses Punktes mit dem unendlich nahe gelegenen Nachbarpunkte $x + dx$ und wird also für $X$ als die laufenden Coordinaten ausgedrückt durch

$$\begin{vmatrix} X_1, & X_2, & X_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ x_1 + dx_1, & x_2 + dx_2, & x_3 + dx_3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\text{diess ist}\ \begin{vmatrix} X_1, & X_2, & X_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ dx_1, & dx_2, & dx_3 \end{vmatrix} = 0\ \text{oder}$$

$$X_1 (x_2 dx_3 - x_3 dx_2) + \cdots = 0.$$

Ist dann $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ oder $f = 0$ die homogene Gleichung der Curve und sind $f_1$, $f_2$, $f_3$ die Differentialquotienten derselben nach den Variabeln

$x_1, x_2, x_3$ respective, so hat man nach dem Euler'schen Satze von den homogenen Functionen

$$f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 = nf = 0,$$
$$f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2 + f_3\, dx_3 = 0,$$

aus diesen aber durch successive Elimination von $f_1, f_2, f_3$

$$(x_2\, dx_3 - x_3\, dx_2) : (x_3\, dx_1 - x_1\, dx_3) : (x_1\, dx_2 - x_2\, dx_1)$$
$$= f_1 : f_2 : f_3.$$

Die Gleichung der Tangente ist also

$$X_1 f_1 + X_2 f_2 + X_3 f_3 = 0.$$

6) Die Gleichung der Tangente eines Kegelschnitts (1) im Punkte $x'$ ist

$$x_1(a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3') + x_2(a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3')$$
$$+ x_3(a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3') = 0.$$

Ist $x'$ nicht in der Curve, so repräsentiert dieselbe Gleichung die Polare von $x'$ in Bezug auf den Kegelschnitt (1).

7) Unter der Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

ist die Curve zweiten Grades ein Paar von Geraden.

8) Damit die Gerade

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$$

den Kegelschnitt (1) im Punkte $x'$ berühre, muss sie die Bedingungen erfüllen

$$a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + a_{13}x_3' = \lambda \xi_1,$$
$$a_{12}x_1' + a_{22}x_2' + a_{23}x_3' = \lambda \xi_2,$$
$$a_{13}x_1' + a_{23}x_2' + a_{33}x_3' = \lambda \xi_3.$$

Eliminiert man die $x_1, x_2, x_3, \lambda$ zwischen diesen vier Gleichungen (§ 141.), so erhält man die Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \xi_1 \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & \xi_2 \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & \xi_3 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

als die Gleichung, welcher die Coordinaten $\xi_i$ aller Tangenten dieses Kegelschnitts genügen müssen.

9) Zwei Gerade $\xi$, $\eta$ sind in Bezug auf den Kegelschnitt (1) conjugiert, d. h. der Pol der einen liegt in der andern, wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & \xi_1 \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & \xi_2 \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & \xi_3 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

10) Man übertrage die Entwickelung in 2) auf eine Curve dritter Ordnung und erörtere die bezüglichen Sätze für den allgemeinen Fall.

11) Eine Curve $n^{\text{ter}}$ Ordnung ist durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte bestimmt und damit $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Punkte auf einer solchen Curve liegen, muss die Summe der mit Constanten multiplicierten $n^{\text{ten}}$ Potenzen ihrer Gleichungen Null sein.

138. Wenn fünf Punkte $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $E$, von denen keine vier in einer Ebene liegen oder fünf Ebenen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, $\mathbf{E}$, von denen keine vier durch einen Punkt gehen, gegeben sind, so lässt sich jeder weitere Punkt respective jede Ebene des Raumes in Bezug auf diese festen Elemente durch Coordinaten bestimmen, wie folgt. (Fig. 224., p. 534.)

Jeder Punkt $P$ bestimmt mit den geraden Verbindungslinien von dreien der Punkte $A_i$, die ein Dreieck bilden, drei Ebenen, die nur ihn gemein haben und durch die Doppelverhältnisse gegeben werden können, die sie mit den drei festen Ebenen durch dieselbe Gerade — nämlich nach den übrigen $A$ und nach $E$ bilden; z. B. also durch die Doppelverhältnisse

$$(A_1A_2 \cdot A_3A_4EP),$$
$$(A_2A_3 \cdot A_4A_1EP),$$
$$(A_3A_1 \cdot A_2A_4EP)$$

ist der Punkt $P$ bestimmt.

Jede Ebene $\Pi$ bestimmt mit den Schnittlinien von dreien der Ebenen $\mathbf{A}_i$, die ein Dreikant bilden, drei Punkte, die nur sie gemein haben und durch die Doppelverhältnisse gegeben werden können, die sie mit den drei festen Punkten in derselben Geraden — nämlich in den beiden übrigen $\mathbf{A}$ und in $\mathbf{E}$ bilden; z. B. also durch die Doppelverhältnisse

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{E}\Pi),$$
$$(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_4\mathbf{A}_1\mathbf{E}\Pi),$$
$$(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2\mathbf{A}_4\mathbf{E}\Pi)$$

ist die Ebene $\Pi$ bestimmt.

Bezeichnet man durch $e_1$, $e_2$, $e_3$, $e_4$ die Abstände des Punktes $E$ von den Ebenen $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$, $A_1A_2A_3$ respective und durch $p_1$, $p_2$, $p_3$, $p_4$ die entsprechenden Abstände des Punktes $P$, oder allgemeiner sind $e_i$ und $p_i$ die in derselben Richtung gemessenen Längen von $E$, respective $P$ bis zur Ebene $A_jA_kA_l$, so hat man

$$(A_1A_2 \cdot A_3A_4 EP) = \frac{p_3 : e_3}{p_4 : e_4},$$

$$(A_2A_3 \cdot A_4A_1 EP) = \frac{p_4 : e_4}{p_1 : e_1},$$

$$(A_3A_1 \cdot A_2A_4 EP) = \frac{p_2 : e_2}{p_4 : e_4}$$

und kann setzen

$$p_i : e_i = x_i,$$

so dass $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ vier Zahlen bezeichnen, deren Verhältnisse den Punkt $P$ in Bezug auf die fünf Fundamentalpunkte bestimmen und durch dieselben construieren lassen. Sie sind als t e t r a m e t r i s c h e C o o r d i n a t e n d e s P u n k t e s $P$ zu bezeichnen; die vier Maassstäbe, nach denen sie gemessen werden, bestimmt der Punkt $E$ durch seine Lage gegen die Flächen des Fundamentaltetraeders $A_1A_2A_3A_4$. Wir bezeichnen $E$ als den E i n h e i t p u n k t des Systems, denn seine Coordinaten sind gleich Eins.

Liegt $P$ in einer Fläche des Fundamentaltetraeders, also in

Bezeichnen $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3$, $\varepsilon_4$ die Abstände der Ebene $\Pi$ von Punkten $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$ respective und $\pi_1$, $\pi_2$, $\pi_3$, $\pi_4$ die entsprechenden Abstände der Ebene $\Pi$, oder allgemeiner die $\varepsilon_i$ und $\pi_i$ die in bestimmten Richtungen gemessenen Längen von den Ecken des Fundamentaltetraeders bis zu den Ebenen $\mathbf{E}$ und $\Pi$, so hat man

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_3\mathbf{A}_4 \mathbf{E}\Pi) = \frac{\pi_3 : \varepsilon_3}{\pi_4 : \varepsilon_4},$$

$$(\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_4\mathbf{A}_1 \mathbf{E}\Pi) = \frac{\pi_4 : \varepsilon_4}{\pi_1 : \varepsilon_1},$$

$$(\mathbf{A}_3\mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_2\mathbf{A}_4 \mathbf{E}\Pi) = \frac{\pi_2 : \varepsilon_2}{\pi_4 : \varepsilon_4}$$

und kann setzen

$$\pi_i : \varepsilon_i = \xi_i,$$

so dass $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$, $\xi_4$ vier Zahlen bezeichnen, deren Verhältnisse die Ebene $\Pi$ in Bezug auf die fünf Fundamentalebenen bestimmen und durch dieselben zu construieren gestatten. Sie sind als t e t r a m e t r i s c h e C o o r d i n a t e n d e r E b e n e $\Pi$ zu bezeichnen; die vier Maassstäbe, nach denen sie gemessen werden, bestimmt die Ebene $\mathbf{E}$ durch ihre Lage gegen die Ecken des Fundamentaltetraeders $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4$. Wir nennen $\mathbf{E}$ die E i n h e i t e b e n e des Systems, denn ihre Coordinaten sind gleich Eins.

Geht $\Pi$ durch eine Ecke des Fundamentaltetraeders, also

$A_1 A_2 A_3$, $A_2 A_3 A_4$, $A_3 A_4 A_1$, $A_4 A_1 A_2$ respective, so ist je eine der Coordinaten $x_4, x_1, x_2, x_3$ vom Werthe Null und wenn man die den bleibenden $x_i$ entsprechenden $p_i$ und $e_i$ in Richtungen misst, welche der entsprechenden Tetraederfläche angehören, so kommt man auf die Coordinatenbestimmung des ebenen Punktsystems in § 133. zurück.

Der Lage von $P$ in einer Tetraederkante z. B. $A_1 A_2$ entspricht das gleichzeitige Verschwinden von zwei $x$, nämlich $x_3$, $x_4$, und der Punkt wird dann durch das Verhältniss der übrigen, also das von $x_1$ zu $x_2$ bestimmt, wie in § 132. für die Punktreihe erörtert ist.

Ist $P$ in einer Ecke des Fundamentaltetraeders z. B. in $A_1$ gedacht, so verschwinden drei der $x_i$, z. B. hier die drei $x_2$, $x_3$, $x_4$ und $x_1$ ist etwa die Längenzahl der betreffenden Tetraederhöhe in Bezug auf das gleichnamige $e$ als Einheit.

durch $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4$, $\mathbf{A}_3\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_4\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ respective, so ist je eine der Coordinaten $\xi_4$, $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ Null und wenn man die den bleibenden $\xi_i$ entsprechenden $\pi_i$ und $\varepsilon_i$ in Richtungen misst, die der entsprechenden Gegenfläche des Tetraeders angehören, so kommt man auf die Coordinatenbestimmung des ebenen Strahlensystems in § 133. zurück.

Wenn die Ebene $\Pi$ durch eine Kante des Tetraeders z. B. $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ geht, so entspricht dem das gleichzeitige Verschwinden von $\xi_3$ und $\xi_4$ und die Ebene wird durch das Verhältniss von $\xi_1$ und $\xi_2$ bestimmt, wie es in § 132. für das Ebenenbüschel sich ergab.

Ist $\Pi$ mit einer Fläche des Fundamentaltetraeders identisch z. B. mit $\mathbf{A}_1$, so ist gleichzeitig $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$, $\xi_4 = 0$ und $\xi_1$ kann als Längenzahl der zugehörigen Tetraederhöhe in Bezug auf das gleichnamige $\varepsilon$ als Einheit angesehen werden.

1) Wie übertragen sich die Sätze unter 1, 2, 3 in § 133. in den Raum?

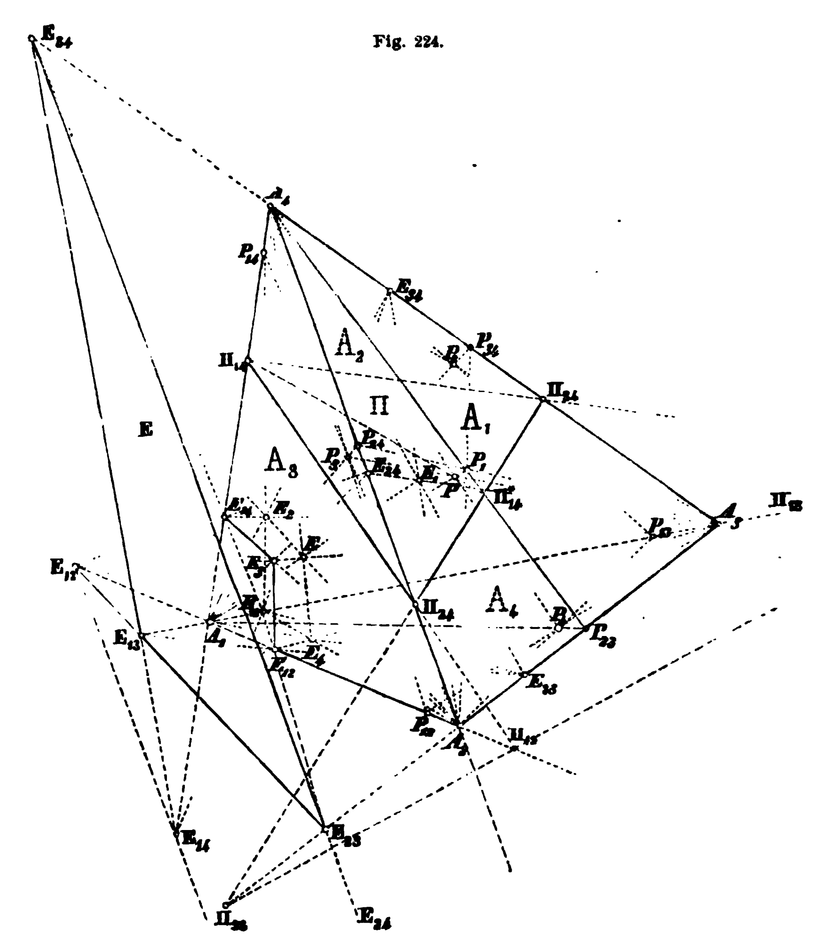
2) Die Relationen des § 136.; 4. für die laufenden Coordinaten in der Reihe $y$, $z$ und für die laufenden Coordinaten im Büschel $\eta$, $\zeta$ gelten unverändert für den Raum und die gegenwärtigen Coordinaten.

139. Wir denken nun die Tetraeder der $A_i$ und der $\mathbf{A}_i$ in der Art identisch, dass die Ecke $A_i$ die Ebene $\mathbf{A}_i$ zur Gegenfläche hat und setzen in Fortbildung der früheren Annahmen fest, dass der Einheitpunkt $E$ und die Einheitebene $\mathbf{E}$

an allen Ecken, in allen Kanten und auf allen Flächen des Tetraeders durch dasselbe harmonisch getrennt sein sollen (Fig. 222.) — um so die gleichzeitige Bestimmbarkeit der reciproken räumlichen Systeme zu erlangen.

Seien (Fig. 224.) die Schnittpunkte der Strahlen von $A_1$,

Fig. 224.




$A_2$, $A_3$, $A_4$ nach $P$ respective $E$ mit den bezüglichen Gegenflächen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ durch $P_1$, $P_2$, $P_3$, $P_4$; $E_1$, $E_2$, $E_3$, $E_4$ bezeichnet; ebenso die Schnittpunkte der Ebenen durch die Kanten $A_1A_2$, $A_1A_3$, $A_1A_4$, $A_2A_3$, $A_2A_4$, $A_3A_4$ nach $P$ und $E$ respective mit den Gegenkanten $A_3A_4$, $A_2A_4$, $\cdots$ durch $P_{34}$,

$P_{21}$, $P_{23}$, $P_{14}$, $P_{13}$, $P_{12}$; $E_{31}$, $E_{21}$, $\cdots$ und endlich die Schnittpunkte der Ebenen $\Pi$ und $\mathbf{E}$ mit den Kanten des Tetraeders in derselben Ordnung durch $\Pi_{34}$, $\Pi_{24}$, $\cdots$; $\mathbf{E}_{34}$, $\mathbf{E}_{24}$, $\cdots$ oder ihre Schnittlinien mit den Flächen des Tetraeders durch $\Pi_1$, $\Pi_2$, $\Pi_3$, $\Pi_4$; etc., so dass die $\Pi_i$ die harmonischen Geraden der Punkte $P_i$ in Bezug auf $A_j A_k A_l$ sind, so hat man als Ausdruck der gemachten Voraussetzungen zur Definition der Coordinaten von $P$

$$\frac{x_1}{x_4} = (A_2 A_3 \cdot A_1 A_4 EP) = (A_1 A_4 E_{14} P_{14});\ \frac{x_2}{x_4} = (A_2 A_4 E_{24} P_{24}),$$
$$\frac{x_3}{x_4} = (A_3 A_4 E_{34} P_{34});$$

sodann ebenso zur Definition der Coordinaten von $\Pi$

$$\frac{\xi_1}{\xi_4} = (\mathbf{A}_2 \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_4 \mathbf{E} \Pi) = (A_4 A_1 \mathbf{E}_{14} \Pi_{14}),\ \frac{\xi_2}{\xi_4} = (A_4 A_2 \mathbf{E}_{24} \Pi_{24}),$$
$$\frac{\xi_3}{\xi_4} = (A_4 A_3 \mathbf{E}_{34} \Pi_{34});$$

endlich als Ausdruck der harmonischen Trennung von $E$ und $\Pi$ durch das Tetraeder

$$-1 = (A_1 A_4 \mathbf{E}_{14} E_{14}) = (A_2 A_4 \mathbf{E}_{24} E_{24}) = (A_3 A_4 \mathbf{E}_{34} E_{34}).$$

Durch Multiplication der entsprechenden Gleichungen der beiden letzten Gruppen folgt daraus

$$-\frac{\xi_1}{\xi_4} = (A_4 A_1 E_{14} \Pi_{14}),\ -\frac{\xi_2}{\xi_4} = (A_4 A_2 E_{24} \Pi_{24}),$$
$$-\frac{\xi_3}{\xi_4} = (A_4 A_3 E_{34} \Pi_{34})$$

und durch Multiplication dieser Gleichungen mit den entsprechenden der Gruppe der Definitionen der $x_i : x_k$

$$-\frac{\xi_1 x_1}{\xi_4 x_4} = (A_1 A_4 \Pi_{14} P_{14}),\ -\frac{\xi_2 x_2}{\xi_4 x_4} = (A_2 A_4 \Pi_{24} P_{24}),$$
$$-\frac{\xi_3 x_3}{\xi_4 x_4} = (A_3 A_4 \Pi_{34} P_{34});$$

d. h. diese Producte der Verhältnisse der $\xi$ und $x$ sind die negativen Doppelverhältnisse der $A$, $\Pi$ und $P$ auf drei Tetraederkanten, die von der dem gemeinsamen Nenner entsprechenden Ecke ausgehen.

Liegt dann insbesondere der Punkt $P$ in der Ebene $\Pi$,

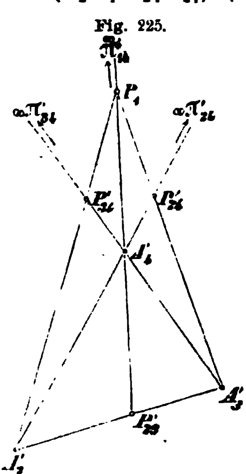
so ist jede der besagten drei Reihen von $P$ aus auf die Ebene der beiden andern projicierbar, z. B. die erste Reihe $A_1 A_4 \Pi_{14} P_{14}$ in der Fig. 224. auf die Ebene $A_2 A_3 A_4$ der beiden letzten in $P_1 A_4 \Pi_{14}{}^* P_{23}$, wenn $\Pi_{14}{}^*$ den Schnitt von $A_4 P_1$ mit $\Pi_1$ oder $\Pi_{24} \Pi_{34} \Pi_{23}$ bezeichnet.

Für drei gerade Punktreihen in einer Ebene wie

$$A_2 A_4 \Pi_{24} P_{24}, \quad A_3 A_4 \Pi_{34} P_{34}, \quad P_1 A_4 \Pi_{14}{}^* P_{23},$$

— welche nach Punkten $A_2$, $A_3$, $P_1$ von einem entsprechend gemeinsamen Punkte $A_4$ ausgehen, und in denen drei weitere entsprechende Punkte $\Pi_{24}$, $\Pi_{34}$, $\Pi_{13}{}^*$ auf einer Geraden $\Pi_1$ liegen, während die drei letzten die Schnittpunkte der Geraden von $P_1$ nach den Punkten $A_3$, $A_2$, $A_4$ mit den Gegenseiten des Dreiecks derselben sind, — gilt aber das Gesetz, dass die Summe ihrer Doppelverhältnisse die Einheit ist; oder

$$(A_2 A_4 \Pi_{24} P_{24}) + (A_3 A_4 \Pi_{34} P_{34}) + (P_1 A_4 \Pi_{14}{}^* P_{23}) = 1.$$


Fig. 225.

Um diese Relation zu beweisen, denken wir die Figur der drei Reihen central auf eine Ebene projiciert (Fig. 225.), welche zur projicierenden Ebene der Geraden $\Pi_1$ oder $\Pi_{24} \Pi_{14}{}^* \Pi_{34}$ parallel ist, so dass das Bild $\Pi_1'$ dieser Geraden unendlich fern ist; wenn wir dann die Bilder der Punkte durch dieselben Zeichen mit Beifügung eines Striches bezeichnen, so wird die vorige Summe, die linke Seite der zu beweisenden Gleichung,

$$(A_2' A_4' \infty P_{24}') + (A_3' A_4' \infty P_{34}') \\ + (P_1' A_4' \infty P_{23}')$$

oder $\quad (A_4', A_2', A_3' P_1') + (A_4', A_3', P_1' A_2') + (A_4', P_1', A_2' A_3')$,

wenn die letzten Symbole die Verhältnisse bezeichnen, nach welchen die Geraden $A_3' P_1'$, $P_1' A_2'$, $A_2' A_3'$ die zwischen den Punkten $A_4'$, $A_2'$; $A_4'$, $A_3'$; $A_4'$, $P_1'$ respective gelegenen Strecken theilen. Diese Verhältnisse können aber als die Verhältnisse der Flächen von Dreiecken über der theilenden Geraden und aus den Enden der zu theilenden Strecke angesehen werden und zwar unter steter Berücksichtigung des Sinnes wie folgt:

$$\frac{\Delta A_4' A_3' P_1'}{\Delta A_2' A_3' P_1'} + \frac{\Delta A_4' P_1' A_2'}{\Delta A_3' P_1' A_2'} + \frac{\Delta A_4' A_2' A_3'}{\Delta P_1' A_2' A_3'}$$

oder

$$\frac{\Delta A_4' A_3' P_1' + \Delta A_4' P_1' A_2' + \Delta A_4' A_2' A_3'}{\Delta A_2' A_3' P_1'},$$

d. h.

$$\frac{\Delta A_2' A_3' P_1'}{\Delta A_2' A_3' P_1'} = 1.$$

Sobald also die Ebene $\Pi$ den Punkt $P$ enthält, und nur wenn diess der Fall ist, besteht zwischen den Coordinaten $\xi_i$ von $\Pi$ und den Coordinaten $x_i$ von $P$ nach den für ihre Bestimmung gemachten Voraussetzungen die Relation

$$-\frac{\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3}{\xi_4 x_4} = 1,$$

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0.$$

1) Für jede durch den Punkt $E$ gehende Ebene ist

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0.$$

2) Für jeden in der Ebene **E** liegenden Punkt ist

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.$$

3) Für eine Ebene durch $A_1$, und eine solche durch $A_1 A_2$ ist respective

$$\xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0, \quad \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0;$$

also insbesondere für die Ebene $A_1 A_2 E$

$$x_3 - x_4 = 0, \text{ etc.}$$

4) Sind die $\xi_i$ constante Grössen $a_i$, so gilt für die Coordinaten $x_i$ aller Punkte der durch sie bestimmten Ebene die Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0;$$

wir nennen sie die Gleichung der Ebene $(a_1, a_2, a_3, a_4)$ und die projectivischen Coordinaten dieser Ebene sind ihre Coefficienten.

5) Sind die $x_i$ constante Grössen $\alpha_i$, so gilt für die Coordinaten $\xi_i$ aller Ebenen, welche den durch sie bestimmten Punkt enthalten, die Relation

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3 + \alpha_4 \xi_4 = 0,$$

die man als die Gleichung des Punktes $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$

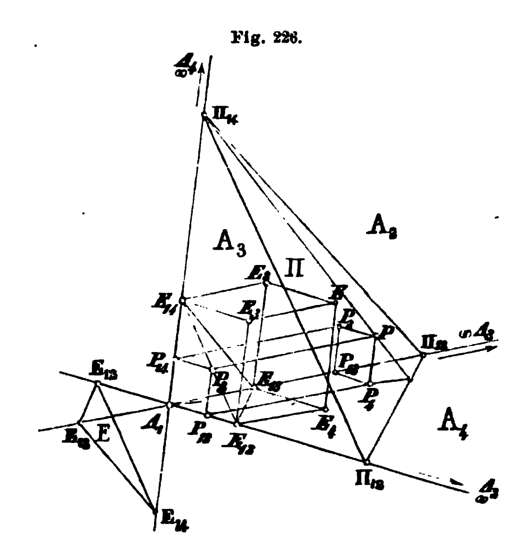
in tetrametrischen Ebenen-Coordinaten zu bezeichnen hat; seine Coordinaten sind ihre Coefficienten.

140. Wenn wir voraussetzen, dass die Ebene $A_2 A_3 A_4$ oder $\mathbf{A}_1$ die unendlich ferne Ebene des Raumes sei, so bilden die Punkte $P_2, P_3, P_4$ und $E_2, E_3, E_4$ die Parallelprojectionen von $P$ und $E$ nach den Richtungen der drei von $A_1$ ausgehenden Kanten $A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4$ auf die Fläche der jedesmaligen beiden andern $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4$ (Fig. 226.) und man hat in $A_1 E_{12} E_4 E_{13} E_{14} E_3 E E_2$ das projicierende Parallelepiped von $E$ und entsprechend das von $P$. (Vergl. § 46.) Man hat wegen

$$(A_1 \infty \mathbf{E}_{1i} E_{1i}) = -1$$

$$A_1 \mathbf{E}_{12} = -A_1 E_{12},\ A_1 \mathbf{E}_{13} = -A_1 E_{13},\ A_1 \mathbf{E}_{14} = -A_1 E_{14}.$$

Fig. 226.



Man erhält somit

$$x_1 = p_1 : e_1 = 1,\ \frac{x_2}{x_1} = \frac{A_1 P_{12}}{A_1 E_{12}} = x_2,$$

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{A_1 P_{13}}{A_1 E_{13}} = x_3,\ \frac{x_4}{x_1} = \frac{A_1 P_{14}}{A_1 E_{14}} = x_4,$$

und

$$\frac{\xi_2}{\xi_1} = -\frac{1}{\frac{A_1 \Pi_{12}}{A_1 E_{12}}},\ \frac{\xi_3}{\xi_1} = -\frac{1}{\frac{A_1 \Pi_{13}}{A_1 E_{13}}},\ \frac{\xi_4}{\xi_1} = -\frac{1}{\frac{A_1 \Pi_{14}}{A_1 E_{14}}};$$

oder wenn man ferner $A_1E_{12} = A_1E_{13} = A_1E_{14}$ setzt und als die Einheit des Längenmaasses wählt, die gewöhnlichen Cartesischen Punktcoordinaten einerseits und die Plücker-schen Ebenen-Coordinaten anderseits. Man bezeichne für die ersteren

$$x_2 = A_1P_{12} = x, \; x_3 = A_1P_{13} = y, \; x_4 = A_1P_{14} = z$$

und erhält die Gleichung der Ebene in der Form

$$a_1 + a_2x + a_3y + a_4z = 0 \text{ oder } Ax + By + Cz + D = 0.$$

Bezeichnet man dann für die Letztern

$$-\frac{1}{A_1\Pi_{12}} = \xi, \; -\frac{1}{A_1\Pi_{13}} = \eta, \; -\frac{1}{A_1\Pi_{14}} = \zeta,$$

so erhält man die Gleichung des Punktes in der Form

$$1 + \alpha_2\xi + \alpha_3\eta + \alpha_4\zeta = 0 \text{ oder } x\xi + y\eta + z\zeta + 1 = 0.$$

In der Gleichung des Punktes sind die Coefficienten seine Cartesischen Coordinaten, in der Gleichung der Ebene die Verhältnisse der Coefficienten zum absoluten Glied $A : D$, $B : D$, $C : D$ ihre Plücker'schen Coordinaten.

Man sieht, dass der Uebergang von den allgemeinen projectivischen Raum-Coordinaten zu den elementaren Coordinatensystemen von Cartesius und Plücker einer Reliefbildung entspricht, bei welcher die eine Fläche des Fundamentaltetraeders zur Gegenebene gewählt wird. (Vergl. § 37.) So liesse sich auch umgekehrt von den elementaren Systemen zu den allgemeinen gelangen, wenn man nur die Einsicht voraussetzt, dass die Wahl der Längeneinheit und die Festsetzung des positiven Sinnes in den Axen bei Cartesischen und Plücker-schen Coordinaten die Festsetzung des Einheitpunktes und der Einheitebene bedeutet.

1) Eine durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Ebene hat eine Gleichung von der Form

$$Ax + By + Cz = 0.$$

2) Ein Punkt der unendlich fernen Ebene hat die Gleichung

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 0;$$

die unendlich fernen Punkte der Coordinatenaxen $A_1A_2$, $A_1A_3$, $A_1A_4$ sind bezeichnet durch

$\xi = 0, \ \eta = 0, \ \zeta = 0$ respective; etc.

3) Eine Ebene durch die Axe $A_1 A_4$ und die in Bezug auf die Coordinatenebenen zu ihr harmonisch conjugierte Ebene sind dargestellt durch

$$Ax \pm By = 0.$$

141. Geht die Ebene (liegt der Punkt)

$$\text{a)} \quad \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

durch drei feste Punkte $y, z, w$ (in drei festen Ebenen $\eta, \zeta, \omega$), so müssen die Coefficienten der allgemeinen Gleichung den Bedingungen genügen

$$\text{a)} \quad \begin{aligned} \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 + \xi_4 y_4 &= 0, \\ \xi_1 z_1 + \xi_2 z_2 + \xi_3 z_3 + \xi_4 z_4 &= 0, \\ \xi_1 w_1 + \xi_2 w_2 + \xi_3 w_3 + \xi_4 w_4 &= 0 \end{aligned}$$

respective

$$\text{a*)} \quad \begin{aligned} \eta_1 x_1 + \eta_2 x_2 + \eta_3 x_3 + \eta_4 x_4 &= 0, \\ \zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + \zeta_3 x_3 + \zeta_4 x_4 &= 0, \\ \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_3 x_3 + \omega_4 x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Man erhält aus denselben durch Elimination der $\xi$, respective der $x$ die Coefficientenbestimmung der Gleichungen der Verbindungsebene der drei Punkte $y, z, w$, respective des Schnittpunktes der drei Ebenen $\eta, \zeta, \omega$. Zu dieser Elimination — die wir nur für das erste System der Gleichungen durchführen wollen, kommt man durch folgende Rechnung:

Zwischen den drei ersten Gleichungen des Systems

$$\text{b)} \quad \begin{aligned} \xi_1 x_1 + \xi_2 y_1 + \xi_3 z_1 + \xi_4 w_1 &= 0, \\ \xi_1 x_2 + \xi_2 y_2 + \xi_3 z_2 + \xi_4 w_2 &= 0, \\ \xi_1 x_3 + \xi_2 y_3 + \xi_3 z_3 + \xi_4 w_3 &= 0, \\ \xi_1 x_4 + \xi_2 y_4 + \xi_3 z_4 + \xi_4 w_4 &= 0 \end{aligned}$$

eliminiert man nach einander a) $\xi_2, \xi_3$; dann b) $\xi_3, \xi_1$ und schliesslich c) $\xi_1, \xi_2$, indem man sie nach den in § 136. bewiesenen Relationen mit den respectiven Factoren

$$\text{a)} \quad \begin{vmatrix} y_2, & z_2 \\ y_3, & z_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_3, & z_3 \\ y_1, & z_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} y_1, & z_1 \\ y_2, & z_2 \end{vmatrix};$$

$$\text{b)} \quad \begin{vmatrix} z_2, & x_2 \\ z_3, & x_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_3, & x_3 \\ z_1, & x_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} z_1, & x_1 \\ z_2, & x_2 \end{vmatrix};$$

$$\text{c)} \quad \begin{vmatrix} x_2, & y_2 \\ x_3, & y_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_3, & y_3 \\ x_1, & y_1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} x_1, & y_1 \\ x_2, & y_2 \end{vmatrix}$$

multipliciert und die Producte addiert. Man erhält die Gleichungen

$$\xi_1 \begin{vmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{vmatrix} + \xi_4 \begin{vmatrix} w_1, w_2, w_3 \\ y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\xi_2 \begin{vmatrix} y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{vmatrix} + \xi_4 \begin{vmatrix} w_1, w_2, w_3 \\ z_1, z_2, z_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\xi_3 \begin{vmatrix} z_1, z_2, z_3 \\ x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \end{vmatrix} + \xi_4 \begin{vmatrix} w_1, w_2, w_3 \\ x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder
$$\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 : \xi_4 = - \begin{vmatrix} y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \\ w_1, w_2, w_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1, z_2, z_3 \\ w_1, w_2, w_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{vmatrix}$$
$$: - \begin{vmatrix} w_1, w_2, w_3 \\ x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{vmatrix}.$$

Wir bemerken, dass in diesen Formeln die Auflösung von drei linearen Gleichungen mit drei Unbekannten, $\xi_1 : \xi_4$, $\xi_2 : \xi_4$, $\xi_3 : \xi_4$ enthalten ist. (Vergl. unten 5.)

Die Substitution dieser Verhältnisse der $\xi$ in die drei ersten Gleichungen der obigen Gruppe b) giebt die Identitäten

$$x_1 \begin{vmatrix} y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \\ w_1, w_2, w_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} z_1, z_2, z_3 \\ w_1, w_2, w_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} w_1, w_2, w_3 \\ x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \end{vmatrix} - w_1 \begin{vmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x_2 \begin{vmatrix} y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \\ w_1, w_2, w_3 \end{vmatrix} - y_2 \begin{vmatrix} z_1, z_2, z_3 \\ w_1, w_2, w_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{vmatrix} + z_2 \begin{vmatrix} w_1, w_2, w_3 \\ x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x_3 \begin{vmatrix} y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \\ w_1, w_2, w_3 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} z_1, z_2, z_3 \\ w_1, w_2, w_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} w_1, w_2, w_3 \\ x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \end{vmatrix} - w_2 \begin{vmatrix} x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Auf Grund derselben ist ersichtlich, dass man die vier Bedingungsgleichungen a) der Reihe nach mit den Factoren

$$\begin{vmatrix} y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \\ w_1, w_2, w_3 \end{vmatrix}, \; - \begin{vmatrix} z_1, z_2, z_3 \\ w_1, w_2, w_3 \\ x_1, x_2, x_3 \end{vmatrix}, \; \begin{vmatrix} w_1, w_2, w_3 \\ x_1, x_2, x_3 \\ y_1, y_2, y_3 \end{vmatrix}, \; - \begin{vmatrix} x_1, x_2, x_2 \\ y_1, y_2, y_3 \\ z_1, z_2, z_3 \end{vmatrix}$$

multiplicieren und die Producte addieren muss, um gleichzeitig die Factoren von $\xi_1$, $\xi_2$, $\xi_3$ in der Summe verschwinden zu machen, so dass dieselbe durch $\xi_4$ theilbar wird und das Eliminationsresultat liefert

$$x_4 \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \end{vmatrix} - y_4 \begin{vmatrix} z_1, & z_2, & z_3 \\ w_1, & w_2, & w_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \end{vmatrix} + z_4 \begin{vmatrix} w_1, & w_2, & w_3 \\ x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \end{vmatrix} - w_4 \begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ y_1, & y_2, & y_3 \\ z_1, & z_2, & z_3 \end{vmatrix} = 0;$$

es ist eine der Entwickelungsformen der folgenden Determinante und wird mit Vortheil in ihrer Form geschrieben — also die Gleichung der durch drei Punkte $y$, $z$, $w$ bestimmten Ebene

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \\ w_1, & w_2, & w_3, & w_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Sie ist auch die Bedingung, unter welcher vier Punkte $x$, $y$, $z$, $w$ in einer Ebene liegen.

Ebenso die Gleichung des gemeinschaftlichen Punktes der drei Ebenen $\eta$, $\zeta$, $\omega$ und zugleich die Bedingung, unter welcher vier Ebenen $\xi$, $\eta$, $\zeta$, $\omega$ durch einen Punkt gehen,

$$\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4 \\ \eta_1, & \eta_2, & \eta_3, & \eta_4 \\ \zeta_1, & \zeta_2, & \zeta_3, & \zeta_4 \\ \omega_1, & \omega_2, & \omega_3, & \omega_4 \end{vmatrix} = 0.$$

1) Da die Beziehung der Gruppen von Gleichungen a) und b) eine gegenseitige ist, so erhält man dasselbe Eliminationsresultat auch aus dem System von Gleichung

b) $\quad l x_i + m y_i + n z_i + p w_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$

oder respective aus

b*) $\quad \lambda \xi_i + \mu \eta_i + \nu \zeta_i + \pi \omega_i = 0$

in den Formen

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1, & w_1 \\ x_2, & y_2, & z_2, & w_2 \\ x_3, & y_3, & z_3, & w_3 \\ x_4, & y_4, & z_4, & w_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1, & \omega_1 \\ \xi_2, & \eta_2, & \zeta_2, & \omega_2 \\ \xi_3, & \eta_3, & \zeta_3, & \omega_3 \\ \xi_4, & \eta_4, & \zeta_4, & \omega_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gleichungen b), b*) liefern aber für die Coordinaten $x$ eines Punktes der Ebene $y, z, w$ die Werthe

$$x_i = -\frac{m y_i + n z_i + p w_i}{l}$$

und für die Coordinaten $\xi$ einer Ebene durch den Punkt $\eta, \zeta, \omega$ die andern

$$\xi_i = -\frac{\mu \eta_i + \nu \zeta_i + \pi \omega_i}{\lambda}.$$

Bei der Substitution in Gleichungen, welche in den $x_i$, respective $\xi_i$, homogen sind, fallen die Nenner $-l$, $-\lambda$ weg.

2) Die Ebene durch die Punkte $y$, $z$ und den Fundamentalpunkt $A_1$ ist, wenn wir mit $x$ die laufenden Coordinaten bezeichnen, ausgedrückt durch

$$\begin{vmatrix} x_1, & x_2, & x_3, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, & z_2, & z_3, & z_4 \\ h_1, & 0, & 0, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$x_2(y_3 z_4 - y_4 z_3) + x_3(y_4 z_2 - y_2 z_4) + x_4(y_2 z_3 - y_3 z_2) = 0;$$

die Ebene durch $y$, $z$ und $A_2$ analog

$$x_1(y_3 z_4 - y_4 z_3) + x_3(y_4 z_1 - y_1 z_4) + x_4(y_1 z_3 - y_3 z_1) = 0, \text{ etc.}$$

3) Der Durchschnittspunkt der Ebenen $\eta$, $\zeta$ mit der Fundamentalebene $\mathbf{A}_3$ ist für $\xi$ als die laufenden Coordinaten

$$\xi_1(\eta_2 \zeta_4 - \eta_4 \zeta_2) + \xi_2(\eta_4 \zeta_1 - \eta_1 \zeta_4) + \xi_4(\eta_1 \zeta_2 - \eta_2 \zeta_1) = 0.$$

4) Eine Ebene durch den Punkt $y$ und die Fundamentalpunkte $A_1$, $A_2$ ist dargestellt durch

$$x_3 y_4 - x_4 y_3 = 0.$$

5) Die Ebenen

$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 &= 0, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - 9x_4 &= 0, \\ -5x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

gehen durch den Punkt, für dessen Coordinaten man erhält

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} -6 & -3 & 10 \\ -1 & -1 & -9 \\ 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 5 & -1 & -9 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{252}{-88} = (A_3A_4 \cdot A_2A_1\,EP),$$

$$\frac{x_3}{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -6 & 10 \\ 5 & -1 & -9 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 5 & -1 & -9 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{304}{-88} = (A_2A_4 \cdot A_3A_1\,EP),$$

$$\frac{x_4}{x_1} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & -6 \\ 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 10 \\ 5 & -1 & -9 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{96}{-88} = (A_2A_3 \cdot A_4A_1\,EP).$$

Dieser Punkt kann sonach construiert werden in jeder Darstellung, in der das Fundamentaltetraeder und die Einheitelemente verzeichnet sind. Die Festsetzung von Axen und Maassstäben, wenn man dieselbe als eine axonometrische auffasst (vergl. §§ 60., 61.) oder die Festsetzung hinreichender Flucht- und Durchstoss-Elemente und des Distanzkreises (vergl. § 11.), wenn sie als Centralprojection gedacht wird, liefert die Bestimmungen der Lage des Punktes nach absolutem Maass.

6) Der gemeinsame Punkt der Ebenen

$$2x - 3y + 10z = -6,\; 5x - y - 9z = -1,$$
$$-x - y + z = 5$$

hat die Cartesischen Coordinaten

$$x = -\frac{63}{22},\quad y = -\frac{76}{22},\quad z = -\frac{24}{22}.$$

142. Eine gerade Linie im Raume ist die Verbindungslinie von zwei Punkten $y$, $z$ oder die Schnitt-

linie von zwei Ebenen $\eta$, $\zeta$; ist die gerade Linie $yz$ mit der $\eta\zeta$ identisch, so gelten gleichzeitig die vier Gleichungee

$$\text{a)}\quad \begin{aligned} \eta_1 y_1 + \eta_2 y_2 + \eta_3 y_3 + \eta_4 y_4 &= 0, \\ \eta_1 z_1 + \eta_2 z_2 + \eta_3 z_3 + \eta_4 z_4 &= 0, \\ \zeta_1 y_1 + \zeta_2 y_2 + \zeta_3 y_3 + \zeta_4 y_4 &= 0, \\ \zeta_1 z_1 + \zeta_2 z_2 + \zeta_3 z_3 + \zeta_4 z_4 &= 0. \end{aligned}$$

Die successive Elimination von $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ zwischen den beiden ersten Gleichungen dieser Gruppe — durch Multiplication mit den respectiven Factoren $-z_1, y_1$; $-z_2, y_2$; $-z_3, y_3$; $-z_4, y_4$ und Addition — giebt das System

$$\text{b)}\quad \begin{aligned} (y_1z_2-y_2z_1)\eta_2-(y_3z_1-y_1z_3)\eta_3+(y_1z_4-y_4z_1)\eta_4&=0, \\ -(y_1z_2-y_2z_1)\eta_1 \qquad +(y_2z_3-y_3z_2)\eta_3+(y_2z_4-y_4z_2)\eta_4&=0, \\ (y_3z_1-y_1z_3)\eta_1-(y_2z_3-y_3z_2)\eta_2 \qquad +(y_3z_4-y_4z_3)\eta_4&=0, \\ -(y_1z_4-y_4z_1)\eta_1-(y_2z_4-y_4z_2)\eta_2-(y_3z_4-y_4z_3)\eta_3 \qquad &=0. \end{aligned}$$

Dasselbe System, nur mit Ersetzung der $\eta$ durch die $\zeta$ giebt die successive Elimination von $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ zwischen den beiden letzten Gleichungen der obigen Gruppe. Mit Hilfe der Abkürzung

$$p_{ik} \equiv y_i z_k - y_k z_i$$

schreiben wir beide Systeme in der Form

$$\text{b)}\quad \begin{aligned} p_{12}\eta_2-p_{31}\eta_3+p_{14}\eta_4&=0, \\ -p_{12}\eta_1 \qquad +p_{23}\eta_3+p_{24}\eta_4&=0, \\ p_{31}\eta_1-p_{23}\eta_2 \qquad +p_{34}\eta_4&=0, \\ -p_{14}\eta_1-p_{24}\eta_2-p_{34}\eta_3 \qquad &=0; \end{aligned} \qquad \text{b*)}\quad \begin{aligned} p_{12}\zeta_2-p_{31}\zeta_3+p_{14}\zeta_4&=0, \\ -p_{12}\zeta_1 \qquad +p_{23}\zeta_3+p_{24}\zeta_4&=0, \\ p_{31}\zeta_1-p_{23}\zeta_2 \qquad +p_{34}\zeta_4&=0, \\ -p_{14}\zeta_1-p_{24}\zeta_2-p_{34}\zeta_3 \qquad &=0. \end{aligned}$$

Die successive Elimination von $y_1, y_2, y_3, y_4$ zwischen der ersten und dritten Gleichung der Gruppe a) giebt

$$\begin{aligned} (\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)y_2-(\eta_3\zeta_1-\eta_1\zeta_3)y_3+(\eta_1\zeta_4-\eta_4\zeta_1)y_4&=0, \\ -(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)y_1 \qquad +(\eta_2\zeta_3-\eta_3\zeta_2)y_3+(\eta_2\zeta_4-\eta_4\zeta_2)y_4&=0, \\ (\eta_3\zeta_1-\eta_1\zeta_3)y_1-(\eta_2\zeta_3-\eta_3\zeta_2)y_2 \qquad +(\eta_3\zeta_4-\eta_4\zeta_3)y_4&=0, \\ -(\eta_1\zeta_4-\eta_4\zeta_1)y_1-(\eta_2\zeta_4-\eta_4\zeta_2)y_2-(\eta_3\zeta_4-\eta_4\zeta_3)y_3 \qquad &=0. \end{aligned}$$

und die Elimination von $z_1, z_2, z_3, z_4$ zwischen der zweiten und vierten Gleichung derselben Gruppe das nämliche System mit Ersetzung der $y$ durch die $z$; oder mit der Abkürzung

$$\pi_{ik} = \eta_i\zeta_k - \eta_k\zeta_i$$

$$\text{c)}\quad \begin{aligned} \pi_{12}y_2-\pi_{31}y_3+\pi_{14}y_4&=0, \\ -\pi_{12}y_1 \qquad +\pi_{23}y_3+\pi_{24}y_4&=0, \\ \pi_{31}y_1-\pi_{23}y_2 \qquad +\pi_{34}y_4&=0, \\ -\pi_{14}y_1-\pi_{24}y_2-\pi_{34}y_3 \qquad &=0; \end{aligned} \qquad \text{c*)}\quad \begin{aligned} \pi_{12}z_2-\pi_{31}z_3+\pi_{14}z_4&=0, \\ -\pi_{12}z_1 \qquad +\pi_{23}z_3+\pi_{24}z_4&=0, \\ \pi_{31}z_1-\pi_{23}z_2 \qquad +\pi_{34}z_4&=0, \\ -\pi_{14}z_1-\pi_{24}z_2-\pi_{34}z_3 \qquad &=0. \end{aligned}$$

Die Combination der Gleichungen der Gruppen b), b*) erlaubt auf demselben Wege nach einander die $p_{ik}$ und die der Gleichungen der Gruppen c), c*) die $\pi_{ik}$ zu eliminieren und jede dieser Eliminationen liefert eine der Proportionalitäten, die wir in Folgendem zur Kette zusammen fassen

d) $p_{12} : p_{23} : p_{31} : p_{14} : p_{24} : p_{34} = \pi_{34} : \pi_{14} : \pi_{24} : \pi_{23} : \pi_{31} : \pi_{12};$

z. B. die Elimination von $p_{12}$ zwischen den beiden ersten Gleichungen der Gruppen b), b*)

$$-p_{31}\pi_{23} + p_{14}\pi_{24} = 0 \text{ oder } p_{31} : p_{14} = \pi_{24} : \pi_{23}.$$

Diese Proportionalität der $p_{ik}$ und $\pi_{lm}$ wird auch nicht gestört, wenn die zur Bestimmung der Geraden benutzten Punkte in ihrer Reihe verlegt oder wenn die zur Bestimmung benutzten Ebenen in ihrem Büschel gedreht werden; denn eine solche Veränderung wird nach § 136.; 4. ausgedrückt durch die Substitution von

$$m_1 y_i + n_1 z_i,\ m_2 y_i + n_2 z_i \text{ respective für } y_i \text{ und } z_i$$

und im Falle der Ebenencoordinaten von

$$\mu_1 \eta_i + \nu_1 \zeta_i,\ \mu_2 \eta_i + \nu_2 \zeta_i \text{ respective für } \eta_i \text{ und } \zeta_i;$$

und man erhält somit

$$\begin{aligned} p_{ik} &= (m_1 y_i + n_1 z_i)(m_2 y_k + n_2 z_k) - (m_1 y_k + n_1 z_k)(m_2 y_i + n_2 z_i) \\ &= (m_1 n_2 - m_2 n_1)(y_i z_k - y_k z_i); \end{aligned}$$

was in Form von Determinanten die Relation giebt

$$\begin{vmatrix} m_1 y_i + n_1 z_i, & m_1 y_k + n_1 z_k \\ m_2 y_i + n_2 z_i, & m_2 y_k + n_2 z_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m_1, & m_2 \\ n_1, & n_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_i, & y_k \\ z_i, & z_k \end{vmatrix}.$$

Ebenso wird

e) $$\pi_{ik} = (\mu_1 \nu_2 - \mu_2 \nu_1)(\eta_i \zeta_k - \eta_k \zeta_i),$$

d. h. die $p_{ik}$ und die $\pi_{ik}$ ändern sich bei einer derartigen völlig beliebigen Aenderung der Bestimmungspunkte und Ebenen nur durch Hinzutreten eines constanten, der entsprechenden Substitutionsdeterminante gleichen Factors, oder ihre Verhältnisse ändern sich nicht.

Endlich aber sind die sechs Grössen $p_{ik}$ respective $\pi_{ik}$ nur vier unabhängigen gleich zu achten,

da zwischen ihnen eine Relation besteht und eine von ihnen zur Einheit gewählt werden kann. Diese Relation ergiebt sich unmittelbar nach § 141. durch Elimination der $\eta$ oder $\zeta$ zwischen den Gleichungen b) respective b*) für die $p_{ik}$ und durch Elimination der $y$ oder $z$ zwischen den Gleichungen c) respective c*) für die $\pi_{ik}$. Also

$$\begin{vmatrix} 0, & p_{12}, & -p_{31}, & p_{14} \\ -p_{12}, & 0, & p_{23}, & p_{24} \\ p_{31}, & -p_{23}, & 0, & p_{34} \\ -p_{14}, & -p_{24}, & -p_{34}, & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ und } \begin{vmatrix} 0, & \pi_{12}, & -\pi_{31}, & \pi_{14} \\ -\pi_{12}, & 0, & \pi_{23}, & \pi_{24} \\ \pi_{31}, & -\pi_{23}, & 0, & \pi_{34} \\ -\pi_{14}, & -\pi_{24}, & -\pi_{34}, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Entwickelung der ersten Determinante liefert nach § 141.

$$-p_{12}\begin{vmatrix} p_{23}, & p_{24}, & -p_{12} \\ 0, & p_{34}, & p_{31} \\ -p_{34}, & 0, & -p_{14} \end{vmatrix} - p_{31}\begin{vmatrix} p_{24}, & -p_{12}, & 0 \\ p_{34}, & p_{31}, & -p_{23} \\ 0, & -p_{14}, & -p_{24} \end{vmatrix}$$

$$-p_{14}\begin{vmatrix} -p_{12}, & 0, & p_{23} \\ p_{31}, & -p_{23}, & 0 \\ -p_{14}, & -p_{24}, & -p_{34} \end{vmatrix} = 0$$

oder $\quad 2p_{12}p_{14}p_{23}p_{31} + 2p_{12}p_{24}p_{31}p_{34} + p_{12}^2p_{34}^2 + p_{31}^2p_{24}^2$

$$+ 2p_{14}p_{23}p_{31}p_{24} + p_{14}^2p_{23}^2 = 0,$$

d. h. $\quad (p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24})^2 = 0$

oder $\quad$ f) $\quad p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} \equiv 0.$

Ebenso für die $\pi_{ik}$

$$\text{f*)} \quad \pi_{12}\pi_{34} + \pi_{23}\pi_{14} + \pi_{31}\pi_{24} \equiv 0.$$

Endlich ist auch die geometrische Bedeutung der Grössen $p_{ik}$, $\pi_{ik}$ nach dem Früheren unzweifelhaft. Nach Aufg. 2. in § 141. [oder auch nach den Gleichungen b), b*) in Verbindung mit der Proportionalität d)] sind die $p_{ik}$ die Coefficienten in den Gleichungen der Ebenen, welche die Gerade $yz$ mit den Fundamentalpunkten $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, verbinden, insbesondere $p_{34}$, $p_{24}$, $p_{23}$ die Coefficienten in der Gleichung der Ebene nach $A_1$; wir dürfen sagen, die $p_{ik}$ seien die Coordinaten der Ebenen, welche die Gerade $yz$ aus den Fundamentalpunkten projicieren. Sie sind den Fundamentalpunkten $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ der Reihe nach entsprechend durch

$$\begin{aligned} p_{34}x_2 - p_{24}x_3 + p_{23}x_4 &= 0, \\ -p_{34}x_1 \qquad\quad + p_{14}x_3 + p_{31}x_4 &= 0, \\ p_{24}x_1 - p_{14}x_2 \qquad\quad + p_{12}x_4 &= 0, \\ -p_{23}x_1 - p_{31}x_2 - p_{12}x_3 \qquad\quad &= 0 \end{aligned}$$

dargestellt und von diesen Gleichungen sind jede zwei mit Hilfe der Relation f) ableitbar aus den beiden andern, nämlich z. B. die dritte und vierte respective durch Elimination von $x_3$ und $x_4$ zwischen den beiden ersten. Anderseits sind nach Aufg. 3. in § 141. die $\pi_{ik}$ ebenso die Coordinaten der Punkte, in welchen die betrachtete Gerade $\eta\zeta$ von den Fundamentalebenen $A_1, \cdots$ geschnitten wird, oder die Coordinaten ihrer Durchstosspunkte in den Fundamentalebenen. Die Bedingungen f), f*) sind also in der That auch die Bedingungen dafür, dass die vier projicierenden Ebenen durch dieselbe Gerade gehen, respective die vier Durchstosspunkte in derselben Geraden liegen. Nach alledem sind die Grössen $p_{ik}$ und ebenso die $\pi_{ik}$ wohlgeeignet als Coordinaten der geraden Linie im Raum zu dienen; denn ihre Verhältnisse bestimmen die Gerade mittelst ihrer projicierenden Ebenen aus den Fundamentalpunkten oder ihrer Durchstosspunkte in den Fundamentalebenen; diese Verhältnisse sind unabhängig von der Wahl der Bestimmungspunkte in der Geraden oder der Bestimmungsebenen durch die Gerade; und sie kommen auf vier unabhängige Grössen zurück, entsprechend der Bestimmbarkeit einer Geraden im Raum durch vier geometrische Bedingungen, z. B. vier Gerade, die sie schneiden soll.

1) Setzt man in Cartesischen Coordinaten $y_1 = z_1 = 1$; $y_2 = x_1,\ y_3 = y_1,\ y_4 = z_1;\ z_2 = x_2,\ z_3 = y_2,\ z_4 = z_2$ so erhält man für die Coordinaten der Geraden 12

$$p_{12} = x_2 - x_1,\ p_{23} = x_1y_2 - x_2y_1,\ p_{31} = y_1 - y_2,$$
$$p_{14} = z_2 - z_1,\ p_{24} = x_1z_2 - x_2z_1,\ p_{34} = y_1z_2 - y_2z_1$$

und die Relation f) wird

$$(x_2 - x_1)(y_1z_2 - y_2z_1) + (z_2 - z_1)(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)(x_1z_2 - x_2z_1) = 0.$$

2) Man drücke die Coordinaten einer geraden Linie im Raum durch Plücker'sche Ebenen-Coordinaten aus.

3) Welche Reductionen treten ein, wenn die betrachtete Gerade a) durch einen Fundamentalpunkt geht oder b) in einer Fundamentalebene liegt oder c) eine der Kanten des Fundamentaltetraeders schneidet.
4) Die geometrische Bedeutung der Relation f) respective f*) beweist zugleich, dass dieselbe die hinreichende Bedingung dafür ist, um sechs Variabeln als Coordinaten einer Geraden in dem entwickelten Sinne betrachten zu dürfen.
5) In jeder homogenen Gleichung zwischen den $p_{ik}$ können dieselben durch die entsprechenden $\pi_{ik}$ ersetzt werden und umgekehrt.
6) Die Bemerkung in Aufg. 5. des § 141. von dem Uebergang zu bestimmten Maassverhältnissen bleibt unverändert gültig.
7) Die Vorzüge der Coordinaten $p_{ik}$ vor den $y_i$, $z_i$ respective $\eta_i$, $\zeta_i$ für die geometrische Construction der Geraden $yz$ sind zu erläutern. Die Construction in Beispiel 11. Fig. 227. macht sie anschaulich.
8) Die Unveränderlichkeit der Verhältnisse der $p_{ik}$, $\pi_{ik}$ beim Uebergange von $y$, $z$ zu $my + nz$, etc. ist in ihrer geometrischen Bedeutung gegründet.
9) Man beweise die Proportionalität der $p_{ij}$ und $\pi_{kl}$ aus der constructiven Darstellung der vier Ebenen

$$\mathbf{S}_1(0, p_{34}, -p_{24}, p_{23}),\ \mathbf{S}_2(-p_{34}, 0, p_{14}, p_{31}),$$
$$\mathbf{S}_3(p_{24}, -p_{14}, 0, p_{12}),\ \mathbf{S}_4(-p_{23}, -p_{31}, -p_{12}, 0),$$

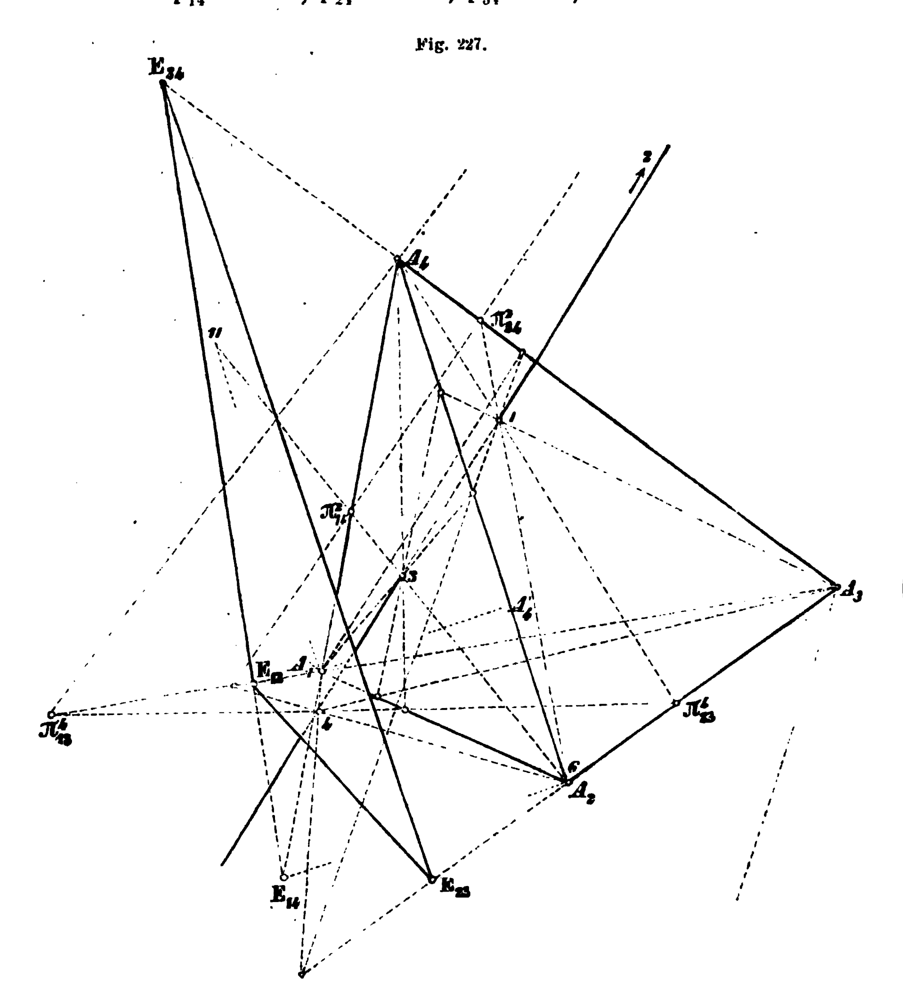
welche die Gerade $yz$ aus den Fundamentalpunkten $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ projicieren und der vier Punkte

$$S_1(0, \pi_{34}, -\pi_{24}, \pi_{23}),\ S_2(-\pi_{34}, 0, \pi_{14}, \pi_{31}),$$
$$S_3(\pi_{24}, -\pi_{14}, 0, \pi_{12}),\ S_4(-\pi_{23}, -\pi_{31}, -\pi_{12}, 0),$$

in welchen die Gerade $\eta\zeta$ die Fundamentalebenen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$ schneidet; zwei jener Ebenen genügen dazu.
10) Die identischen Relationen $p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = 0$, $\pi_{12}\pi_{34} + \cdots = 0$ drücken aus, dass die Durchstosspunkte $S_i$ in den gleichnamigen Spuren der $\mathbf{S}_i$ gelegen sind oder dass diese durch jene hindurch gehen.

11) Man construiere in dem Fundamentaltetraeder $A_1A_2A_3A_4$ mit der Einheitebene $\mathbf{E}_{23}\mathbf{E}_{34}\mathbf{E}_{13}$ (Fig. 227.) die Gerade von den Coordinaten $p_{12} = -3$, $p_{23} = -9$, $p_{31} = 6$, $p_{14} = -9$, $p_{24} = -8$, $p_{34} = 11$, für welche die Re-

Fig. 227.




lation f) erfüllt ist. Die Gleichungen ihrer projicierenden Ebenen aus $A_1, \cdots$ sind respective

$$11x_2 + 8x_3 - 9x_4 = 0, \quad -11x_1 - 9x_3 + 6x_4 = 0,$$
$$-8x_1 + 9x_2 - 3x_4 = 0, \quad 9x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0.$$

Für die projicierende Ebene aus $A_2$ ist also (§ 133.) $\xi_1 = -11$, $\xi_3 = -9$, $\xi_4 = 6$ und somit

$$-\frac{11}{6} = (A_4 A_1 \mathbf{E}_{14} \Pi_{14}), \quad -\frac{3}{2} = (A_4 A_3 \mathbf{E}_{34} \Pi_{34}).$$

Für die projicierende Ebene aus $A_4$ ist $\xi_1 = 9$, $\xi_2 = -6$, $\xi_3 = 3$, also $3 = (A_3 A_1 \mathbf{E}_{13} \Pi_{13})$, $-2 = (A_3 A_2 \mathbf{E}_{23} \Pi_{23})$.

Damit erhält man die Gerade mittelst ihrer Durchstosspunkte in den Fundamentalebenen. Sie wird also construiert wie in Fig. 227. die Gerade 1, 3, 4 (2 fällt ausserhalb des Blattes). Man zog z. B. $A_1 A_4'$ parallel $A_2 \mathbf{E}_{14}$ und trug auf die Parallele zu $A_2 A_4$ durch $A_1$ das $-\frac{11}{6}$ fache von $A_4' A_2$ auf, um in der von dem entsprechenden Punkte nach $A_2$ gehenden Geraden $\Pi_{14}{}^2$ zu finden; ebenso für $\Pi_{34}{}^2$, $\Pi_{13}{}^4$, $\Pi_{23}{}^4$.

143. Wir fragen nach der **geometrischen Bedeutung von homogenen Gleichungen $n^{ten}$ Grades zwischen den vier Variabeln $x_i$ respective $\xi_i$ und zwischen den sechs durch f), respective f*) bedingten Variabeln $p_{ik}$, respective $\pi_{ik}$.**

Eine homogene Gleichung $n^{ten}$ Grades zwischen den vier $x_i$ ist die Gleichung einer krummen Fläche $n^{ter}$ Ordnung; sie kann als Gleichung mit drei Unbekannten betrachtet werden und es entsprechen ihr also eine zweifach unendliche Menge von Werthcombinationen derselben d. h. geometrisch eine zweifach unendliche Menge von Punkten. Wir denken sie coexistierend mit der Gleichung einer Ebene d. i. der in den $x$ linearen Gleichung; substituieren wir aus dieser für die eine der $x$ ihren Werth in Function der drei andern, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in eine homogene Gleichung $n^{ten}$ Grades zwischen drei Variabeln $x$ d. h. der Ort der Punkte, die die Ebene und der geometrische Repräsentant der Gleichung mit vier Veränderlichen gemeinsam haben, ist eine Curve $n^{ter}$ Ordnung.

Eine homogene Gleichung $n^{ten}$ Grades zwischen den vier $\xi_i$ ist die Gleichung einer krummen Fläche $n^{ter}$ Classe; als Gleichung mit drei Unbekannten betrachtet, repräsentiert sie eine zweifach unendliche Menge von Ebenen; mit einer in

den $\xi$ linearen Gleichung verbunden bestimmt sie die Gesammtheit derjenigen Ebenen, die den dieser linearen Gleichung entsprechenden Punkt enthalten und zugleich dem geometrischen Repräsentanten jener Gleichung angehören; die aus beiden durch Combination hervorgehende Gleichung ist aber homogen in den drei übrig bleibenden $\xi$ und daher die Gleichung einer Kegelfläche $n^{ter}$ Classe, die Gleichung des Kegels der Tangentialebenen, die von dem gegebenen Punkt an die fragliche Fläche gehen. (§ 137.)

Für $n = 2$ zeigt sich, analytisch in ähnlicher Weise wie in unsern Entwickelungen geometrisch, dass die Flächen zweiter Ordnung zugleich die Flächen zweiter Classe sind, sodass man zu ihrer Bezeichnung den Ausdruck Flächen zweiten Grades geeignet sieht.

Durch die Coexistenz von zwei Gleichungen zwischen den vier Veränderlichen $x_i$ werden die gemeinschaftlichen Punkte von zwei Oberflächen, d. i. wird ihre Durchdringungscurve dargestellt. Dagegen repräsentieren zwei Gleichungen zwischen den Veränderlichen $\xi_i$ die Gesammtheit der gemeinsamen Tangentialebenen zweier Flächen d. h. ihre gemeinsam umschriebene Developpable. Jene hat das Product der Grade der beiden Gleichungen zur Ordnungszahl (§ 100., $m$), diese zur Classenzahl (§ 101., $n$), denn die Combination der beiden Gleichungen mit einer linearen Gleichung führt nach den Regeln der Algebra auf eine Gruppe von gemeinsamen Wurzelwerthen in dieser Anzahl.

Drei Gleichungen zwischen den $x$ repräsentieren die Gruppe der gemeinsamen Punkte von drei Flächen; drei Gleichungen zwischen den $\xi$, die Gruppe ihrer gemeinsamen Tangentialebenen; ihre Anzahl ist dem Product der Grade gleich.

Denken wir sodann eine homogene Gleichung $n^{ten}$ Grades in den sechs $p_{ik}$, respective $\pi_{ik}$, so erhellt zunächst, dass dieselbe eine dreifach unendliche Schaar von geraden Linien darstellt; man nennt dieselbe einen Linien-Complex; combinieren wir mit demselben einen Punkt im Raum, so erhalten wir nach den Werthen der $p_{ik}$ die Gesammtheit der Linien des Complexes, welche diesen Punkt enthalten, ausgedrückt durch eine homogene Gleichung zwischen drei Variabeln $x_i$,

d. h. die Linien im Complex $n^{\text{ten}}$ Grades, welche von einem Punkt ausgehen, bilden einen Kegel $n^{\text{ter}}$ Ordnung. Und combinieren wir mit dem Complex eine Ebene, so erhalten wir nach den Werthen der $\pi_{ik}$ die Gesammtheit der Linien des Complexes in ihr ausgedrückt durch eine homogene Gleichung zwischen drei Variabeln $\xi_i$, d. h. die Linien im Complex $n^{\text{ten}}$ Grades, die in einer Ebene liegen, sind die Tangenten einer Curve $n^{\text{ter}}$ Classe. Im Complex ersten Grades bilden also die Linien desselben aus einem Punkte sowohl als in einer Ebene ein Strahlenbüschel.

Die Verbindung von zwei Complexgleichungen liefert eine zweifach unendliche Schaar von Geraden, welche man ein Strahlensystem und neuerdings eine Congruenz genannt hat.

Drei homogene Gleichungen zwischen den Coordinaten der geraden Linie im Raum bestimmen eine einfach unendliche Schaar von Geraden, die im Allgemeinen eine windschiefe Regelfläche bilden. Der Grad derselben ist das doppelte Product der Gradzahlen der Complexe.

1) Die Tangentialebene der Fläche $n^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch die homogene Gleichung $n^{\text{ten}}$ Grades in den $x_i$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \text{ oder } F = 0$$

gegeben ist, im Punkte $x$ hat für $X_i$ als die laufenden Coordinaten die Gleichung

$$F_1 X_1 + F_2 X_2 + F_3 X_3 + F_4 X_4 = 0,$$

wenn $F_i$ der Differentialquotient von $F$ nach $x_i$ ist. (Vergl. § 137.; 5.)

2) Da die homogene Gleichung zwischen vier Variabeln zehn Glieder und also neun unbestimmte Coefficienten enthält, so ist eine Fläche zweiten Grades durch neun Punkte oder neun Tangentialebenen im Allgemeinen bestimmt. Wir schreiben ihre Gleichung in der Form

$$a_{11} x_1^2 + \cdots a_{44} x_4^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 + \cdots + 2 a_{34} x_3 x_4 = 0.$$

3) Die Tangentialebene der Fläche zweiten Grades 2) im Punkte $x'$ ist dargestellt durch

$$(a_{11} x_1' + a_{12} x_2' + a_{13} x_3' + a_{14} x_4') X_1 + \cdots = 0.$$

4) Die Ebene $\xi$ berührt die Fläche zweiten Grades 2) wenn man hat (§ 137.; 8.)

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14}, & \xi_1 \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24}, & \xi_2 \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34}, & \xi_3 \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44}, & \xi_4 \\ \xi_1, & \xi_2, & \xi_3, & \xi_4, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diess ist die Gleichung der Fläche in Ebenen-Coordinaten. Die Flächen zweiter Ordnung sind zugleich zweiter Classe. (§ 94.; 10.)

5) Die Gleichung in 3) ist für $x$ als einen nicht in der Fläche liegenden Punkt die Gleichung seiner Polarebene in Bezug auf dieselbe. (Vergl. § 137.; 6.)

6) Unter der Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{12}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{13}, & a_{23}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{14}, & a_{24}, & a_{34}, & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

ist die Fläche zweiten Grades eine Kegelfläche.

7) Damit dem Punkte $x$ in zwei Flächen zweiten Grades $F = 0$, $F^* = 0$ dieselbe Polarebene entspreche, muss man haben

$$F_1 : F_1^* = F_2 : F_2^* = F_3 : F_3^* = F_4 : F_4^* = k$$
$$(a_{11} - k a_{11}^*) x_1 + (a_{12} - k a_{12}^*) x_2 + (a_{13} - k a_{13}^*) x_3 + (a_{14} - k a_{14}^*) x_4 = 0, \text{ etc.}$$

8) Die Existenz solcher Punkte (vergl. § 94. und § 100.; 12. u. f.) ist also an die Bedingung gebunden

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k a_{11}^*, & a_{12} - k a_{12}^*, & a_{13} - k a_{13}^*, & a_{14} - k a_{14}^* \\ a_{12} - k a_{12}^*, & a_{22} - k a_{22}^*, & a_{23} - k a_{23}^*, & a_{24} - k a_{24}^* \\ a_{13} - k a_{13}^*, & a_{23} - k a_{23}^*, & a_{33} - k a_{33}^*, & a_{34} - k a_{34}^* \\ a_{14} - k a_{14}^*, & a_{24} - k a_{24}^*, & a_{34} - k a_{34}^*, & a_{44} - k a_{44}^* \end{vmatrix} = 0.$$

Da dieselbe in $k$ vom vierten Grade ist, so existieren im Allgemeinen vier solcher Punkte, deren Getrenntheit und Realität sich an die der Wurzeln dieser Gleichung knüpft.

9) Man mache die entsprechende Erörterung für zwei Kegelschnitte und zeige, dass die Verbindungslinien

der Paare der gemeinsamen Punkte durch die Ecken des Tripels gehen, und die Durchschnittspunkte der gemeinsamen Tangenten der Kegelschnitte in seinen Seiten liegen.

10) Man bilde die Gleichungen der vier doppelt projicierenden Kegel der Durchdringungscurve von zwei Flächen zweiten Grades und beweise auf analytischem Wege den Satz in § 86.; 13.

11) Man entwickele die analogen Ergebnisse zu § 137.; 2. und 11. für Gleichungen mit vier Variabeln, speciell für Flächen zweiten Grades.

12) Die Polarebenen eines und desselben Punktes in Bezug auf alle Flächen zweiten Grades, welche demselben Büschel angehören, bilden ein Ebenenbüschel; die Pole einer Ebene in Bezug auf alle Flächen zweiten Grades, welche zur nämlichen Schaar gehören, bilden eine Punktreihe. (§ 100.; 5. § 101.)

Denn für $U = 0$ und $V = 0$ als die homogenen Gleichungen zweier Flächen des Büschels und $P = 0$, $Q = 0$ als die Gleichungen der Polarebenen des gegebenen Punktes in Bezug auf dieselben ist jede dritte Fläche des Büschels durch $U + \lambda V = 0$ und die Polarebene jenes Punktes in Bezug auf sie durch $P + \lambda Q = 0$ dargestellt.

Die Polarlinien einer festen Geraden in Bezug auf die Flächen des Büschels oder der Schaar erfüllen ein einfaches Hyperboloid; die Pole einer festen Ebene in Bezug auf die Flächen eines Büschels bilden eine Curve dritter Ordnung, die Polarebenen eines festen Punktes in Bezug auf die Flächen einer Schaar eine Developpable dritter Classe.

Denn den beiden Punkten 1 und 2 entsprechen die Polarebenen $P_1 + \lambda Q_1 = 0$, $P_2 + \lambda Q_2 = 0$, die das Hyperboloid $P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = 0$ erzeugen und den drei Punkten 1, 2, 3 die Polarebenen $P_1 + \lambda Q_1 = 0$, $P_2 + \lambda Q_2 = 0$, $P_3 + \lambda Q_3 = 0$, die sich in der Curve dritter Ordnung schneiden, welche den Hyperboloiden $P_1 Q_2 - P_2 Q_1 = 0$, $P_2 Q_3 - P_3 Q_2 = 0$, $P_3 Q_1 - P_1 Q_3 = 0$ gemeinsam ist. (Vergl. § 100.; 9—11.)

Die developpable Fläche dritter Classe erscheint als die gemeinsam umschriebene zweier einfachen Hyperboloide, die eine Erzeugende gemein haben.

13) Von der Durchdringungscurve zweier Flächen zweiten Grades, welche einen Rückkehrpunkt besitzt, ist in § 85. und in § 100. gezeigt, dass sie durch fünf Punkte oder ihre developpable Fläche durch fünf Ebenen bestimmt ist und man hat daraus (§ 85.; 9., 10.) bereits den Schluss gezogen, dass alle Curven dieser Art und ihre developpabeln Flächen unter einander collinear und reciprok sind.

Macht man von jenen fünf Punkten den in der Curve willkürlich gewählten zum Einheitpunkt und die vier übrigen zu Fundamentalpunkten, so ergiebt sich die analytische Darstellung der Curve und ihrer Developpabeln der umschriebenen und eingeschriebenen Flächen zweiten Grades sehr einfach.

Sei der Rückkehrpunkt der Curve (Fig. 228.; vergl. Fig. 165.) der Fundamentalpunkt $A_1$, der Berührungspunkt der stationären Ebene $A_2$, der Scheitel des doppelt berührenden Kegels zweiten Grades $A_3$ und der Durchschnittspunkt der Rückkehrtangente mit der stationären Ebene $A_4$; dann ist durch

$$x_3^2 - x_2 x_4 = 0$$

ein Kegel zweiten Grades von der Spitze $A_1$ ausgedrückt, der den Einheitpunkt enthält und welcher von den Ebenen $A_1 A_2 A_3$, $A_1 A_3 A_4$ nach den Geraden $A_1 A_2$, $A_1 A_4$ respective berührt wird, oder für den die Ebene $A_1 A_2 A_4$ die Polarebene von $A_1 A_3$ ist. Ebenso bezeichnet

$$x_4^2 - x_1 x_2 = 0$$

einen Kegel zweiten Grades von der Spitze $A_3$, welcher von $A_1 A_3 A_4$ und $A_2 A_3 A_4$ respective in $A_1 A_3$ und $A_2 A_3$ berührt wird oder für den $A_1 A_2 A_3$ die Polarebene von $A_3 A_4$ ist. Die Spitze des erstern liegt auf dem Mantel des zweiten und die zugehörige Berührungsebene des Letztern berührt den ersten in einer von $A_1 A_3$ verschiedenen Geraden $A_1 A_4$. Die Durchdringungscurve beider Kegel ist somit die gegebene Raumcurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt.

Daher gelten für einen beliebigen Punkt dieser Curve die gleichzeitigen Relationen

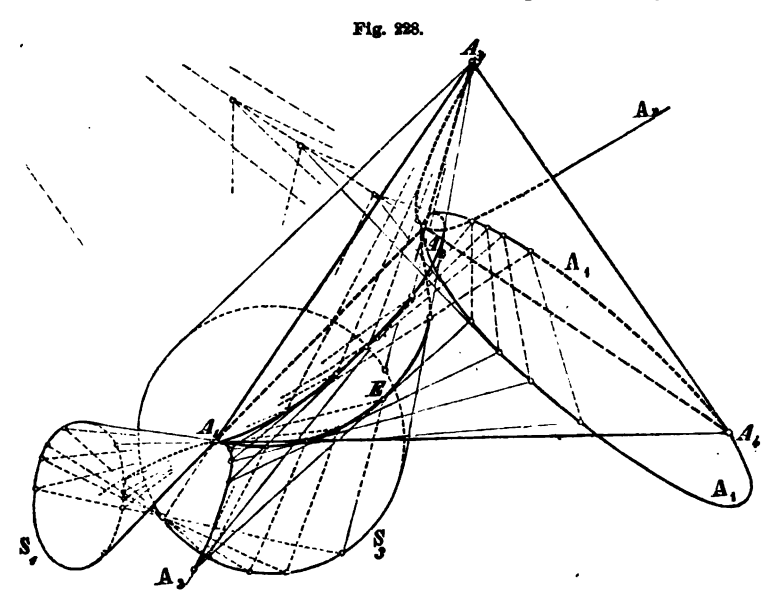
$$\frac{x_4}{x_2} = \frac{x_3^{\,2}}{x_2^{\,2}}, \qquad \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_4^{\,2}}{x_2^{\,2}} = \frac{x_3^{\,4}}{x_2^{\,4}}$$

oder für $a$ als eine beliebige Zahl darf man die Verhältnisse der Coordinaten des Punktes der Curve setzen

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = a^4 : 1 : a : a^2.$$

Der Punkt $a$ und der Punkt $-a$ der Curve liegen in einer durch den Fundamentalpunkt $A_3$ gehenden

Fig. 228.



Geraden oder der Kegel aus $A_3$ ist ein eigentlicher doppelt projicierender Kegel derselben; solche Punkte sind durch die Ebene $A_1 A_2 A_4$ harmonisch getrennt.

Die Tangentialebene des Kegels $A_1$ im Punkte $a$ hat nach § 137.; 5., 6. die Gleichung

$$2 a x_3 - a^2 x_2 - x_4 = 0$$

und die Tangentialebene von $A_3$ in demselben Punkte ist dargestellt durch

$$2 a^2 x_4 - x_1 - a^4 x_2 = 0.$$

Die Coexistenz beider Gleichungen bezeichnet die Tangente der Curve im Punkte $a$; setzt man in ihnen $x_3 = 0$, so erhält man für den Durchschnittspunkt derselben mit der Ebene $A_1 A_2 A_4$ die Bedingungen

$$a^2 x_2 + x_4 = 0, \quad 2a^2 x_4 - x_1 - a^4 x_2 = 0,$$

in welche nur die geraden Potenzen von $a$ eintreten; d. h. die Tangenten der Curve in Punkten $a$ und $-a$ schneiden sich in der Ebene $A_1 A_2 A_4$. In der That sind die Gleichungen der Tangente in $-a$

$$2ax_3 + a^2 x_2 + x_4 = 0, \quad 2a^2 x_4 - x_1 - a^4 x_2 = 0.$$

Beide Tangenten liegen in der durch die letzte Gleichung ausgedrückten Ebene und bilden also mit der Schnittlinie mit $A_1 A_2 A_4$ und mit der nach $A_3$ gehenden Geraden ein harmonisches Büschel.

Eliminiert man zwischen den Gleichungen

$$2ax_3 - a^2 x_2 - x_4 = 0, \quad 2a^2 x_4 - x_1 - a^4 x_2 = 0$$

die Grösse $a$, so erhält man eine Gleichung für den Inbegriff aller Tangenten der Raumcurve

$$\{x_3 \pm \sqrt{x_3^2 - x_2 x_4}\}^2 = x_2 x_4 \pm x_2 \sqrt{x_4^2 - x_1 x_2}$$

oder in rationaler Form nach dreimaliger Ausscheidung von $x_2 = 0$ (vergl. § 83.; 11*, b.) ($r = 8$)

$$x_2(3x_4^2 + x_1 x_2)^2 - 8x_3^2(x_4^3 + 3x_1 x_2 x_4 - 2x_1 x_3^2) = 0.$$

Sie ist eine Gleichung fünften Grades ($r = 5$, § 83.; 11*, c.; § 85.) und zeigt, dass die Fundamentalebenen $x_1 = 0$ (stationäre Ebene), $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ respective die Fläche schneiden 1) in der dreifachzählenden Geraden $A_2 A_3$ und dem Kegelschnitt $\mathbf{A}_1$ (Fig. 228.) von der Gleichung

$$9x_2 x_4 - 8x_3^2 = 0,$$

der also durch die Fundamentalpunkte $A_2$, $A_4$ geht und in ihnen respective die Geraden $A_2 A_3$, $A_3 A_4$ berührt; 2) in der zweifach zählenden Geraden $A_1 A_4$ und der durch die Gleichung

$$x_4^3 - 2x_1 x_3^2 = 0$$

dargestellten Curve dritter Ordnung, die also in $A_1$ mit der Geraden $A_1 A_4$ als Tangente einen Rückkehrpunkt und in $A_3$ einen Inflexionspunkt mit der Tangente $A_3 A_4$ hat; 3) in der Geraden $A_1 A_4$ und dem doppelt zählenden durch die Gleichung

$$3x_4^2 + x_1 x_2 = 0$$

dargestellten Kegelschnitt (Hyperbel $\mathbf{A}_3$ in Fig. 228.), der also in $A_1$, $A_2$ respective die Geraden $A_1 A_4$, $A_2 A_4$ berührt; in der Geraden $A_2 A_3$ und der Curve vierter Ordnung von der Gleichung

$$x_1 x_2^3 + 16 x_3^4 = 0.$$

Diese und die Curve dritter Ordnung in der Ebene $A_1 A_3 A_4$ enthält die Fig. 228. nicht; die Kegelschnitte $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_3$ sind punktiert, wo sie von den Flächen des Fundamentaltetraeders $A_1 A_2 A_3 A_4$ und den Kegeln verdeckt sind, übrigens ausgezogen, wie die Raumcurve vierter Ordnung selbst auf dem Mantel des Kreiskegels. $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_3$ bezeichnen die Leitcurven der beiden Kegel $A_1$ und $A_3$, deren Durchdringung sie ist.

Verbindet man den Punkt $a$ der Curve mit den beiden ihm unendlich nahe folgenden Punkten, so erhält man die Schmiegungsebene der Curve, die ihm entspricht und nach § 141. ist ihre Gleichung

$$\begin{vmatrix} \frac{x_3}{x_2}, & \frac{x_4}{x_2}, & \frac{x_1}{x_2}, & 1 \\ a, & a^2, & a^4, & 1 \\ da, & 2a\,da, & 4a^3\,da, & 0 \\ 0, & 2d^2a, & 12a^2 d^2 a, & 0 \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} \frac{x_3}{x_2}, & \frac{x_4}{x_2}, & \frac{x_1}{x_2}, & 1 \\ a, & a^2, & a^4, & 1 \\ 1, & 2a, & 4a^3, & 0 \\ 0, & 2, & 12a^2, & 0 \end{vmatrix}$$

oder $\qquad x_1 - 3a^4 x_2 + 8a^3 x_3 - 6a^2 x_4 = 0.$

Für $a = 0$ wird sie zu $x_1 = 0$ und enthält auch noch den dritten nächstfolgenden Punkt.

Die Schmiegungsebene im Punkte $-a$ ist durch

$$x_1 - 3a^4 x_2 - 8a^3 x_3 - 6a^2 x_4 = 0$$

dargestellt und wird von der Schmiegungsebene in $a$ in der Ebene $A_1 A_2 A_4$ nach einer Tangente des Kegelschnitts $\mathbf{A}_3$ geschnitten.

Soll ein Punkt $P$ oder $y$ des Raumes auf jener liegen, so hat er der Bedingung

$$y_1 - 3a^4 y_2 + 8a^3 y_3 - 6a^2 y_4 = 0$$

zu genügen und da diese eine Gleichung vom vierten Grade in $a$ ist, so gehen durch jeden Punkt des Raumes vier Schmiegungsebenen der Curve. (§ 83.; 11*, c) $n = 4$.)

Sind $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$ die vier Wurzeln dieser Gleichung, so gelten die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} x_1 - 3a_1^4 x_2 + 8a_1^3 x_3 - 6a_1^2 x_4 &= 0, \\ x_1 - 3a_2^4 x_2 + 8a_2^3 x_3 - 6a_2^2 x_4 &= 0, \\ x_1 - 3a_3^4 x_2 + 8a_3^3 x_3 - 6a_3^2 x_4 &= 0, \\ x_1 - 3a_4^4 x_2 + 8a_4^3 x_3 - 6a_4^2 x_4 &= 0, \end{aligned}$$

mit der Bedingung

$$\begin{vmatrix} 1, & a_1^4, & a_1^3, & a_1^2 \\ 1, & a_2^4, & a_2^3, & a_2^2 \\ 1, & a_3^4, & a_3^3, & a_3^2 \\ 1, & a_4^4, & a_4^3, & a_4^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Unter derselben Bedingung gehen aber auch die Ebenen

$$\begin{aligned} x_1 - 3a_1^4 x_2 - 8a_1^3 x_3 - 6a_1^2 x_4 &= 0, \\ x_1 - 3a_2^4 x_2 - 8a_2^3 x_3 - 6a_2^2 x_4 &= 0, \\ x_1 - 3a_3^4 x_2 - 8a_3^3 x_3 - 6a_3^2 x_4 &= 0, \\ x_1 - 3a_4^4 x_2 - 8a_4^3 x_3 - 6a_4^2 x_4 &= 0, \end{aligned}$$

die Schmiegungsebenen in den Punkten $-a_1$, $-a_2$, $-a_3$, $-a_4$ durch einen Punkt $P^*$. Die Gerade $PP^*$ geht durch $A_3$ und $P$ und $P^*$ sind durch $A_3$ und die Ebene $A_1 A_2 A_4$ harmonisch getrennt. (Vergl. § 85.; 12.)

Durch die Curve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt gehen unendlich viele Flächen zweiten Grades, deren Gleichung die lineare Verbindung der Gleichungen beider Kegelflächen ist

$$(x_4^2 - x_1 x_2) + k(x_3^2 - x_2 x_4) = 0.$$

Durch jeden Punkt im Raume geht eine derselben.

Für $k=0$ und $k=\infty$ erhält man die beiden Kegel.

Ist $y$ der Schnittpunkt der beiden Tangenten der Curve in den Punkten $a$ und $-a$, so gelten gleichzeitig

$$\begin{aligned} 2ay_3 - a^2y_2 - \quad y_4 &= 0, \\ -2ay_3 - a^2y_2 - \quad y_4 &= 0, \\ -y_1 \qquad - a^4y_2 + 2a^2y_4 &= 0, \end{aligned}$$

oder man hat

$$y_1 : y_2 : y_3 : y_4 = -3a^4 : 1 : 0 : -a^2$$

und dieser Punkt liegt also in einer Fläche des Büschels, wenn man hat $k = -4a^2$, d. h. in der Fläche von der Gleichung

$$x_4^2 - x_1x_2 - 4a^2(x_3^2 - x_2x_4) = 0.$$

Es ist evident, dass diese Fläche auch die beiden Tangenten der Curve in $a$ und $-a$ selbst enthält.

14) Man beweise analytisch den Satz in § 85.; 11.

15) Man interpretiere die vorigen Entwickelungen in den $\xi_i$ und zähle die entsprechenden Eigenschaften der developpabeln Fläche der Raumcurve vierter Ordnung mit Rückkehrpunkt auf.

16) Die Raumcurve dritter Ordnung ist analytisch darstellbar durch die Gleichungen

$$x_2^2 - x_1x_3 = 0, \quad x_3^2 - x_2x_4 = 0.$$

Man beweise, dass der Schnittpunkt von drei Schmiegungsebenen in der Ebene der drei entsprechenden Curvenpunkte liegt. (Vergl. § 84.; 9., 10.)

17) Drei lineare Complexe erzeugen als ihnen gemeinsam eine Regelfläche zweiten Grades durch die eine Schaar ihrer Erzeugenden.

144. Die projectivischen Beziehungen der Gebilde aller Stufen finden in den entwickelten Coordinaten den einfachsten Ausdruck; es genügt, denselben für die Collineation und Reciprocität der Räume zu geben, weil von da aus die Betrachtung leicht rückwärts und vorwärts zu verfolgen ist.

Wenn dem Punkte $P$ oder $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ des einen Raumes der Punkt $P'$ mit den Coordinaten $x_1', x_2', x_3', x_4'$ im andern Raum entspricht, so sind die $x_i'$ als Functionen der $x_i$ — und umgekehrt — so bestimmt, dass allen Punkten einer Ebene im zweiten Raum wieder die Punkte einer Ebene im ersten Raum entsprechen; und zwar diess ganz unabhängig von der Wahl der Fundamentalpunkte für die $x_i$ wie der-

jenigen für die $x_i'$. Mit Rücksicht darauf, dass nicht die absoluten Werthe, sondern nur die gegenseitigen Verhältnisse der Coordinaten zur Bestimmung des Punktes erforderlich sind, kann man setzen

$$\mu x_i' = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4) \text{ für } i = 1, 2, 3, 4 \text{ respective}$$

und erhält als Ausdruck des der Ebene

$$\xi_1' x_1' + \xi_2' x_2' + \xi_3' x_3' + \xi_4' x_4' = 0$$

des zweiten Raumes entsprechenden Gebildes im ersten Raum

$$\xi_1' \cdot \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \xi_2' \cdot \varphi_2(x_1, \cdots) + \xi_3' \cdot \varphi_3(x_1, \cdots) \\ + \xi_4' \cdot \varphi_4(x_1, \cdots) = 0,$$

welche Gleichung somit für alle Werthe der $\xi_i'$ homogen und linear in den $x_i$ sein muss. Es müssen daher die $\varphi_i$ selbst homogene lineare Fuctionen der $x_i$ sein, d. h. die Collineation der Räume wird in Punkt-Coordinaten allgemein ausgedrückt durch die Bedingungsgleichungen

$$\text{a)} \quad \mu x_i' = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 + a_{i4} x_4.$$

In Folge derselben wird die Gleichung der Ebene, welche im ersten Raum der Ebene ($\xi_1'$, $\xi_2'$, $\xi_3'$, $\xi_4'$) des zweiten Raumes entspricht,

$$\xi_1'(a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + a_{14} x_4) + \xi_2'(a_{21} x_1 + \cdots) \\ + \xi_3'(a_{31} x_1 + \cdots) + \xi_4'(a_{41} x_1 + \cdots) = 0$$

und man erkennt, dass die mit a) gleichzeitigen Relationen der Ebenen-Coordinaten sind

$$\text{b)} \quad \varrho \xi_k = a_{1k} \xi_1' + a_{2k} \xi_2' + a_{3k} \xi_3' + a_{4k} \xi_4'.$$

Der Uebergang von einem räumlichen System zu einem ihm collinearen wird also analytisch ausgedrückt, indem man an Stelle der $\mu x_i'$ lineare homogene Functionen der $x_i$ setzt oder an Stelle der $\varrho \xi_k$ lineare homogene Functionen der $\xi_i'$, deren Coefficienten mit den Coefficienten von jenen in der Art übereinstimmen, dass die Horizontalreihen der Coefficienten in jenen in die gleichnamigen Verticalreihen der Coefficienten in diesen übergehen; oder mit andern Worten: Der Uebergang zu einem collinearen System entspricht einer allgemeinen linearen Substitution für die $x_i'$ und der transponierten Substitution für die $\xi_k$.

Die Auflösung der Gruppen der Gleichungen a) und b) nach den $x_k$ respective den $\xi_i'$ liefert die entsprechenden Substitutionen für die $x_k$ respective $\xi_i'$. (§ 141. und unten 1—10.)

Die Gleichungen der Transformation der Coordinaten lassen sich leicht als specielle Fälle hiervon ableiten und die in dieselben eintretenden Coefficienten erhalten mit Hilfe des Früheren eine vollständige geometrische Interpretation, welche der der Coefficienten der allgemeinen Gleichungen der Collineation entspricht. (Beispiel 8.)

Wenn aber dem Punkte $P$ oder $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ die Ebene $\Pi'$ im andern Raum correspondiert, so setzen wir zwischen den Coordinaten $\xi_i'$ der Ebene und denen $x_i$ des Punktes die Abhängigkeit

$$m\xi_i' = \varphi_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

und erhalten als Gleichung der Ebene $\Pi'$

$$x_1' \cdot \varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + x_2' \cdot \varphi_2(x_1, \cdots) + x_3' \cdot \varphi_3(x_1, \cdots) + x_4' \cdot \varphi_4(x_1, \cdots) = 0.$$

Und da auch dem Punkte $x_i'$ eine Ebene im ersten System entsprechen muss, so ist diese Gleichung nothwendig für alle Werthe der $x_i'$ linear und homogen in den $x_i$, d. h. die Functionen $\varphi_i$ selbst müssen lineare und homogene Functionen der $x_i$ sein; man darf also setzen

$$\text{a*)} \quad m\xi_i' = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2 + \alpha_{i3}x_3 + \alpha_{i4}x_4,$$

und erhält daraus

$$\text{b*)} \quad r\xi_k = \alpha_{1k}x_1' + \alpha_{2k}x_2' + \alpha_{3k}x_3' + \alpha_{4k}x_4';$$

d. h. die Reciprocität räumlicher Systeme wird ebenfalls durch eine allgemeine lineare Substitution und deren transponierte analytisch ausgedrückt. Die geometrische Interpretation ihrer Coefficienten ist so einfach wie vorher.

Darum enthält die Algebra der linearen Substitutionen das bezeichnete Hauptstück einer allgemeinen analytischen Geometrie — sagen wir die analytische Geometrie der Lage — als einen Theil; die Entdeckung der projectivischen Eigenschaften der geometrischen Gebilde kommt auf die Entdeckung solcher Functionen der Coefficienten und Variabeln ihrer Gleichungen zurück, welche bei einer allgemeinen

linearen Substitution unverändert bleiben oder doch nur durch Hinzutreten eines constanten Factors geändert werden, d. h. auf die Theorie der Invarianten und Covarianten im Sinne der neuern Algebra. Die individuellen Eigenschaften der Figuren entsprechen den Invarianten und Covarianten gegenüber denjenigen Substitutionen, welche die Transformation der Coordinaten ausdrücken.

Nachdem wir die Idee der Verbindung entsprechender Elemente projectivischer Gebilde als die Quelle der geometrischen Erzeugung von Curven und Flächen kennen, lässt sich leicht eine Uebersicht dieser Erzeugnisse geben (Beispiele 12 f.), die zur genaueren Untersuchung anregt.

Die für die Durchführung unumgängliche Mitinbetrachtnahme der imaginären Elementenpaare knüpft sich am einfachsten an die Lehre von der Involution.

1) Man zeige, wie es eine Folge der Gleichungen a), b) respective a*), b*) ist, dass fünf Paare entsprechender Elemente, von denen keine vier demselben Gebilde zweiter Stufe angehören, die Projectivität räumlicher Systeme bestimmen.

2) Die Auflösung der Gleichungen a) für die Collineation der Räume in Punkt-Coordinaten giebt für die $x_k$ Werthe in der Form von Brüchen, als deren gemeinsamer Nenner die Determinante der Coefficienten

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13}, & a_{14} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23}, & a_{24} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}, & a_{34} \\ a_{41}, & a_{42}, & a_{43}, & a_{44} \end{vmatrix}$$

erscheint, während der Zähler das $\mu$ fache derjenigen Determinante ist, die aus der vorstehenden durch Einsetzung der Reihe $x_1'$, $x_2'$, $x_3'$, $x_4'$ in die $k^{\text{te}}$ Verticalreihe derselben gebildet wird. Bezeichnet man durch $A_{ik}$ diejenige Determinante, welche aus der vorigen durch Unterdrückung der $i^{\text{ten}}$ Zeile und der $k^{\text{ten}}$ Reihe hervorgeht, durch $R$ aber diese Determinante selbst, so erhält man

$$\frac{R}{\mu} x_k = A_{1k} x_1' + A_{2k} x_2' + A_{3k} x_3' + A_{4k} x_4'.$$

Die Substitution in die Gleichung

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

giebt

$$\xi_1(A_{11}x_1' + A_{21}x_2' + A_{31}x_3' + A_{41}x_4') + \xi_2(A_{12}x_1' + \cdots) \\ + \xi_3(A_{13}x_1' + \cdots) + \xi_4(A_{14}x_1' + \cdots) = 0$$

oder

$$x_1'(A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + A_{13}\xi_3 + A_{14}\xi_4) + x_2'(A_{21}\xi_1 + \cdots) \\ + x_3'(A_{31}\xi_1 + \cdots) + x_4'(A_{41}\xi_1 + \cdots) = 0;$$

d. h. die Relationen zwischen den $\xi_i$ und $\xi_i'$ sind

$$\varrho' \cdot \xi_i' = A_{i1}\xi_1 + A_{i2}\xi_2 + A_{i3}\xi_3 + A_{i4}\xi_4.$$

In der That sind diess die Auflösungen von b), wenn

$$\varrho' = R : \varrho.$$

3) Man leite die Projectivitätsgleichungen für Gebilde zweiter und erster Stufe direct ab und zeige sodann wie sie aus denen der Gebilde dritter Stufe hervorgehen und wie diess den Satz ausdrückt, dass in projectivischen Räumen die entsprechenden Gebilde zweiter respective erster Stufe zu einander projectivisch sind.

4) Die Gleichungen für die projectivische Transformation der Gebilde vierter Stufe erhalten wir für $i, k = 1, 2, 3, 4$ und die $a_{ik}$ als die Coefficienten der linearen Substitution mit vier Variabeln in der Form

$$\mu^2 p_{ik}' = p_{12}(a_{i1}a_{k2} - a_{i2}a_{k1}) + p_{23}(a_{i2}a_{k3} - a_{i3}a_{k2}) \\ + p_{31}(a_{i3}a_{k1} - a_{i1}a_{k3}) + p_{14}(a_{i1}a_{k4} - a_{i4}a_{k1}) \\ + p_{24}(a_{i2}a_{k4} - a_{i4}a_{k2}) + p_{34}(a_{i3}a_{k4} - a_{i4}a_{k3})$$

und entsprechend für die $\pi_{ik}$.

Was ergiebt sich für den Schnittpunkt des Strahls mit der Einheitebene, respective die projicierende Ebene desselben aus dem Einheitpunkte und ihre entsprechenden? (Vergl. 8.)

5) Die Bestimmung projectivischer Gebilde zweiter Stufe durch vier und die erster Stufe durch drei Paare entsprechender Elemente ist zu begründen; man discutiere auch die Bestimmung der Projectivität der Gebilde vierter Stufe.

6) Die Division der drei letzten Gleichungen a) durch die erste giebt

$$\frac{x_i'}{x_1'} = \frac{a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + a_{i4}x_4}{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4},$$

und analog für die Gleichungen b). Für $x_1$ und $x_1'$ gleich Eins entspringen aus diesen Gleichungen diejenigen, welche für Parallelcoordinaten $x, y, z$ (§ 140.) den Uebergang zu einem collinearen System bedeuten.

Man bilde die entsprechenden speciellen Gleichungen für reciproke Systeme und discutiere geometrisch diese speciellen Gleichungen, wie die vorhergehenden allgemeinen, entwickele insbesondere die doppelte geometrische Deutung ihrer Coefficienten. (Vergl. 8.)

7) Man bestimme die linearen Substitutionen, welche die geometrisch bestimmte Projectivität von zwei gegebenen Gebilden zweiter Stufe ausdrücken; also zu den Gruppen von vier Paaren entsprechender Elemente und für gegebene von einander unabhängige Fundamental-Elemente.

8) Die Untersuchung der Coordinatentransformation kann daran angeschlossen werden; die Systeme sind congruent und die entsprechenden Elemente decken sich.

Die Transformationen für Gebilde zweiter Stufe reichen als Beispiel hin, denn die sich ergebenden Gesetze sind allgemein. Man erhält aus den allgemeinen linearen Substitutionen

$$\mu x_i' = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3, \quad \varrho\xi_k = a_{1k}\xi_1' + a_{2k}\xi_2' + a_{3k}\xi_3'$$

für $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 = \frac{h_1}{e_1}$, respective $\xi_2' = 0$, $\xi_3' = 0$, $\xi_1' = \frac{h_1'}{\varepsilon_1'}$ (vergl. § 133.) d. i. für $A_1$, respective $a_1'$

$$\frac{\mu e_1}{h_1} x_i' = a_{i1} \text{ respective } \frac{\varrho\varepsilon_1'}{h_1'}\xi_k = a_{1k}$$

und allgemein für $A_k$ respective $a_i'$

$$\frac{\mu e_k}{h_k} x_i' = a_{ik} = \frac{\varrho\varepsilon_i'}{h_i'}\xi_k,$$

d. i. die geometrische Bedeutung der Coefficienten der Substitution als der Coordinaten der Fundamentalpunkte des alten Systems in Bezug auf das neue und die Coordinaten der Fundamental-Linien des neuen Systems in Bezug auf das alte. Dieselben Ergebnisse folgen aus $x_i' = 0$, respective $\xi_k = 0$.

Für die constructive Benutzung oder die Uebersetzung in die Figur noch bequemer schreiben wir

$$x_i' : x_j' = a_{ik} : a_{jk} \text{ und } \xi_k : \xi_l = a_{ik} : a_{il}.$$

In Bezug auf die Einheitelemente erhalten wir endlich für den Einheitpunkt des alten Systems in Bezug auf das neue und für die Einheitlinie des neuen Systems in Bezug auf das alte respective

$$\sum_{k=3}^{k=1} a_{ik} = \mu x_i'; \quad \sum_{i=3}^{i=1} a_{ik} = \varrho \xi_k.$$

Man führe diese Transformation für die Gebilde erster, dritter und vierter Stufe (vergl. 4.) durch und zeige besonders, wie für die Coordinaten von Cartesius und Plücker unsere geometrische Deutung der Transformationscoefficienten direct auf die gewöhnlichen Formeln führt.

Man untersuche endlich die speciellen linearen Substitutionen, die man orthogonale nennt, auf ihren geometrischen Character.

9) Die Projectivität der Gebilde erster Stufe wird ausgedrückt durch

$$\frac{x_2'}{x_1'} = \frac{a_{21} x_1 + a_{22} x_2}{a_{11} x_1 + a_{12} x_2} \text{ oder } \xi' = \frac{a_{21} + a_{22}\xi}{a_{11} + a_{12}\xi},$$

d. i. $$a_{12}\xi\xi' - a_{22}\xi + a_{11}\xi' - a_{21} = 0,$$

die allgemeine lineare Gleichung zwischen zwei Variabeln. Man erhält

$$\xi = -\frac{a_{21} - a_{11}\xi'}{a_{22} - a_{12}\xi'}.$$

Welches ist die Bedeutung der $\xi$, $\xi'$ im Allgemeinen (§ 132.) und welches die für die elementaren Coordinatensysteme?

10) Unter der Voraussetzung, dass $a_{11} = -a_{22}$ ist, erhält man die Gleichung der Involution

$$a_{12}\xi\xi' + a_{11}(\xi + \xi') - a_{21} = 0.$$

11) Man zeige, wie durch Voraussetzungen über das vollständige directe oder indirecte oder über das theilweise Entsprechen der Fundamental-Elemente die allgemeine Gleichung der Projectivität in die einfacheren Formen

$$a_{12}\xi\xi' = a_{21}, \quad a_{22}\xi = a_{11}\xi';$$
$$a_{12}\xi\xi' - a_{22}\xi + a_{11}\xi' = 0, \quad a_{22}\xi - a_{11}\xi' + a_{21} = 0;$$
$$a_{12}\xi\xi' - a_{22}\xi - a_{21} = 0, \quad a_{12}\xi\xi' + a_{11}\xi' - a_{21} = 0$$

übergeführt wird. Die entsprechenden Specialisierungen der allgemeinen Projectivitätsgleichungen für die Gebilde höherer Stufen mögen untersucht werden; insbesondere für den Fall entsprechender Fundamentalelemente. Welches ist die Bedeutung der Substitutionen

$$\mu x_i' = a_{ii}x_i, \quad \varrho\xi_k = a_{kk}\xi_k'?$$

12) Wenn die projectivischen Gebilde $\xi$, $\xi'$ einerlei Träger haben und auf dieselben Fundamental-Elemente bezogen sind, so giebt die für $\xi = \xi'$ aus der allgemeinen Gleichung der Projectivität entspringende Gleichung

$$a_{12}\xi^2 + (a_{11} - a_{22})\xi - a_{21} = 0$$

die Doppelelemente in einander liegender projectivischer Gebilde; ebenso die Gleichung

$$a_{12}\xi^2 + 2a_{11}\xi - a_{21} = 0$$

die Doppelelemente der Involution.

Inwiefern überträgt sich diess auf ungleichartige projectivische Gebilde? (Vergl. 17.)

13) Man zeige, dass in einander liegende collineare Gebilde zweiter Stufe im Allgemeinen nicht mehr als drei Elemente entsprechend gemein haben können und erweitere den Satz und die Beweise für die collinearen Räume.

Unter der Annahme, dass die $x_i'$ und die $x_i$ auf das nämliche System von Fundamentalelementen be-

zogen sind, genügen die sich selbst entsprechenden Punkte durch ihre Coordinaten den Gleichungen

$$\mu x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3,$$

aus denen sich für $\mu$ die cubische Gleichung ergiebt

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\mu, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}-\mu, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33}-\mu \end{vmatrix} = 0,$$

deren Wurzeln die entsprechenden Coordinatenwerthe liefern. Die sich selbst entsprechenden Geraden sind die Seiten des Dreiecks der sich selbst entsprechenden Punkte.

Oder auch: Der Ort der Durchschnittspunkte der Paare entsprechender Strahlen (vergl. §§ 22., 25.)

$$m x_i' + n x_k' = 0,\ m(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3) + n(a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3) = 0$$

ist der Kegelschnitt

$$x_i'(a_{k1}x_1+a_{k2}x_2+a_{k3}x_3)-x_k'(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+a_{i3}x_3)=0;$$

er bestimmt zu jedem Strahl des einen Büschels den entsprechenden des andern und erledigt die Construction der collinearen Ebenen. Die drei Kegelschnitte aber, welche für $i$, $k$ gleich 1, 2; 2, 3; 3, 1 respective erhalten werden, haben drei Schnittpunkte

$$x_i' = 0,\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = 0,$$

welche nur je zweien unter ihnen angehören, und somit im Allgemeinen nur drei weitere Schnittpunkte, die ihnen gemeinschaftlich sind; es sind die sich selbst entsprechenden Punkte der collinearen Ebenen. Jene wie diese Betrachtung zeigt, dass von ihnen immer einer reell sein muss und dass die ihm gegenüberliegende Seite des sich selbst entsprechenden Dreiecks es auch ist.

Wie modificieren sich Beweis und Satz für ungleichartige projectivische Gebilde zweiter Stufe, nämlich Ebene und Bündel?

14) Es ist zu zeigen, dass für ineinanderliegende reciproke Gebilde zweiter Stufe diejenigen Elemente, welche

in ihren entsprechenden liegen oder durch dieselben gehen, Curven respective Kegelflächen zweiten Grades bilden. Man hat z. B. nach a*) aus

$$\xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \xi_3' x_3 = 0,$$

$$(\alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \alpha_{13} x_3) x_1 + (\alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{23} x_3) x_2 + (\alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 + \alpha_{33} x_3) x_3 = 0 \quad .$$

oder $\alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{22} x_2^2 + \alpha_{33} x_3^2 + (\alpha_{12} + \alpha_{21}) x_1 x_2 + (\alpha_{23} + \alpha_{32}) x_2 x_3 + (\alpha_{31} + \alpha_{13}) x_3 x_1 = 0.$

Diese Kegelschnitte dienen zur Construction entsprechender Elemente, denn der eine giebt die Gerade, welche einem beliebigen Punkte des andern entspricht, als seine Polare in ihm und der andere analog den Punkt, welcher einer beliebigen Tangente des andern entspricht.

Die beiden bezeichneten Kegelschnitte sind in doppelter Berührung mit einander und die Berührungspunkte so wie der Schnittpunkt ihrer gemeinsamen Tangenten sind die einzigen Punkte, denen dieselben Geraden entsprechen, ob man sie zum einen oder andern der beiden reciproken Systeme rechnet.

15) Wie lauten die analogen Ergebnisse für den Raum?

16) Für $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ entspringt aus der allgemeinen Reciprocität der Gebilde zweiter respective dritter Stufe die Polar-Reciprocität derselben, bei welcher ein Kegelschnitt respective eine Fläche zweiten Grades als Directrix erscheint und einem Punkte dieselbe Gerade, respective dieselbe Ebene entspricht, ob wir ihn zum ersten oder zweiten der reciproken Systeme rechnen. Die Directrix ist nicht wesentlich reell. Man zeige diess an der Entstehung des Polarsystems im Strahlenbündel und in der Ebene mittelst einer Fläche zweiten Grades nach § 94.; 2., 5., 7. und weise das Orthogonalsystem der projicierenden Strahlen und zugehörigen projicierenden Normalebenen oder ihrer Spuren in der Bildebene (§ 10., § 23., Fig. 43.) als Specialfall davon nach — nämlich für eine Kugel vom Radius Null aus dem Centrum der Projection. (§ 95.; 10.)

17) Projectivische Gebilde erster Stufe liefern, wenn sie in der Form des Ineinanderliegens gleichartiger Gebilde verbunden werden, als ihr Erzeugniss das reelle oder vereinigte oder nicht reelle Paar ihrer Doppelelemente.

18) Die Verbindung ungleichartiger projectivischer Gebilde erster Stufe, nämlich einer Reihe und eines Büschels in derselben Ebene, einer Reihe und eines Ebenenbüschels, eines Strahlenbüschels und eines Ebenenbüschels, wenn der Scheitel des erstern in der Scheitelkante des letztern liegt, erzeugt zwei Elemente des einen Gebildes, die in ihren entsprechenden im andern liegen.

19) Die Verbindung der entsprechenden Elemente von zwei gleichartigen projectivischen Gebilden erster Stufe aber verschiedenen Trägern liefert folgendes:

a) Zwei Reihen in derselben Ebene durch die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punkte und zwei Strahlenbüschel in derselben Ebene durch die Schnittpunkte ihrer entsprechenden Strahlen die ebenen Curven, die wir Kegelschnitte nennen. (§ 25.)

b) Zwei Strahlenbüschel von einerlei Scheitel aber in verschiedenen Ebenen durch die Verbindungsebenen entsprechender Strahlenpaare und zwei Ebenenbüschel von sich schneidenden Scheitelkanten durch die Schnittlinien entsprechender Ebenenpaare Kegelflächen zweiten Grades. (§ 68.)

c) Zwei Reihen in sich kreuzenden Geraden durch die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punkte und zwei Ebenenbüschel von sich nicht schneidenden Scheitelkanten durch die Schnittlinien ihrer entsprechenden Ebenen die eine Regelschaar eines einfachen Hyperboloids. (§ 90.)

Welche Erzeugnisse liefern die entsprechenden Verbindungen ungleichartiger Gebilde erster Stufe?

20) Die Verbindungsebenen der entsprechenden Punkte von drei projectivischen Reihen in sich kreuzenden Geraden erzeugen eine developpable Fläche dritter Classe (§ 84.; 14.); die Schnittpunkte der ent-

sprechenden Ebenen von drei projectivischen Büscheln mit sich kreuzenden Scheitelkanten erzeugen eine Raumcurve dritter Ordnung. (§84.; 13. §143.; 12.)

21) Die Erzeugnisse unter 18), 19) und 20) lassen sich untereinander und auf die Gebilde erster Stufe projectivisch beziehen durch Festsetzung des Entsprechens von drei Paaren ihrer Elemente (vergl. § 29.). Sie lassen sich so auch zu neuen Erzeugnissen verbinden. Z. B. eine Gerade als Punktreihe und ein Kegelschnitt als zu ihr projectivische Punktreihe erzeugen durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punktepaare eine Regelfläche dritten Grades (§ 114.) — wenn sie in derselben Ebene liegen, eine Curve dritter Classe.

Zwei projectivische Kegelschnitte erzeugen durch die Verbindungslinien ihrer entsprechenden Punktepaare eine Regelfläche vierten Grades; ein Kegelschnitt und eine Raumcurve dritter Ordnung, respective zwei projectivische Raumcurven dritter Ordnung eine Regelfläche fünften respective sechsten Grades; etc.

22) Zwei collineare Ebenen bestimmen durch die Verbindungsebenen der Paare sich schneidender entsprechender Strahlen eine developpable Fläche dritter Classe; zwei collineare Bündel durch die Schnittpunkte solcher Paare eine Raumcurve dritter Ordnung. Die entsprechenden Punkte der Ebenen und die entsprechenden Ebenen der Bündel liefern Strahlensysteme, die zu jener Developpabeln und dieser Curve in engster Beziehung stehen; durch jeden Punkt geht ein Strahl und in jeder Ebene liegen drei Strahlen des letzteren im Allgemeinen und reciprok für das erstere.

23) Zwei reciproke Ebenen respective Bündel erzeugen durch die Verbindungsebenen der Punkte der einen mit den entsprechenden Strahlen der andern, respective die Schnittpunkte der Strahlen des einen mit den entsprechenden Strahlen des andern eine Fläche zweiten Grades (§ 98.; 12.). Man zeige, dass die der Schnittlinie der Ebenen respective dem Scheitelstrahl der Bündel entsprechenden Punkte und Ebenen die Berührungspunkte respective Berührungsebenen der

Fläche in den Trägern der erzeugenden Gebilde sind (vergl. § 27.; 3.). Man begründe auch die Existenz der beiden Familien der Flächen zweiten Grades — mit hyperbolischen und mit elliptischen Punkten (§ 89.) — aus dieser Erzeugungsweise.

24) Die Verbindungsebenen (Schnittpunkte) der entsprechenden Punkte (Ebenen) von drei collinearen Ebenen (Bündeln) erzeugen eine krumme Fläche dritter Classe (Ordnung). Können diese Erzeugnisse und die unter 23) unter sich und mit Gebilden zweiter Stufe projectivisch bezogen werden?

25) Zwei collineare räumliche Systeme erzeugen durch die Verbindungslinien der Paare entsprechender Punkte und durch die Schnittlinien der Paare entsprechender Ebenen einen Strahlencomplex, in welchem die durch einen festen Punkt gehenden Strahlen eine Kegelfläche zweiter Ordnung und die in einer Ebene liegenden eine Curve zweiter Classe bilden. Dieselben Strahlen sind auch die, welche mit ihren entsprechenden in einer Ebene liegen oder durch denselben Punkt gehen.

26) Aus den einfachsten Ausdrucksformen projectivischer Gebilde erster Stufe (11), welche, insofern sie Strahlenbüschel sind, demselben Gebilde zweiter Stufe angehören müssen, nämlich für $u=0$, $u^*=0$; $v=0$, $v^*=0$ als die Gleichungen der ihren Träger bestimmenden Elementenpaare, d. h. als lineare Gleichungen mit zwei Variabeln $x_i$ oder $\xi_i$, aus

$$u+\lambda u^*=0,\quad v+\lambda v^*=0$$

entspringt als Gleichung des Erzeugnisses ihrer Verbindung nach 19)

$$uv^*-u^*v=0.$$

Sind $u=0$, $u^*=0$ algebraische Gleichungen $n^{\text{ten}}$ Grades zwischen den Coordinaten $x_i$ oder $\xi_i$ in Gebilden zweiter oder dritter Stufe, d. h. die Gleichungen von ebenen Curven, Kegeln oder krummen Flächen, deren Ordnung oder Classe gleich $n$ ist, so repräsentiert

$$u+\lambda u^*=0$$

eine ebene Curve, Kegelfläche, krumme Fläche von

derselben Ordnung oder Classe, welche durch ein Element bestimmt ist, das sie enthalten soll, wenn dieses den Gebilden $u = 0$, $u^* = 0$ nicht gleichzeitig angehört. Für Gleichungen in den $x_i$ nennt man ein solches System ein Büschel von Curven, Kegeln, krummen Flächen $n^{ter}$ Ordnung, für solche in den $\xi_i$ eine Schaar von Curven, Kegeln, krummen Flächen $n^{ter}$ Classe.

Die Büschel respective Schaaren $u + \lambda u^* = 0$, $v + \lambda v^* = 0$ sind projectivisch und erzeugen durch die gemeinsamen Elemente ihrer entsprechenden Curven, Kegel, Flächen respective Curven, Kegel, Flächen von der Summe ihrer Ordnungen oder Classen als Ordnung oder Classe, welche die gemeinsamen Elemente der Büschel oder Schaaren auch enthalten.

27) Sind $u$, $u^*$, etc. homogene Polynome zweiten Grades, so hat man Büschel respective Schaaren von Curven, Kegeln, krummen Flächen zweiten Grades. Verbindet man die Gleichung eines Kegelschnittbüschels $u + \lambda u^* = 0$ mit der linearen Gleichung $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0$ durch Elimination von $x_3$, so erhält man als Gleichung der Reihe der gemeinsamen Punktepaare der Geraden und der Curven des Büschels eine Gleichung von der Form $u + \lambda u^* = 0$ mit $u$, $u^*$ als homogenen Polynomen zweiten Grades in $x_1$, $x_2$, und erkennt dieselbe als Ausdruck der Involution, welche jene Paare bilden. (§ 25.) Den Doppelpunkten derselben entsprechen die beiden Kegelschnitte des Büschels, welche die Gerade berühren. Ein Büschel von Flächen zweiten Grades schneidet daher eine Gerade in einer involutorischen Reihe und enthält zwei Flächen, welche dieselbe berühren; es schneidet eine Ebene in einem Kegelschnittbüschel und enthält somit drei Flächen, welche diese Ebene berühren, weil nach § 143.; 9. ein Kegelschnittbüschel drei Paare von Geraden enthält. Man übertrage diese Erörterungen auf die Schaaren von Curven und Flächen zweiten Grades.

28) In analoger Weise nennt man das durch eine Gleichung von der Form $u^{(0)} + \lambda_1 u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)} = 0$ dargestellte

System ein **Bündel** oder **Netz** von Curven oder Flächen ihrer Ordnung oder Classe, als welche jede durch zwei Punkte, Gerade, Ebenen, die sie enthalten oder berühren müssen, bestimmt werden; man macht sie projectivisch, indem man ihre Elemente als einander eindeutig entsprechend bestimmt. (Vergl. § 141.; 1.)

Man überträgt dieselben Betrachtungen auf Systeme von der Gleichungsform

$$u^{(0)} + \lambda_1 u^{(1)} + \lambda_2 u^{(2)} + \cdots + \lambda_\mu u^{(\mu)} = 0,$$

in welchen eine Curve respective Fläche durch $\mu$ Elemente bestimmt wird.

Man erläutere die Fläche, welche das Erzeugniss von drei projectivischen Flächennetzen ist (24) und die Curve, welche vier projectivische Netze als Ort der Schnittpunkte von je vier entsprechenden Flächen erzeugen.

145. Es ist in den früheren Entwickelungen hervorgetreten, dass die **metrischen Bestimmungen**: Rechtwinkligkeit, Gleichwinkligkeit (§ 31.; 9., 10.), Halbierung (§ 16.; 1.) **specielle Fälle projectivischer Relationen** sind, und insbesondere dass **diese Specialisierungen durch die unendlich ferne Ebene des Raumes und den in ihr gedachten imaginären Kreis bedingt werden.** (§ 97.)

So wie man nun allgemein Untersuchungen der analytischen Geometrie vereinfacht, indem man Punkte und Ebenen, welche für dieselben wichtig sind, zu Fundamentalpunkten respective Fundamentalebenen oder als Einheitpunkt respective Einheitebene wählt, oder sonst in das Coordinatensystem aufnimmt, so gilt auch **von den auf metrische Verhältnisse bezüglichen Untersuchungen der analytischen Geometrie, dass sie sich am einfachsten dann gestalten, wenn die Grundlagen der metrischen Bestimmungen überhaupt dem Coordinatensystem angehören, welches man benutzt.** Diess bedingt also die Voraussetzung, dass die eine Fundamentalebene unendlich fern ist, wie sie den Systemen der Coordinaten von Cartesius und Plücker im Allgemeinen entspricht; und die Vollständigkeit des Erfolgs bedingt ferner, dass die Stellungen

der Coordinatenebenen respective die Richtungen der Coordinatenaxen oder dass die Kanten und Ecken, die der unendlich fernen Fläche des Fundamentaltetraeders angehören, ein Tripel harmonischer Pole und Polaren in Bezug auf jenen imaginären Kreis, d. h. dass die Coordinatenaxen und Ebenen drei zu einander normale Gerade und Ebenen sind. **Die rechtwinkligen Cartesischen und Plücker'schen Coordinaten dienen daher für diese Zwecke am besten.** Von den auf sie bezüglichen metrischen Relationen gelangt man auch bequem zu den allgemeinen für die projectivischen Coordinaten. Dass man die Gleichungen in Cartesischen und Plücker'schen Coordinaten nach den Substitutionen der §§ 135. und 140. in homogene Form bringen kann, sichert die Vortheile dieser Homogeneität, giebt die Möglichkeit der Anwendung des mächtigen Instruments der Determinanten und erweitert zugleich die Tragweite und Geltung der gewonnenen Resultate.

1) Für Cartesische rechtwinklige Coordinaten sind die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, die der vom Anfangspunkt $A_1$ nach einem Punkte $P(x, y, z)$ gehende Radiusvector $A_1P = \varrho$ mit den Axen $A_1X$, $A_1Y$, $A_1Z$ macht durch

$$\frac{x}{\varrho} = \cos\alpha, \quad \frac{y}{\varrho} = \cos\beta, \quad \frac{z}{\varrho} = \cos\gamma$$

ausgedrückt und wegen

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$$

ist (vergl. § 46.)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

2) Ist dann $p$ die Länge der Normale vom Anfangspunkt auf eine Ebene und macht dieselbe mit den Axen $A_1X$, $A_1Y$, $A_1Z$ die Winkel $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ respective, so ist für irgend einen Punkt $(x, y, z)$ dieser Ebene die Summe der orthogonalen Projectionen seiner Coordinaten $PP_1 = z$, $P_1P_{12} = y$, $P_{12}A_1 = x$ auf das Perpendikel $p$ diesem gleich, d. h.

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$$

und die allgemeine Gleichung

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

kann durch Multiplication mit einem Factor

$$\left(-\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)$$

immer auf diese Form (Normalform) gebracht werden.

3) Für $(x_1, y_1, z_1)$ als einen beliebigen Punkt des Raumes und eine durch ihn zur Ebene

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma = p$$

gelegte Parallelebene ist die vom Anfangspunkt auf diese gefällte Normale

$$= x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma$$

und die Entfernung von $(x_1, y_1, z_1)$ bis zur bezeichneten Ebene ist

$$-(x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta + z_1 \cos\gamma - p),$$

d. h. das negative Resultat der Substitution der Coordinaten des Punktes in die Gleichung der Ebene, den Abstand der Ebene vom Anfangspunkte als positiv betrachtet.

4) Für den Winkel von zwei Ebenen findet man

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}},$$

$$\sin^2\theta = \frac{(A_1B_2-A_2B_1)^2+(B_1C_2-B_2C_1)^2+(C_1A_2-C_2A_1)^2}{(A_1^2+B_1^2+C_1^2)(A_2^2+B_2^2+C_2^2)}$$

und damit die Bedingungen des Parallelismus

$$A_1B_2 = A_2B_1, \quad B_1C_2 = B_2C_1, \quad C_1A_2 = C_2A_1$$

und der Rechtwinkligkeit

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

5) Ist $x_1\xi + y_1\eta + z_1\zeta + 1 = 0$ die Gleichung eines Punktes in rechtwinkligen Plücker'schen Coordinaten und sind $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$ die Coordinaten einer Ebene in demselben System, so hat die Letztere in Cartesischen Coordinaten die Gleichung

$$\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1 = 0$$

und es ist also ihre Normalform

$$\frac{\xi_1 x + \eta_1 y + \zeta_1 z + 1}{-\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}} = 0$$

und somit der Abstand des Punktes $(x_1, y_1, z_1)$ von ihr

$$= \frac{\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1 + 1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}}.$$

6) Man mache die analogen Entwickelungen für die Punkt- und Linien-Coordinaten in der Ebene.

7) Sind dann

$$\begin{aligned}
A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 &= 0, \quad \text{abkürzend } x_1 = 0,\\
A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 &= 0, \quad \text{„} \quad x_2 = 0,\\
A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 &= 0, \quad \text{„} \quad x_3 = 0,\\
A_4 x + B_4 y + C_4 z + D_4 &= 0, \quad \text{„} \quad x_4 = 0
\end{aligned}$$

die Gleichungen von vier Ebenen $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_4$, die ein Tetraeder bilden, so kann die Gleichung jeder Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

in die Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = 0$$

gebracht werden; denn die Bedingungen

$$\begin{aligned}
a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 &= A,\\
a_1 B_1 + a_2 B_2 + a_3 B_3 + a_4 B_4 &= B,\\
a_1 C_1 + a_2 C_2 + a_3 C_3 + a_4 C_4 &= C,\\
a_1 D_1 + a_2 D_2 + a_3 D_3 + a_4 D_4 &= D
\end{aligned}$$

sind verträglich und bestimmen die $a_i$, so lange nicht ist

$$\begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & A_4 \\ B_1, & B_2, & B_3, & B_4 \\ C_1, & C_2, & C_3, & C_4 \\ D_1, & D_2, & D_3, & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Dann sind die $x_i$ constante Vielfache der senkrechten Abstände eines Punktes von den Flächen des Tetraeders, d. h. sie sind von den projectivischen Coordinaten des Punktes nicht wesentlich verschieden.

8) Sind die Gleichungen von $\mathbf{A}_1, \cdots$ in der Normalform gegeben, sodass $A_i$, $B_i$, $C_i$ die $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$ sind (1, 2) und $D_i$ den negativen Abstand der Ebene $\mathbf{A}_i$

vom Anfangspunkt bezeichnet, so wird die Bedingung der Rechtwinkligkeit zweier Ebenen

$$AA^* + BB^* + CC^* = 0$$

übergeführt in

$$a_1a_1{}^* + a_2a_2{}^* + a_3a_3{}^* + a_4a_4{}^* - (a_1a_2{}^* + a_1{}^*a_2)\cos(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2)$$
$$-(a_2a_3{}^* + a_2{}^*a_3)\cos(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3) - (a_3a_1{}^* + a_3{}^*a_1)\cos(\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_1)$$
$$-(a_1a_4{}^* + a_1{}^*a_4)\cos(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_4) - (a_2a_4{}^* + a_2{}^*a_4)\cos(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_4)$$
$$-(a_3a_4{}^* + a_3{}^*a_4)\cos(\mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4) = 0.$$

Die Entfernung eines Punktes $x', y', z'$ von der Ebene

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4a_4 = 0$$

wird für $x_i' \equiv x'\cos\alpha_i + y'\cos\beta_i + z'\cos\gamma_i - p_i$ ausgedrückt durch

$$\frac{a_1x_1' + a_2x_2' + a_3x_3' + a_4x_4'}{\sqrt{[\Sigma a_i^2 - 2\Sigma a_ia_k\cos(\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_k)]}}.$$

9) Man wende diese Ergebnisse auf die Sätze in § 143.; 11. und ihre entsprechenden für die Ebene in § 137.; 2., 8. an, um dieselben anders auszudrücken.

10) Die Punkte von den Cartesischen Coordinaten $x_1, y_1$; $x_2, y_2$; $x_3, y_3$ bilden ein Dreieck, dessen doppelter Flächeninhalt durch

$$\begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_3, & y_3, & 1 \end{vmatrix}$$

ausgedrückt wird. Verlegt man ohne Aenderung der Axenrichtung den Anfangspunkt nach $x_1, y_1$, so verwandelt sich die vorige Determinante in

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1, & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1, & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2, & b_2 \\ a_3, & b_3 \end{vmatrix} = a_2b_3 - a_3b_2$$

für $a_2, b_2$; $a_3, b_3$ als die neuen Coordinaten der Punkte 2, 3 respective. Ist aber 0 der Schnittpunkt der durch 2, 3 gezogenen Parallelen zu den respectiven Axen der $y$ und der $x$, so ist

$$\triangle 123 = \triangle 120 + \triangle 230 + \triangle 310$$
$$= \tfrac{1}{2}[a_2(b_3 - b_2) + (a_3 - a_2)(b_3 - b_2) + b_3(a_2 - a_3)]$$
$$= \tfrac{1}{2}(a_2b_3 - a_3b_2).$$

11) Die Gleichung der Ebene der drei Punkte 1, 2, 3 in Cartesischen Coordinaten (§ 141., vergl. § 136.; 3.) giebt nach den Elementen der ersten Zeile entwickelt

$$x \begin{vmatrix} y_1, & z_1, & 1 \\ y_2, & z_2, & 1 \\ y_3, & z_3, & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} z_1, & x_1, & 1 \\ z_2, & x_2, & 1 \\ z_3, & x_3, & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & 1 \\ x_2, & y_2, & 1 \\ x_2, & y_3, & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1, & y_1, & z_1 \\ x_2, & y_2, & z_2 \\ x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}$$

und in dieser Gleichung sind nach 10) die Coefficienten von $x$, $y$, $z$ die doppelten Flächeninhalte der Projectionen des Dreiecks 1 2 3 auf die drei Coordinatenebenen, d. h. für $F$ als Flächenzahl dieses Letztern und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ als die Neigungswinkel der Ebene im Sinne von 1) respective gleich $2F\cos\alpha$, $2F\cos\beta$, $2F\cos\gamma$. Die Vergleichung mit der Normalform der Gleichung der Ebene giebt für die obige Gleichung

$$x \cdot 2F\cos\alpha + y \cdot 2F\cos\beta + z \cdot 2F\cos\gamma = 2Fp$$

und damit die vollständige geometrische Interpretation der Coefficienten derselben.

12) Ist dann $x$, $y$, $z$ ein beliebiger nicht in der Ebene 1 2 3 gelegener Punkt des Raumes, so ist nach 3)

$$-(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p)$$

sein normaler Abstand von dieser Ebene und

$$-2F(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p)$$

das sechsfache Volumen des Tetraeders, das aus ihm über 1 2 3 gebildet wird; somit ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1, & x, & y, & z \\ 1, & x_1, & y_1, & z_1 \\ 1, & x_2, & y_2, & z_2 \\ 1, & x_3, & y_3, & z_3 \end{vmatrix}$$

der Ausdruck des sechsfachen Volumens des durch die vier Punkte als Ecken bestimmten Tetraeders. Wenn der vierte von ihnen in der Ebene der drei andern liegt, so ist dieses Volumen Null und man hat die geometrische Bedeutung der Cartesischen Gleichung der Ebene durch drei Punkte.

---

# Quellen- und Literatur-Nachweisungen.

**Einleitung.** Man vergl. No. 1. von G. Monge's „Géometrie descriptive".

## Erster Theil.

§§ 1—11. Zu diesem Abschnitt sind besonders zu erwähnen die Schriften von Desargues (1636), den Poncelet den „Monge seines Jahrhunderts" genannt hat, von Brook Taylor (1719) und von J. H. Lambert (1759), in denen wir die strengen Grundlagen der Centralprojection finden — sämmtlich vor Monge.

Von Desargues sind wie es scheint zuerst die Grundlagen der perspectivischen Raumanschauung — der Ausdruck sei gestattet — ausgesprochen; dass nämlich parallele Gerade anzusehen sind als durch einen gemeinsamen Punkt in unendlicher Ferne gehend, parallele Ebenen als sich schneidend in einer unendlich fernen Geraden; wonach die unendlich fernen Elemente des Raumes als einer Ebene, der unendlich fernen Ebene, angehörig betrachtet werden müssen.

In Brook Taylor's „New principles of linear perspective" (London 1719) — italienisch mit Zusätzen von Franzesco Jaquier „Elementi di Perspettiva" (Rom 1755) — findet man die Bestimmungen der Geraden durch Durchstosspunkt und Fluchtpunkt und der Ebene durch Spur und Fluchtlinie, verbunden mit den nächstliegenden einfachen Anwendungen.

Ebenso und in umfassenderer Entwickelung in Lambert's Werk „Die freie Perspective oder Anweisung jeden perspectivischen Aufriss von freien Stücken und ohne Grundriss zu verfertigen" — (Zürich 1759. Dazu ein 2. Theil, ebenda 1774) — besonders in dem Abschnitt V „Von der Entwerfung schiefliegender Linien und Flächen und dessen, was darauf vorkommt."

Insbesondere erscheint die Knotenlinie oder Spur und die Grenzlinie oder Fluchtlinie der Ebene in den §§ 165, 166 daselbst. Man findet den Augenpunkt $H$ der Grenzlinie, den Punkt $H$ der Figuren 10, 11, 15, 16 im Text in § 168, den Fluchtpunkt der Normalen einer Ebene in § 182 und seine Verwendung zur Bestimmung der in solchen Normalen gelegenen Strecken in den §§ 185 f. bei Lambert. Man vergleiche besonders die Aufgaben 14 p. 101 und 15 p. 105 daselbst. Dieselben Grundlagen sind von Cousinery in der Schrift „Géométrie perspective ou principes de projection polaire appliquée à la description des corps" (Paris 1828) als neu dargeboten und als Erweiterungen der Perspective von den Berichterstattern der französchen Akademie Fresnel und Mathieu anerkannt, sowie noch von Herrn Chasles, dem Geschichtschreiber der Geometrie, hervorgehoben worden. („Geschichte der Geometrie." Deutsche Ausgabe von Sohnke, p. 192.)

Lambert's Werk ist das vollständigste und unserer Zeit nächststehende unter denen der drei genannten grundlegenden Geometer. Hier noch zwei specielle Beziehungen, nämlich zu

§ **9.**, dass der Grundsatz für die Winkelmessung der Centralprojection bei Lambert in § 216 sich findet — und zu

§ **10.**; 10., dass bei Brook Taylor (Jaquier's Uebersetzung p. 61) die Aufgabe gelöst ist: Aus der Centralprojection eines rechtwinkligen Parallelepipeds den Hauptpunkt und die Distanz zu bestimmen.

§§ **12** und **13.** Unter den Anmerkungen und Zusätzen des zweiten Theils von Lambert's Werk findet sich in der VIII. zum § 136 des ersten Theils mit der Ueberschrift „Verwandlung eines Gemäldes für einen andern Gesichtspunkt" eine Construction, in welcher wir den betreffenden Specialfall der Verschiebung des Centrums erkennen. Die beiden Constructionen, welche bei den Transformationen des Centrums, der Bildebene und des Objects gleichmässig zur Anwendung kommen, sind zuerst gegeben in meiner Programmschrift (Höhere Gewerbschule zu Chemnitz, Ostern 1860) „Die Centralprojection als geometrische Wissenschaft." § 16. In weiterer Durchführung gab ich sie in der Abhandlung „Ueber die Transformationen in der darstellenden Geometrie" im 9. Bde. der „Zeitschrift für Math. und Physik" p. 331—55.

§ **12.**; 6. In der Schrift von Desargues „Méthode universelle de mettre en perspective les objects données réellement" (Paris 1636) — siehe „Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra" (Paris 1864) t. I, p. 55—95 — ist als allgemeine Methode der perspectivischen Projection die Auftragung der projicierenden Parallelepipeda der Objectpunkte in Bezug auf drei zu einander rechtwinklige Ebenen gelehrt. (Vergl. auch § 46. des Textes.)

§ **14.** Vergl. Möbius „Der barycentrische Calcul" (Leipzig 1827). 2. Abschnitt „Von den Verwandtschaften der Figuren" p. 181—368; insbesondere das 7. Kapitel, p. 301 f.

§ **16.** Die Theorie des Doppelverhältnisses findet man bei Möbius a. a. O. p. 243—265. Man vergleiche Desargues „Proposition fondamentale de la pratique de la perspective" (Oeuvres p. Poudra, t. I, p. 403, p. 423).

§§ **16.**, **17.** Vergleiche v. Staudt „Geometrie der Lage" § 9, p. 49 f.

§ **19.**; 7. Dieser Satz findet sich zuerst bei Desargues in den "Oeuvres" t. I, p. 413 und 430.

§ **20.** Involutorische Reihen und Büschel betrachtete zuerst Desargues „Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres d'un cone avec un plan" (Paris 1639). — Oeuvres p. Poudra, t. I, p. 103—230; vergleiche p. 119—157 und p. 246—260.

Was Alles von den Entwickelungen dieser Theorie in der Lehre von den Kegelschnitten dem Desargues angehört, mag gleich hier angemerkt werden. Es ist in § 25.; 1. der Satz über das Kegelschnittbüschel und seine Transversale; a. a. O. p. 186. Dann in § 30. die Theorie der Pole und Polaren; a. a. O. p. 162. und weiter p. 186. In § 32 am gleichen Orte der Begriff eines Tripels harmonischer Pole und auf den folgenden Seiten die Lehre von der Involution harmonischer Pole. Ferner § 34. der Uebergang von der Polare zum Durchmesser — bei Desargues a. a. O.; man vergleiche auch p. 215 und Fig. 19 des „Brouillon" mit J. Steiner's von Herrn Schröter bearbeiteten Werke „Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projectivische Eigenschaften" (Leipzig 1867) p. 145 f., § 30.

Endlich ist zu bemerken, dass der darstellend geometrische Gesichtspunkt bei Desargues die Uebertragung dieser Theorien auf den Kegel und ihre Erweiterung für die Kugel so wie für diejenigen Flächen zur Folge hatte, welche sich nach dem Ausdruck von Desargues zur Kugel ebenso verhalten, wie die Kegelschnitte zum Kreis. (a. a. O. p. 214.)

§ 21.; d. Ich nenne die Schrift von Herrn Ch. Paulus „Zeichnende Geometrie zum Schulunterricht und zum Privatstudium" (Stuttgart 1866) als eine elementare Behandlung der Constructionen in der Ebene, welche in die Einsicht mündet, dass die Symmetrien ebener Systeme besondere Fälle ihrer Involution sind.

Als eine gute Sammlung der wichtigsten planimetrischen Constructionen sei empfohlen: A. L. Busch „Vorschule der darstellenden Geometrie" (2. Aufl. Berlin 1868).

§ 22. Vergleiche v. Staudt „Geometrie der Lage" § 10.; No. 123, 126—131, 138.

§ 24. Vergleiche J. Steiner „Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander." (Berlin 1832.) § 37., p. 184.

§ 29. Vergleiche J. Steiner „Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises. (Berlin 1833.) § 20., p. 90 f. Alle die hier behandelten Aufgaben sind zum Studium zu empfehlen.

§ 30.; 1. Mit anderer Auffassung findet man diese Construction bei Lambert, a. a. O., 2. Thl. p. 172.

§ 31. Für weiteres Studium: Seydewitz „Das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene als gemeinschaftliches Princip individueller Eigenschaften der Figuren." (Heiligenstadt 1846.)

§§ 35., 36. Diese Untersuchungen sind Specialfälle der Lehre von den Beziehungen von zwei Kegelschnitten in derselben Ebene; man studiere dieselbe in den von Herrn Schröter herausgegebenen Vorlesungen J. Steiner's „Die Theorie der Kegelschnitte ..." p. 224—430. Kurz in der Schrift von P. Zech „Die höhere Geometrie." (Stuttgart 1857.) p. 39—55. und in Herrn Gretschel's „Lehrbuch zur Einführung in die organische Geometrie" (Leipzig 1868) p. 118 f.; endlich in Staudt's „Geometrie der Lage" p. 165 f. und „Beiträge" § 13., § 22.

§ 37. Die strengen Regeln zur Construction der Reliefs wurden empirisch zuerst gegeben von J. A. Breysig, Prof. a. d. Kunstschule in Magdeburg, in der Schrift „Versuch einer Erläuterung der Reliefperspective." (Magdeburg 1798.) In mathematischer Begründung gab dieselben Gesetze Ponçelet in dem Werke „Traité des properiétés projectives des figures." (Paris 1822; in neuer Ausgabe 1865. T. I., Supplément sur les propriétés projectives des figures dans l'espace; p. 357—408.) Man vergleiche auch Möbius' barycentr. Calcul p. 311—330, Anger „Analytische Darstellung der Basrelief-Perspective." (Danzig 1834.) und Magnus „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes." (Berlin 1837.) p. 72—120.

§ 40. Für weitere und andere Ausführungen vergleiche man Herrn Poudra's „Traité de perspective relief." (Paris 1862.)

§ 41. Von den Anwendungen der Construction der Reliefs in der dekorativen Kunst handelt ausser dem Werkchen von Breysig besonders eingehend Herr Poudra a. a. O. p. 65—219. Eine vollständige Durchführung einer theatralischen Dekoration findet man in Herrn de la Gournerie's „Traité de perspective linéaire." (Paris 1859.) p. 247—267 und Tafel 40—45.

Für ihre optische Bedeutung vergleiche Möbius „Entwickelung der Lehre von dioptrischen Bildern mit Hilfe der Collineationsverwandtschaft" im Berichte der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig" 1855, p. 8—32.

§ 41.; 4, 5. Man vergleiche die Abhandlung von Herrn R. Morstadt „Ueber die räumliche Projection" in der „Zeitschrift für Mathem. und Physik" Bd. 12.

§ **42.** Zur Involution der Grundgebilde erster Stufe vergleiche hier in v. Staudt's „Geometrie der Lage" § 16.; ebenda zur Involution der Grundgebilde zweiter und dritter Stufe § 17., No. 226—229.

§§ **42, 43.** Vergleiche meine Note „Ueber das System in der darstellenden Geometrie" im 8. Bde. der „Zeitschrift für Mathem. und Physik" p. 444 f.

§ **44.** Zur Projectivität räumlicher Systeme vergleiche v. Staudt's „Geometrie der Lage" § 10., No. 124; 132—137. Ueber reciproke räumliche Systeme den vierten Vortrag des 2. Bdes. von Herrn Reye's „Die Geometrie der Lage." (Hannover 1868.) p. 18—26.

§ **53.** Von der Axe der Affinität zwischen den beiden orthogonalen Projectionen desselben ebenen Systems handelte wohl zuerst Herr Brasseur in den Abhandlungen der Acad. des sciences etc. de Bruxelles. 1853. „Mémoire sur une nouvelle méthode d'application de la géométrie descriptive à la recherche des propriétés de l'étendue." (148 p., 8 Tafeln.) Unbekannt mit dieser Schrift leitete mich 1858 die Betrachtung der speciellen Formen des projicierenden Parallelepipeds (§ 46.; 3, 4.) auf das System der sechs Halbierungsebenen und der vier Halbierungsaxen des Projectionssystems und ich erkannte das System der Linie $h_i$ und der Punkte $H_i$ der Ebene (§ 47.; § 47, 1.) und den Gebrauch der beiden Affinitätsaxen $h_x{}'{}''$, $h_z{}''{}'''$ derselben. (§ 53.) Eine Note „Ueber die Anwendung der Affinitätsaxen zur graphischen Bestimmung der Ebene" gab ich in der „Zeitschrift für Mathem. und Physik" Bd. 5 (1860) p. 76., Tafel II.; eine andere „Construction flächengleicher Figuren" ebenda Bd. 6., p. 56.

Um dieselbe Zeit erschien die erste Ausgabe von Herrn Pohlke's „Darstellende Geometrie. Erste Abthlg." (2. Aufl., Berlin 1866.), in welcher in den §§ 26., 41., 66. die Bestimmung der Affinitätsaxe $h_x{}'{}''$ und in § 71. die Verwendung derselben zur Projection ebener Systeme gelehrt ist.

§ **54.**; 3. Siehe Monge's „Géométrie descriptive" No. 19.

§ **54.**; 9. Man vergleiche Herrn Gugler's „Lehrbuch der descriptiven Geometrie." (2. Aufl. Stuttgart, 1867.) § 145., p. 103.

§ **54.**; 16 f. Siehe Monge's „Géométrie descriptive" No. 22. Für die constructive Behandlung der dreiseitigen Ecke, der im Text ein breiter Raum nicht gewidmet werden konnte, muss hier auf eine Darstellung aufmerksam gemacht werden, die den Vorzug vor der üblichen entschieden verdient. Man mache in den Kanten der dreiseitigen Ecke vom Scheitel $S$ die Längen $SA = SB = SC$ und lege durch die Punkte $A, B, C$ die zu $SA, SB, SC$ respective normalen Ebenen, welche sich im Scheitel $S_1$ der Polarecke und in den Kanten $S_1A_1$, $S_1B_1$, $S_1C_1$ derselben schneiden, die wir in den Flächen der Originalecke in $A_1, B_1, C_1$ begrenzt denken. In einer freien Axonometrie etc. construirt man natürlich $S_1A_1$, $S_1B_1$, $S_1C_1$ aus den Spuren der sich in ihnen schneidenden Ebenenpaare der Flächen-Winkel $\alpha, \beta, \gamma$ in den drei Flächen der Ecke und daraus ergiebt sich auch die Darstellung der ganzen Figur in der Umlegung in eine Ebene; also ebenso ihr Netz und Modell. Ihre Anschauung giebt unmittelbar die allgemeinen Grundgesetze der Ecke.

Die vollständige Symmetrie der Construction macht sie gleich geeignet zur Lösung der verschiedenen Aufgaben über die dreiseitige Ecke. Es sei bemerkt, dass in den Kreisvierecken an der Polarecke $S_1A_1BC_1$, $S_1B_1CA_1$, $S_1C_1AB_1$ die Diagonalen $S_1A = S_1B = S_1C$ sind und dass dieselben mit dem Scheitel $S$ congruente rechtwinklige Dreiecke bilden von der Hypotenuse $SS_1$, welche zur Ebene $ABC$ normal ist und der als Höhe der Radius des dem

Dreieck $ABC$ umschriebenen Kreises entspricht. (Vergleiche „Zeitschrift für Mathem. und Physik.“ Bd. 8., p. 448.)

Wenn man $S_1$ in eine Kante der Originalecke, z. B. nach $C$ verlegte, so fallen $B_1$ und $A_1$ auch dahin, die Kreisvierecke $SBA_1C$, $SCA_1B$; $S_1B_1CA_1$, $S_1C_1AB_1$ verwandeln sich in rechtwinklige Dreiecke, $S_1A_1BC_1$ wird zu einem Punkte reduciert und muss durch ein schiefwinkliges Dreieck ersetzt werden; nur $SAC_1B$ bleibt als Kreisviereck bestehen und man erhält die übliche Construction, in welcher die natürliche Verbindung mit dem sphärischen Dreieck gelöst und die Anschauung der Polarecke sehr gestört ist — denn nur eine von ihren Kanten ist noch vorhanden. Noch mehr allerdings wird die Anschauung erschwert durch die Verlegung des Scheitels $S_1$ nach $S$, ebenso wie die Modellbildung.

Es ist characteristisch für das Verhältniss der beiden constructiven Darstellungen, dass man aus der unsymmetrischen letzteren neben dem *sinus*-Satz der sphärischen Trigonometrie die Formel $\cos \gamma \cdot \sin a \cdot \sin b = \cos c - \cos b \cdot \cos c$ erhält, während sich aus der bezeichneten symmetrischen Construction direct die Gauss-Delambre'schen Gleichungen und die Neper'schen Analogien ergeben, der Hauptschatz der für die Rechnung bequemen Formeln.

§ 57 f. Die Transformationen in der darstellenden Geometrie sind Gegenstand sehr verschiedener Auffassungen und Würdigungen gewesen. Olivier und nach ihm andere haben sie zum Hauptmittel der constructiven Lösungen selbst der Grundprobleme der darstellenden Geometrie gemacht; man vergleiche für diese Richtung Herrn Tresca's „Traité élémentaire de géométrie descriptive“ (Paris, 2. éd. 1864.) und Herrn Pohlke's „Darstellende Geometrie.“ Ihnen ist von Herrn de la Gournerie (vergl. die Vorrede zum ersten Bande des „Traité de géométrie descriptive“) und Andern entgegengesetzt worden, dass die Methode trotz ihres Alters — sie geht auf Desargues' „Pratique du Trait à preuves“ zurück — weder in der Praxis der Stereotomie noch in der Theorie sich solcher hohen Bedeutung würdig erwiesen habe. Gerechte Schätzung scheint mir die Lehre von den Transformationen in der übrigens vor Olivier datierenden Darstellung von Herrn Gugler „Lehrbuch der descriptiven Geometrie.“ Erster Abschnitt, IV. Kap. erhalten zu haben. Ich fasse sie einfach als Mittel zur Beseitigung wesentlich technischer Schwierigkeiten wie ich diess in der schon unter §§ 12., 13. genannten Abhandlung gethan habe; eine grundlegende Bedeutung für die darstellende Geometrie kann ich ihnen aus pädagogischen Gründen nicht zuweisen, nach meiner Erfahrung ist es besser erst in dem festen Projectionssystem sich ganz heimisch zu machen, ehe man dasselbe in Bewegung zu setzen und zu verändern unternimmt. Dann sind die Lösungen durch Transformation sehr nützliche Uebungen. (Vergl. § 59.) Die Construction des Mittelpunkts der einem Tetraeder eingeschriebenen Kugel bietet ein gutes Beispiel für den Gebrauch der Parallelverschiebungen; siehe Monge's „Géométrie descriptive“ No. 92.

§ 60. Ich hoffe, dass die Verbindung der Axonometrie mit der Lehre von den Transformationen als naturgemäss wird erachtet werden.

Man vergleiche besonders in J. H. Lambert's „Freie Perspective“ den 7. Abschnitt: „Von der perspectivischen Entwerfung aus einem unendlich entfernten Gesichtspunkte.“ p. 149—167. und Fig. XXVI. Dazu die ausführliche Behandlung in Herrn Pohlke's „Darstellende Geometrie.“ p. 72—100. Von den deutschen Schriften, welche über Axonometrie speciell in neuerer Zeit erschienen sind, nenne ich die älteste, Herrn Möllinger's „Isometrische Projectionslehre (Perspective).“ (Solothurn 1840.) und die neueste von Herrn

Delabar „Die Polar- und Parallelperspective.“ (Freiburg 1870.) Die Einführung einfacher Verhältnisse zwischen den Maassstäben gab J. Weisbach in dem Aufsatze: „Die monodimetrische und anisometrische Projectionsmethode“ in „Polytechnische Mittheilungen von Volz und Karmarsch“ 1844; eine elementare und practische Darstellung des ganzen Verfahrens derselbe in „Anleitung zum axonometrischen Zeichnen.“ (Freiberg 1857.) Man vergleiche dazu die Abhandlungen von Herrn Schlömilch in der Zeitschrift „Der Civilingenieur.“ Bd. 2. p. 196. und in „Zeitschrift für Mathem. und Physik.“ Bd. 4., p. 361.

§ 61. Der Hauptsatz des § verdient den Namen des Pohlke'schen Satzes; man vergleiche die Darstellung desselben in der Schrift seines Entdeckers a. a. O. 2. Aufl. § 147. und dazu die Abhandlungen von Herrn H. A. Schwarz im 63. Bde. des „Journal f. d. r. u. a. Mathem.“, der den ersten elementaren Beweis des Satzes gab; von Herrn Th. Reye in der „Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft zu Zürich“ 1866, p. 350. und die von v. Deschwanden am gleichen Orte, 1861. p. 254.; 1862, p. 159. und 1864, p. 223.

Den wesentlichen Gang und den Hauptinhalt des ersten Theils gab ich in der Absicht, zu verwandten Bestrebungen anzuregen in der Abhandlung „Die Methodik der darstellenden Geometrie zugleich als Einleitung in die Geometrie der Lage“ 182 p., 3 Tafeln, im 55. Bde. der „Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften.“ (Wien 1867.)

## Zweiter Theil.

§ 69. Siehe zu den Anwendungen der Eigenschaften der Rotationscylinder Monge's „Géométrie descriptive.“ No. 31.

§ 70. Für die Beispiele dieses § vergleiche man J. Steiner's „Vorlesungen über synthetische Geometrie. I. Thl. Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Darstellung bearb. von Dr. Geiser.“ (Leipzig 1867.) § 24., p. 161.

§ 72.; 4. Vergleiche Herrn de la Gournerie's „Traité de géométrie descriptive.“ t. II., Nr. 474., p. 59.

§ 76.; 6. Vergl. die Note von Herrn Reye in der „Zeitschrift für Mathem. und Physik.“ Bd. 15., p. 64.

§ 78.; 13. Vergleiche Herrn Molin's Abhandlung in „Journal de Mathém. p. Liouville.“ t. I., 2ième Série, p. 265. Oder die Schrift von Hrn. W. Schell „Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung.“ (Leipzig 1859.) Hierfür insbesondere p. 86 f.

§ 81. Die für die Curven dritter Ordnung eingeführten Benennungen gab in einer lesenswerthen Abhandlung im 10. Bde. des „Archiv der Mathematik und Physik“ (1847) Seydewitz. Für weiteres vergleiche meine deutsche Bearbeitung von Rev. G. Salmon's „Analytische Geometrie des Raumes.“ Bd. II., p. 89 f.

§§ 82—84. Vergleiche die kurze und classische Abhandlung von Herrn A. Cayley „Liouville's Journal de Mathém.“ t. X., p. 245. (1845); dazu weiter die von Rev. G. Salmon in „Cambridge and Dublin Mathem. Journ.“ Vol. V., p. 24. (1850.)

§ 85. Im Zusammenhange hiermit und nach Zuziehung der Ergebnisse der §§ 100., 101. studiere man die No. 544., 555. von v. Staudt's „Beiträge zur Geometrie der Lage.“

§ 86. Die Durchdringung von zwei Kegelflächen zweiten Grades mit einer gemeinsamen Hauptebene ist in fast allen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie behandelt, ohne dass jemals die einfachen und weitreichenden Ergebnisse daran geknüpft wären, zu denen sie führt; man vergleiche auch Herrn de la Gournerie's „Traité.“, t. I., p. § 247., Tafel 38. In demselben Werke t. II., Chap. II.

ist mit analytischen Hilfsmitteln die developpable Fläche untersucht, welche zwei Kegelschnitten umschrieben ist, jedoch ohne Rückwirkung respective Beziehung auf jene dualistich entsprechenden Probleme.

Erwähnt sei zu dieser Construction die sie mit betreffende Abhandlung von Herrn Wiener „Ueber scheinbare Unstetigkeit geometrischer Constructionen,..“ in der „Zeitschrift für Mathem. und Physik.“ Bd. 12., p. 375.; No. 16 f.

§§ **90—92**. In Herrn de la Gournier's „Traité“ wird die Theorie des Hyperboloids gegeben in t. II., Livre sept., Chap. IV., No. 681—743., die des hyperbolischen Paraboloids aber in den No. 585—612.

§ **93**. Man vergleiche in J. Steiner's „Systematische Entwickelung.“ § 57. p. 242—247.

§ **94**. Vergleiche von Staudt „Geometrie der Lage“ § 25.; „Beiträge“ § 2., § 32. Ich nenne noch die gedrängte Darstellung in Zech „Die höhere Geometrie.“ (Stuttgart 1857.) p. 59 f.

§ **94**.; 9. Siehe Monge's „Géométrie descriptive.“ No. 36., 37.

§ **97**. Die Centralprojection der Flächen zweiten Grades auf eine Kreisschnittebene behandelt Herr Pelz im „Archiv für Mathem. und Physik.“ Bd. 52., p. 313.

§ **99**.; 11. Als gute Zusammenstellung der Hauptergebnisse bezüglich der stereographischen Projection erwähne ich aus Herrn Baltzer's „Elemente der Mathem.“ 2. Bd. 5. Buch; § 5., 15—21.

§ **100**. Zu den einfachen Systemen von Flächen zweiten Grades ist zu studieren v. Staudt „Beiträge.“ § 36. und § 37.

§ **102**. und **103**. Für das Studium der Lehre von den Krümmungsverhältnissen der Flächen ist auf die grundlegenden Abhandlungen von Euler, Monge und Gauss zu verweisen; die tüchtige Darstellung der Elemente in Herrn de la Gournerie's „Traité“ t. III., Livre VIII. verdient Hervorhebung.

§§ **106** f. Für die Theorie der windschiefen Regelflächen vergleiche man meine deutsche Bearbeitung von Rev. G. Salmon's „Analyt. Geom. des Raumes.“ Bd. 2., p. 288 f.; besonders auch in Bezug auf die Literatur.

§ **110**.; 9., 10. Man vergleiche Herrn de la Gournerie's „Traité“ t. III., No. 882—887.; überhaupt die sorgfältige Darstellung der Lehre von den „Surfaces gauches“ ebenda t. II., No. 140—218.

§ **111**.; 10. Die allgemeine Theorie der hier für den Fall der geraden Erzeugenden berührten Familie von Flächen ist als Theorie der „Surfaces helicoides“ behandelt in Herrn de la Gournerie's „Traité“ t. III., No. 956—967. und No. 1042—1058.; es folgen daselbst auf den ersten Abschnitt die Theorie der developpabeln und der Schraubenregelflächen bis No. 1041.

§ **114**. Die Regelflächen dritten Grades sind in der „Analyt. Geom. des Raumes“ Bd. 2., p. 384. behandelt; man vergleiche die Monographie von Herrn Emil Weyr: „Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung.“ (Leipzig 1870.)

§ **114**.; 2 bis 4. Man studiere die Abhandlung von Herrn Cremona „Intorno alla curva gobba dell quart' ordine per la quale passa una sola superficie di secondo grado.“ (Annali di Matematica“ t. IV.).

§ **118**. Vergleiche Monge's „Géométrie descriptive“ No. 30.

§ **122**. Vergleiche für die Darstellung in Centralprojection Cousinery's „Géométrie perspective“ p. 67. und 80. Tafel VI. mit Herrn Niemtschik's Abhandlung „Directe Construction der Contouren von Rotationsflächen in orthogonalen und perspectivischen Darstellungen.“ Wien 1866. (Sitzungsberichte der mathem. naturw. Classe d. k. k. Akad. Bd. 52.)

§§ **124., 125.** Für constructive Durchführungen vergleiche man Herrn Tilscher's Werk „Die Lehre der geometrischen Beleuchtungs-Constructionen." Wien 1862.; für den besonderen Fall des dreiaxigen Ellipsoides die Abhandlung von Herrn Koutny im „Archiv der Mathem. und Physik" 1866. Eine beachtenswerthe mathematische Studie über die Isophoten gab Herr Burmester in zwei Abhandlungen in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" Bd. 13. und 14.; ein eigenes Werk desselben Verfassers ist in Vorbereitung.

§ **126.**; 4. Zum Studium diene die Abhandlung von Herrn Vialla „Mémoire sur la vis Saint-Gilles" im „Journal de l'école polyt." t. XXI, p. 191. (5 pl.) Paris 1858.

§§ **131—145.** Die Hauptmomente dieser Entwickelung veröffentlichte ich zuerst in der „Vierteljahrsschrift der Naturforsch. Gesellschaft zu Zürich' Bd. 15., p. 152 f. Man vergleiche für die Grundidee v. Staudt „Beiträge" 2. Heft. (1857.) §. 29., p. 261—267. und W. Hamilton „Elements of Quaternions." (London 1866.) p. 24. und p. 62.

Durch weitere Ausführungen, Aufnahme der Discussion der Bedeutung homogener Gleichungen zwischen den Coordinaten (§§ 137., 143) und der analytischen Ausdrucksweise der projectivischen Beziehung der Gebilde der verschiedenen Stufen (§ 144.), woraus auch die Lehre von der Transformation der Coordinaten vollständig und einfach hervorgeht, so wie durch zahlreiche Beispiele aus dem ganzen Gebiete suchte ich diesen Schlussabschnitt zu einer Einführung in die analytische Geometrie der Lage zu gestalten, wie sie dem durch die vorhergehenden Entwickelungen erreichten Standpunkte entspricht. Vielleicht kann sie zeigen, dass auch hier das Allgemeinste zugleich das einfachste und selbst für das Verständniss der gewöhnlichen Cordinatenmethode das Vortheilhafteste ist.

§§ **132., 134., 139.** Es mag die Frage erörtert werden, wie sich die Identität $\Sigma \xi_i x_i = 0$ in dem Falle gestaltet, wo die Einheit-Elemente nicht harmonisch sondern nach andern Doppelverhältnissen durch die Fundamental-Elemente getrennt werden. Man vergl. auch Herrn Chasles' „Géométrie supérieure." (Paris 1856.) p. 306—361.

§ **135.** Vergl. die „Theoria analytica generalis projectionis centralis" in Jacobi's Abhandlung „De Transformatione integralis duplicis inde finitis..." (Journal f. d. r. u. a. Mathem. Bd. 8., p. 338—341.)

§ **137.** Beispiel 2. Vergl. damit Herrn v. Hesse's „Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie." (Leipzig 1866.) Satz 17. und Herrn P. Serret's prätentiöse „Géometrie de direction." (Paris 1869.) p. 130.

§ **142.** Als erste Anwendung der sechs homogenen Coordinaten der Geraden im Raum ist zu nennen die Abhandlung von Herrn A. Cayley Ueber eine neue analytische Darstellung einer räumlichen Curve „Quarterly Journal of Math." Vol. III., p. 225. (1859.) und Vol. V., p. 87.; dieselben erscheinen darin rein analytisch als Abkürzungen für häufig begegnende Ausdrücke, aber mit der sie verbindenden identischen Relation.

Allgemein bekannt sind die sechs Coordinaten eines Strahls durch die grosse Abhandlung von Plücker geworden „On a new Geometry of Space." (Philosoph. Transactions" 1865., Vol. 155.; p. 725.) und durch sein Werk „Neue Geometrie des Raumes." (Leipzig 1868—9.), welches Herr Dr. Klein herausgab. Sie sind darin geometrisch aber auf Grundlage der Cartesius-Plücker'schen Coordinaten also nicht in homogener Form gegeben. Die geometrische Entwickelung der homogenen Coordinaten des Strahls, aus der auch die volle geometrische Durchsichtigkeit ihrer Transformationen sich ergiebt (§ 144.; 7.) ward bisher nicht dargestellt.

Für weitere Studien vergleiche man besonders die Abhandlungen von Herrn A. Cayley „On the six Coordinates of a Line" in „Transactions of the Cambridge Philos. Society." (1868.) Vol. XI., 2., von Herrn Battaglini in den „Rendicondo d. R. Acad. di Scienze Fisiche e Matem. di Napoli" (1866.), welche im 6. Bande seines „Giornale di Matematiche" (1868.) p. 24. und 239. wieder abgedruckt und die der Herren Klein und Clebsch, welche in „Mathematische Annalen" Bd. 1. und 2. enthalten sind. Ausserdem die schöne gehaltreiche Untersuchung von Herrn Kummer in den Abhandlungen der Berliner Akademie von 1866 „Ueber die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere über die der ersten und zweiten Ordnung" (4$^{to}$, 120 p.) und die ihr 1859 vorangegangene „Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme." („Journal für d. r. u. a. Math." Bd. 57., p. 189.) (Im Auszuge in meiner deutschen Bearbeitung von Rev. G. Salmon's „Analyt. Geom. des Raumes." Bd. 2., p. 212—231.)

**§ 143.**; Beisp. 13. Man vergleiche die Sätze von Herrn Cremona in „Comptes rendus." t. 54. (1862), p. 604. und die Abhandlung von Herrn Schwarz „Journal f. d. r. u. a. Math." Bd. 64. (1865) p. 1. Die Sätze des erstern wurden bewiesen von den Herren S. Dino und E. d'Ovidio im „Giornale di Matem." von Battaglini. Bd. 3. (1865) p. 100.

**§ 144.** Man vergleiche die Darstellung von Magnus in seiner „Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geom. d. Raumes." p. 72 f. und p. 120 f. oder die auf die Ebene beschränkte aber in homogenen Gleichungen gegebene in meiner Bearbeitung von Rev. G. Salmon's „Analyt. Geom. d. Kegelschnitte." 2. Aufl. p. 507—516. Für die Discussion der Projectivitätsgleichung von Gebilden erster Stufe ebenda p. 322 f. und p. 405 f.

Die allgemeinen Coordinatentransformationen (Beisp. 7.) sind überraschender Weise noch nirgends in diesen Zusammenhang gestellt worden, jedenfalls weil die geometrische Deutung der Coefficienten der allgemeinen linearen Substitution nicht gewonnen war. Für die Transformation der Coordinaten der geraden Linie im Raum vergleiche man jedoch Herrn A. Cayley's oben citierte Abhandlung „On the six Coordinates of a Line." Art. 76., 77., wo die Deutung der Coefficienten der Transformation als Coordinaten der Kanten des einen Fundamental-Tetraeders im andern ausgesprochen ist, jedoch ohne unsere geometrische Erklärung der Coordinaten selbst und ohne die zweite Deutung, die wir erhalten.

Zu den Beisp. 20—22. studiere man in Herrn Reye's „Die Geometrie der Lage." 2. Abtheilung. (Hannover 1868.) p. 68—106.; zu 22. ebenda p. 26 f.; zu 23. ebenda p. 127 f. und zu 24. p. 116 f. Auch in diesen Bereichen ist die anschauliche Darstellung ein werthvolles Hilfsmittel für das Verständniss der Theorie. Ich wähle zur Erläuterung ein Beispiel aus der Lehre von der Projectivität der Gebilde erster Stufe und ihrer Erzeugnisse. Die Punkte eines Kegelschnittes $K$ seien in zwei projectivische Reihen zweiter Ordnung bestimmt durch drei Paare $A, A'$; $B, B'$; $C, C'$ geordnet, der Kegelschnitt also als Vereinigung von zwei projectivischen Curven zweiter Ordnung gedacht. Durch denselben werde ein einfaches Hyperboloid mit seinen beiden Regelschaaren gelegt und dieselben projectivisch aufeinander bezogen durch Vermittelung der Reihen $A, B, C$; $A', B', C'$, indem die durch jene ersten Punkte gehenden Erzeugenden $g_1, g_2, g_3$ den durch die letzten gehenden Erzeugenden der andern Schaar $l_1, l_2, l_3$ zugeordnet werden; die Darstellung wird leicht mittelst des Umrisskegelschnitts gemacht. Bezeichnen wir dann den Schnittpunkt und die Ebene von $g_i$ mit $l_k$ durch $A_{ik}$ respective $\mathbf{A}_{ik}$ (vergl. § 90. p. 317.), so bestimmen die drei Punkte

$A_{11}, A_{22}, A_{33}$ die Ebene **S** desjenigen Kegelschnitts und die Ebenen $\mathbf{A}_{11}, \mathbf{A}_{22}, \mathbf{A}_{33}$ oder die drei Geraden $A_{12} A_{21}, A_{13} A_{31}, A_{23} A_{32}$ die Spitze $S$ desjenigen Kegels vom zweiten Grade, welche beide zu den projectivischen Regelschaaren zugleich perspectivisch sind. Nun sind die Geraden $AA'$, $BB'$, $CC'$, etc. die Spuren der Ebenen dieser Kegelfläche in der Ebene von $K$ und wenn $s$ die Durchschnittslinie der Ebene **S** mit der Ebene von $K$ bezeichnet, so findet in den auf dieser Geraden gelegenen Punkten $F_1, F_2$ von $K$ doppelte Berührung statt zwischen $K$ und der von der Geraden $XX'$ umhüllten Spur jenes Kegels. Diese Punkte sind die Doppelpunkte der projectivischen Reihen in $K$. (Vergl. § 29.)

Wenn die Ebene von $K$ den Scheitel $S$ des Kegels der vorigen Betrachtung enthält, so gehen die Geraden $AA'$, $BB'$, etc. durch einen und denselben Punkt und das von ihnen gebildete Strahlenbüschel ist mit dem Kegelschnitt $K$ in doppelter Berührung nach der Geraden $s$, in welcher die Ebene von $K$ mit **S** sich schneidet. Die projectivischen Reihen $A, A'$; $B, B'$; etc. sind in Involution, $S$ ist der Pol und $s$ die Polare derselben. (§ 30.) Diese elementaren Lehren werden so in wichtiger Weise ergänzt. Die Fragen nach den gemeinsamen Elementenpaaren von zwei Involutionen (§ 35.; 13.), von einer Involution und zwei projectivischen Gebilden oder von zwei Paaren projectivischer Gebilde desselben Trägers, erhalten von da ihre vollständige und anschauliche Beantwortung.

Die graphische Durchführung dieser Betrachtungen ist nach dem früher Entwickelten leicht und gewiss von Werth für das Verständniss dieser Darstellung, die man (vergl. H. Pfaff's „Neuere Geometrie." Thl. I., p. 75. und anderwärts) sonst in einigen Zeilen abgemacht und eben darum wohl unvollständig gegeben hat. Man wird dieselben Constructionen zur Durchführung der dualistisch entsprechenden Untersuchung geeignet finden. Mit analogen Darstellungen mag v. Staudt „Beiträge" §§ 4., 5. p. 44 f. begleitet werden.

Beisp. 21. Zum Studium seien empfohlen die Abhandlungen von Herrn Cremona „Sulle superficie gobbe di quarto grado" [„Istituto di Bologna." t. VIII., 2. série (1868)], von Herrn Cayley „On certain skew surfaces, otherwise scrolls" [„Transactions of the Cambridge Philos. Society", Vol. XI., (1868)] und von Herrn Schwarz „Ueber die geradlinigen Flächen fünften Grades" [„Journal f. d. r. u. a. Math." Bd. 67., p. 23. (1867)].

Beisp. 28. Ueber die Durchführung dieser Theorien studiere man die Kapitel V—IX. des 2. Theiles der deutschen Ausgabe von Herrn Cremona's im Vorwort erwähnten Werken „Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen in synthetischer Behandlung." (Berlin 1870.)

## Berichtigungen und Zusätze.

| pag. | Zeile | |
|---|---|---|
| 9 | 7 v. u. | Nach oder schalte ein $n$ und |
| 19 | 4 und 20, 8 v. o. | lies $C$ statt $\mathfrak{C}$. |
| 19 | 3 v. u. | Statt mit ihr selbst lies mit dem Bilde |
| 23 | 8 v. o. | Statt $\alpha$ lies $\alpha^*$; vergl. die Note zu Fig. 13. p. XXVI. |
| 35 | 11 „ „ | Statt $AB'$ lies $A'B'$ |
| 37 | 17 „ „ | Statt Strecken lies Strecke |
| 76 | 13 „ „ | Fehlt der Hinweis: Vergl. § 20. |
| 79 | | Fig. 50. Statt $C$ im Kreise $A'B'D'$ lies $C'$; zur Ellipse $ABCD$ gehört der Buchstabe $K$. |
| 82 | 2 f. v. o. | lies in Zeile 2 und 6 $T_2$ statt $T''$; in 3 $TT_2$, $T_1T_2$; in 6 und 7 $T$ statt $T_2$ |
| 97 | 15 v. u. | lies $P'$ statt $T'$ |
| 113, 114; | | Fig. 70., 71. Die Scheitel der Büschel harmonischer Polaren, deren einer Rechtwinkelstrahl nach $T_\infty$ geht, bilden eine gleichseitige Hyberbel durch die Brennpunkte. |
| 120 | 16 v. o. | lies § 77. statt § 76. |
| 186 | 20 „ „ | lies Projectionsebene |
| 188 | 8 „ „ | lies 3.) statt 11.) |
| 208 | 14 „ „ | lies Cylinder-Flächen |
| 220 | | Fig. 137. Man bestimme die Gegenaxen der Collineation, in welcher die Curven $L'$ und $L_1'$ stehen, aus den Paaren von entsprechenden Geraden $q_2'$, $r'$; $q_1'$, $q'$. |
| 252 | | Aufg. 1^b) Man construiere den Schnitt der developpabeln Schraubenfläche mit einer Schmiegungsebene ihrer Doppelcurve. |
| 257 | | zu Aufg. 6.) Man characterisiere die Abwickelung des unter $45^0$ zur Axe einer solchen developpabeln Schraubenfläche ($\beta = 45^0$) geführten ebenen Schnittes hinsichtlich ihrer Inflexionspunkte. |
| 344 | 10 v. u. | lies statt ein Durchmesser einem Durchmesser parallel |

| pag. | Zeile | |
|---|---|---|
| 365 | 8 v. u. | streiche die Worte parallele oder |
| 418 | | zu Aufg. 11.) Die anschmiegenden Hyperboloide für die Wölbfläche des schiefen Dùrchgangs, die ihren verschiedenen Erzeugenden entsprechen und seine verticale Axe enthalten, gehen auch durch seine gerade Leitlinie. |
| 452 | 12 v. o. | lies entsteht statt besteht. |
| 456 | 16 „ „ | lies von den Richtungen statt von denen |
| 459 | 4 v. u. | lies der statt die |
| 490 | 2 v. o. | lies ihre statt ihrer. |




Gebunden v
C. W. Fr
in Götti

